01-12-2024

WorldMathBook

中国人 (Chinese)

对于高中及更多

Tom Pedersen,公司: WorldMathBook
cvr.44731703 丹麦 (Denmark)
ISBN 978-87-975307-4-0

内容：

 ISBN 978-87-975307-4-0

第 3 部分：差异化与整合 151

第 4 部分。向量 249

前言，世界数学 - 中文

数学是我们最准确的科学。

数学是一门美丽的科学。

有些人只研究数学，但大多数人将其作为物理、生物、医学、工程科学、经济……一切事物的工具。

对于高中及更多。我们从四种基本算术运算开始，并在学士或候选人学习的第一或第二学期完成。

语言清晰，理解重点，技术术语都有解释。

还有一本练习册，其中包含问题和建议的解决方案。

这本书与使用哪个公式集无关。

这本书也独立于使用计算器或计算程序。

还有一件事。数学并没有随着我们的发展而变得越来越复杂。这是我个人的经历，我在学生身上也看到了这一点。下一步并不难。

作者：Tom Pedersen，机械加工工程师、博士来自布鲁内尔大学。我曾在埃尔西诺和哥本哈根的技术学院以及我目前就职的丹麦技术大学担任过项目负责人和顾问、研究员和讲师。我曾在多个科目上做过讲座，其中包括很多数学。我一直是本书中介绍的所有主题的讲师…….享受吧！

Tom Pedersen，2024 年 1 月。

第 1 部分：基础知识

数制

我们使用十进制（10s 系统）。可能是因为我们有 10 根手指。我们声明，我们的数字系统以 10 为基数。

在古代，希腊人也使用 10 的系统，他们能够计算，但他们的数字字符不同，不幸的是他们没有零字符。这使得他们的系统变得困难，并且只有少数人掌握。

罗马人也使用 10 系统，但他们仍然没有零字符。他们的字符由字母组成（例如 12 写成这样：XII）。罗马数字仍然用于指示雕像等的年份。他们找不到实用的加法和减法方法，乘法和除法变得更加复杂。

在中世纪，十进制与阿拉伯字符（最初来自印度）结合在一起，并添加了一个符号“0”来描述任何内容。今天的字符是：0 1 2 3 4 5 6 7 8 9。使用这十个字符后，我们可以通过在前面加上 1 来写出十个新数字：10，11，12，13，14，15，16，17，18，19，– 然后前面是 2：20，21，22，23，24，25，26，27，28，29 – 等。当我们达到 99 时，我们再次开始使用相同的字符，前面是 1，后面是两个之后的字符：100、101、102 等。所以，我们只使用十个字符，它们的位置决定我们是否有个、十、百、千等。现在我们已经取得了一些进展，今天我们有很好的加法工具，减法、乘法和除法（四种基本算术运算）。

如果您要练习我们数字系统中的逻辑，我建议您观看卷尺。它还适合练习四种基本算术运算。中国的计数框架也是如此。

数字可以是正数，例如+5，我们可以省略+号，只写 5。这不会被误解。

数字也可以是负数，例如 −5，我们不能省略符号：−

如果我们只想要一个数字的大小，我们可以将数字放在两个直括号之间：

$|5| = 5$ $|-5| = 5$ $|-8| = 8$

我们称之为该数字的数值。

数值 = 数字的大小

另外，让我们简要描述一下古代美索不达米亚的数字系统。尽管我们没有想到它，但它仍然在使用。他们有两个重要数字：6 和 60。尚不清楚为什么他们选择重要数字 6，但他们可能认为它太小，所以他们乘以 10（可能是由于十个手指）并得到基数： 60.

另外，让我们简要描述一下古代美索不达米亚的数字系统。尽管我们没有想到它，但它仍然在使用。他们有两个重要数字：6 和 60。尚不清楚为什么他们选择重要数字 6，但他们可能认为它太小，所以他们乘以 10（可能是由于十个手指）并得到基数： 60.

在春分时，他们规定从日出到中午有 6 小时，从中午到日落有 6 小时。夜晚同样漫长，给了我们 24 小时。

一小时是粗略的，所以我们将其除以基数 60，得到一分钟。如果我们想要更精细，我们会除以 60 一次，得到一秒。现代我们划分得更多，但这次我们使用 10 秒系统！然后我们就有十分之一、百分之一等秒。

在数学中，角度以角度来测量，表示一圈为 360°。 360 是通过两个有效数相乘得出的：$6 \cdot 60 = 360$

算术是古希腊语，意思是数字学说。

四种基本算术运算

四种基本算术运算及其计算符号是

1. 添加，加上 +

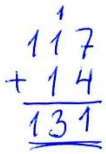
2. 减去，减去 −

3. 相乘，点 •

4. 分开，两个点 : 或分数线 —

1. 和

我们通过将数字放在另一个之上来添加。个数加个数，数十个加数十个，数百个超过数百个，等等。



首先是个位：7 + 4 给出 11，然后在结果底行我们写下个位，这里是 1，十位写在其他十位之上。

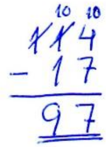
那么十位：1 + 1 + 1 给出 3 并写入结果中。

然后百位：1 + 0（数字 1 和 4 前面没有任何内容）给出 1，写入结果中。

答案：131

2. 不同之处

我们通过将数字放在一起来退出。个数加个数，数十个加数十个，数百个超过数百个，等等。



首先是：4 – 7，我们不能，所以我们借用 10 个并将其写在最上面。 10 + 4 得到 14。现在我们可以说 14 – 7 得到 7，并将其写在结果中。

然后是十位：十位中最上面的是 1，但是我们借用了它，所以现在它是 0。0 – 1 不能完成，所以我们从百位中借用十并将其写在最上面。它变成了 10，因为 100 比 10 大十倍。借用的 10 – 1 得到 9，我们把它写在结果中。

最后是百位，以前有数字 1，但由于我们借用了它，现在有 0。17 没有任何百位，所以它呈现 0 – 0 = 0，但没有写出来。

答案：97

2a.

如果我们想从一个小数中取出一个大数，会发生什么？

这是可以做到的，尽管我们没有相应的技术。所以我们翻转数字，找到大数减去小数。然后我们再次将数字翻转回来，并在结果前面加上一个减号：

$$\left.\begin{array}{r} -\;17 \\ 114 \end{array}\right\} \rightsquigarrow \left.\begin{array}{r} 114 \\ -\;17 \\ \hline 97 \end{array}\right\} \rightsquigarrow \underline{\underline{-97}}$$

答案：-97

负数也存在。没问题。例如，-97 可能意味着赤字为 97。

弯曲的箭头是一种表示某些事物发生变化的方式，意思是：转移到。

3. 产品

我们通过将两个数字并排放置并在其间放置一个点符号来将它们相乘。

首先，我们将第一个数字与第二个数字相乘，然后是十位、百位等。

然后我们将第一个数字的十位与第二个数字的十位相乘，然后十位与十位相乘，十位与百位相乘，依此类推。

等等…。

$$\begin{array}{r} 32\cdot\overset{1}{7}41 \\ \hline 1482 \\ 22230 \\ \hline \underline{\underline{23712}} \end{array}$$

2 • 1 给出 2，写在该行下方的“个位”处。
2 • 4 给出 8，写在横线下方的“十位”处。

2 · 7 给出 14 - 其中 4 写在行下方的“百位”，1 写在行下方的“千位”。

现在是第一个数字中的十位： 由于我们要乘以十位，因此我们首先在 1482 以下的个位处写入 0。然后乘以： 3 · 1 得出 3，该值写入十位处。 3 · 4 得到 12，我们写下 2 并将 1 作为一个小数字保存在 7 的上方。 3 · 7 得到 21，我们记得加上 1 得到 22，我们只是写下它，因为没有更多的东西可以相乘。最后，我们添加 1482 和 22230 来渲染 23712。

3a.

如果其中一个数字是小数点，我们就当什么都没有发生一样相乘，并在结果中与我们开始的数字相同的位置放置一个逗号/点：

32·7.41
1482
22230
237.12

如果两个数字都是小数点，我们就当作什么也没发生一样相乘，并在结果中的第一个数字的位置 + 我们开始的第二个数字的位置上放置一个逗号/点：

3.2·7.41
1482
22230
23.712

这里逗号/点后面有 1 + 2 = 3 个数字。

4. 分配

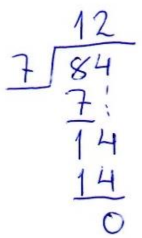
如果我们要把 84 除以 7，我们会写：

84:7　　　为了保持正文的高度。

或更好：

$\frac{84}{7}$　　　正如我们在数学中更喜欢的那样。

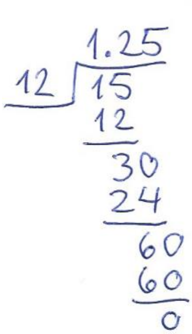
为了计算，我们这样安排：



我们有： 8 除以 7 得到 1，如上面所写。 8-7 给出 1，写在下面并得出 1 个十的盈余。现在我们将数字 4 拖到数字 1 旁边，这样它就变成了 14。14 除以 7 得到 2，如上面所写。 7•2 是 14。14 减 14 为零，所以相加，结果是 12。

4a.

有时答案不是整数：

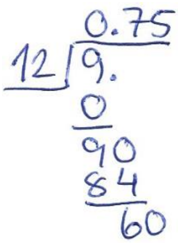


15 除以 12 得到 1，如上面所写。 1•12 给出 12。15-12 给出 3。所以 - 我们有 3 的盈余，没有更多的数字。

现在我们将 15 扩展为 15,0000（根据需要添加任意多个零）。因此，我们可以在答案中添加一个逗号/点，并将 0 拖到数字 3 旁边。然后 30 除以 12 得到 2，结果写在上面。 2•12 得到 24。30-24 是 6。拖动下一个 0，得到 60。60 除以 12 得到 5，写入结果中。 5•12 给出 60。60-60 是 0，我们就完成了。答案是 1.25。

4b.

当一个小数除以一个大数时：

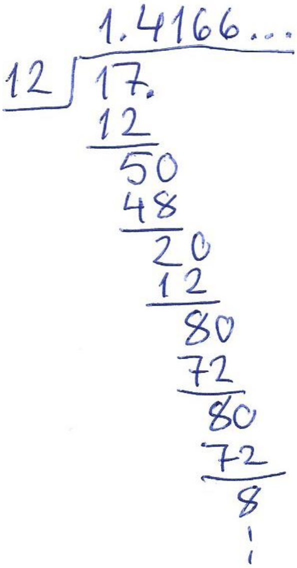


9 除以 12 可以进行 0 次，这被写在结果中。然后我们将 9 展开为 9.000。我们在结果中添加一个逗号/点并继续。

答案是 0.75。

4c.

当它不加起来时



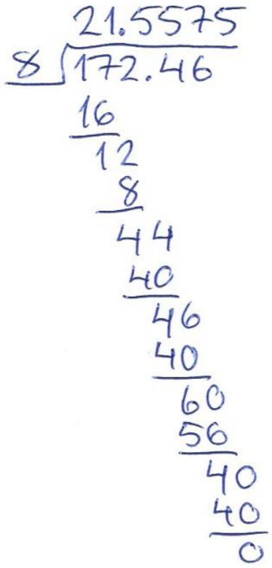
答案永远不可能准确。我们必须选择逗号/点后需要多少个数字。小数是逗号/点后面数字的技术术语。 小数的意思是“第十个数字”。答案写成 1.4166… 点表明它还在继续。

如果我们想要一个精确的数字，我们就根本不进行除法计算。我们只需保持分数不变：

$\frac{17}{12}$ 这是准确的。

4d.

如果我们用一个小数除以一个整数，当我们拖动第一个小数时，我们会在结果中添加一个逗号/点



这里的计算是累加的，因为我们以 0 结尾。所以，答案是一个精确的十进制数：21.5575

理论

最后说几句实用的话：

我们总是可以除以 1。例如，我们可以将 3 写成分数：$\frac{3}{1}$，它肯定等于 3。

我们也可以总是乘以 1。例如，我们可以将 3 写为 3 • 1，这肯定等于 3。

分数（商）

$\frac{1}{2}$ 表示 1 除以 2 或 2 中的 1 或 1 与 2 的比例。1 为分子，2 为分母。两者之间的线称为分数线。

如果我们平分一块蛋糕，我们每人得到 $\frac{1}{2}$ ，或者我们每人得到 2 块中的 1 块，或者我们按照 2 块的比例得到 1 块。

我们可以将分子和分母乘以相同的数字或字母或其他数字 - 除了 0。我们不能乘以不同的东西，因为我们仍然需要保持分子和分母之间的比例。在此示例中，分母必须是分子的两倍大

如果我们乘以 3，我们得到: $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$

如果我们乘以 -3，我们得到: $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot (-3)}{2 \cdot (-3)} = \frac{-3}{-6}$

如果我们乘以 a，我们得到: $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot a}{2 \cdot a} = \frac{1a}{2a}$

如果我们乘以$(0.1 \cdot 2 - 7)$，我们得到:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot (0.1 \cdot 2 - 7)}{2 \cdot (0.1 \cdot 2 - 7)} = \frac{1(0.1 \cdot 2 - 7)}{2(0.1 \cdot 2 - 7)}$$

在这四个例子中，我们扩展了分数。

我们也可以用相同的数字或字母或其他数字（除了 0）来划分分子和分母。

如果我们将分子和分母中的 $\frac{3}{6}$ 除以 3，我们会得到 $\frac{1}{2}$ ，然后我们就回来了。

如果我们将分子和分母中的 $\frac{1(0.1\cdot2-7)}{2(0.1\cdot2-7)}$ 除以 (0, 1 • 2 – 7)，我们会得到 $\frac{1}{2}$ ，然后我们就回来了。

我们已经缩短了分数。

____

将数字（或其他）乘以分数时，我们将数字和分子相乘。例如

$5\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ 或者 $a\cdot\frac{3}{6}=\frac{3a}{6}$

或者 $(0.1\cdot2-7)\cdot\frac{3}{6}=\frac{3\,(0.1\cdot2-7)}{6}$

当分数与分数相乘时，我们将分子与分子相乘，分母与分母相乘。例如

$\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{2}=\frac{15}{12}$ 或者 $\frac{3}{6}\cdot\frac{-5}{2}=\frac{-15}{12}$

或者 $\frac{3}{6}\cdot\frac{5(0.1\cdot2-7)}{2}=\frac{3\cdot5\cdot(0.1\cdot2-7)}{6\cdot2}=\frac{15(0.1\cdot2-7)}{12}$

用分数除以分数有点困难。例如 $\frac{1}{2}$ 除以 $\frac{1}{4}$

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$ 在这里，重要的是要以清楚地显示什么被什么除的方式来编写。一定不要误解，所以我们这样写

$\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$ 现在我们可以清楚地看到，$\frac{1}{2}$ 要除以 $\frac{1}{4}$

现在变得有点困难了。我们可以看到 $\frac{1}{2}$ 是 $\frac{1}{4}$ 的两倍，所以答案必须是 2。因此，规则说我们用一个分数除以一个分数 – 而是用一个分数乘以另一个分数的倒数。$\frac{1}{4}$ 的倒数是 $\frac{4}{1}$ 所以

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2$$

我们也可以这样看：
我们将分子和分母都乘以 4 并得到

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{4}{2}}{\frac{4}{4}} = \frac{2}{1} = 2$$

如果分子不是分数，则同样的规则适用

$$\frac{(0.1 \cdot 2 - 7)}{\frac{1}{4}} = 4(0.1 \cdot 2 - 7)$$

或者 $\frac{318.27}{\frac{1}{4}} = 4 \cdot 318.27$

例子

1.

缩短分数的目的通常是简化

$\frac{\frac{1}{2} \cdot 6}{\frac{1}{4} \cdot 8}$ 可以缩短为 $\frac{3}{2}$

$\frac{(-\frac{1}{2})\cdot 6}{\frac{1}{4}\cdot 8}$ 可以缩短为 $\frac{-3}{2}$ = - $\frac{3}{2}$

减号是在整个分子之前还是在整个分数之前并不重要。

2.

扩展分数的目的通常是希望得到某个分母以进行进一步计算，特别是当我们添加分数时

$\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$ 在这里我们需要找到一个共同点。人们总是可以通过将两个分母相乘来找到一个公分母，这里：2 • 3 = 6 ，因此我们将两个分数都改为第六个 – 之后我们将其缩短

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{5}{6}$$

3. 和一个混合

$$\frac{(-\frac{1}{2})\cdot 6}{\frac{1}{4}\cdot 8}+\frac{1}{3}=\frac{3\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 6}{3(\frac{1}{4}\cdot 8)}+\frac{1(\frac{1}{4}\cdot 8)}{3(\frac{1}{4}\cdot 8)}$$

其中，公分母是通过将两个分母相乘得出的。那么我们可以做一个公分数

$$\frac{3\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 6+1(\frac{1}{4}\cdot 8)}{3(\frac{1}{4}\cdot 8)}=\frac{(-9)+(2)}{(6)}=\frac{-7}{6}$$

在此计算中，我们将括号内的实体乘以数字。我们将在下一章中对此进行更多探讨。

百分

百分号的意思是“满分一百”， 意思是以 100 为分母的分数。

$\frac{1}{2}$ 表示 2 中的 1。如果我们将分子和分母乘以 50，我们会得到 $\frac{50}{100}$ 或 100 中的 50 或 50%。简单来说：

$$\frac{50}{100} = 50\%$$

例子

$$\frac{1}{5} = \frac{20 \cdot 1}{20 \cdot 5} = \frac{20}{100} = 20\%$$

$$\frac{1}{8} = \frac{12,5 \cdot 1}{12,5 \cdot 8} = \frac{12,5}{100} = 12,5\%$$

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$$

并作为十进制数

$$\frac{1}{2} = \frac{50 \cdot 1}{50 \cdot 2} = \frac{50}{100} = 50\% = 0,5$$

$$\frac{1}{4} = \frac{25 \cdot 1}{25 \cdot 4} = \frac{25}{100} = 25\% = 0,25$$

$$\frac{3}{4} = \frac{25 \cdot 3}{25 \cdot 4} = \frac{75}{100} = 75\% = 0,75$$

$$\frac{3}{8} = \frac{12,5 \cdot 3}{12,5 \cdot 8} = \frac{37,5}{100} = 37,5\% = 0,375$$

百分之一是百分之一。小数是一中的一个。

1 是一个整体。 100%也是一个整体。

$$1 = \frac{100}{100} = 100\%$$

2.

昨天，某件衣服售价 200 英镑。今天已经涨到 225 磅了。涨幅是多少？

200 磅对应于 100%。

上涨的是 225 – 200 = 25 磅，这必须与 200 磅成比例来看：

$\frac{25}{200} = 0.125 = 12.5\%$ 这就是答案

3.

昨天，某件衣服售价 200 英镑。今天价格已经跌至 175 英镑。降价幅度是多少？

200 磅对应于 100%。

减重是 200 – 175 = 25 磅，必须与 200 磅成比例来看：

$\frac{25}{200} = 0.125 = 12.5\%$ 这就是答案

该信息可以表示为：今天这件衣服的 -12.5%。

4.

某台机器的价格是 1000 英镑，不含增值税。

1000 磅相当于 100%。含 25% 增值税的价格为：

$1.25 \cdot 1000 = 1250$ 磅 这就是答案

或者

$100\% + 25\% = 1000 + 0.25 \cdot 1000 = 1250$ 磅

5.

另一台机器售价 1000 英镑（含增值税）。

1000 磅现在相当于 125%。不含 25% 增值税的价格为：

$\frac{1000}{1.25}$ = 800 磅　　　　　　　　　　　　这就是答案

我们可以通过说来确认

100% + 25% = 800 + 0.25·800 = 1000 磅

6.

347 占 376 的百分比是多少？

$\frac{347}{376}$ = 约 0.9229 = 约 92.3%

百分点

如果我们在 3 月份织了整条毯子的 20%，在 4 月份织了整条毯子的 25%，我们就增加了 5 个百分点（5% 点）。

或者：变化 = 结束 - 开始 = 25% - 20% = 5%点

或者：$\frac{25}{100} - \frac{20}{100} = \frac{5}{100}$ = 5%点

因此，百分比表示变化/差异/增加或减少。

+5% 点是增加/增长。

−5% 点是减少/下降。

用字母计算（代数）

如果我们不知道某物的数量，我们称其为未知量并写一封信。那就是代数。

所有的计算规则都是相同的。这适用于四种基本算术运算以及其他类型的计算，我们稍后会介绍。

技术术语“代数”源自拉丁语。

许多技术术语来自拉丁语或古希腊语，无论我们使用哪种语言，它们都是大多数科学中的通用语言。此外，许多技术术语都是英语，许多人都能理解和使用。

对于未知数量，我们使用字母表中的小写字母（a、b、c 等）和大写字母（D、E、F 等）。但通常这还不够，所以我们还使用古希腊语中的小字母（α、β、γ 等）和大写字母（Δ、θ、Σ 等）。它可以是一条线、一个角度或其他的名称。

我们也可以使用字母作为缩写。我们稍后会看到。

例子

1.

$a + a = 2a$	$\alpha + 2\alpha = 3\alpha$	$-\alpha + 2\alpha = \alpha$
$2 \cdot a = 2a$	$a \cdot b = ab$	$a \cdot b \cdot c = abc$

如果不被误解的话，我们可以省略乘法点。我们喜欢简单地做事。

2.

A + B

不能减少，因为 A 可能是苹果的数量，B 可能是梨的数量。这是无法改变的，所以答案仍然是

A + B

和

B - c = B - c $\qquad \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \qquad - \frac{3a}{2b} = - \frac{3a}{2b}$

等等。

3.

$$- \frac{3a}{4b} + \frac{3a-c+2\cdot a}{2b} = - \frac{3a}{4b} + \frac{5a-c}{2b} = - \frac{3a}{4b} + \frac{2\cdot(5a-c)}{2\cdot 2b} = \frac{-3a+10a-2c}{4b}$$

$= \frac{7a-2c}{4b}$ 这是无法简化的。

4.

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot 6\cdot a}{\frac{1}{4}\cdot 8a} = \frac{3\cdot a}{2\cdot a} = \frac{3}{2}$$

5.

$$\frac{(-\frac{1}{2})\cdot 6\cdot a}{\frac{1}{4}\cdot 8b} = \frac{-3a}{2b} = - \frac{3a}{2b}$$

6.

$\frac{4x-8y}{2}$

可以分成两个分数，其中 4x 和 −8y 都必须除以 2：

$\frac{4x-8y}{2} = \frac{4x}{2} - \frac{8y}{2} = 2x - 4y$

7.

$3x - 3y + \frac{4x-8y}{4}$

分数很麻烦，因为我们希望单独有 x 和 y。我们把分数分成两部分

$3x - 3y + \frac{4x}{4} - \frac{8y}{4}$

8y 之前的减号移到分数的前面。我们可以这样做，因为分子中除了 8y 之外没有其他任何东西。

$3x - 3y + x - 2y = 4x - 5y$

单独的 x 和单独的 y。进一步减少是不可能的。

插入语

我们在想要将其视为一个的东西周围加上括号， – 一个数字， – 一个实体。

例子

1.

4(x + y) 这里 (x + y) 为 1， 要乘以 4。

2.

(x + y) + 4 这里 (x + y) 为 1 加 4。

3.

4 - (x + y) 这里 (x + y) 是从 4 中减去 1。

4.

$$\frac{4}{(x+y)}$$

这里 4 除以 （x + y）。 （x + y） 无法分离。

5.

$$\frac{(x+y)}{4}$$

这里(x + y)要被 4 除，并且可以被分割，使得 x 单独除以 4 – y 单独除以 4。因此，两个分数

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4}$$

如果我们想要解除括号，我们必须确保含义不变，并且您可以向后计算以获得开始的表达式。

6.

$4(x + y) = 4x + 4y$ 4 通过分别乘以 x 和 y 来乘入括号。

如果我们从右向左向后计算，我们将 4 放在括号之外。

7.

$(x + y) + 4$ 这里括号前有一个不可见的+。数学家几乎总是把东西写得简短，所以 $(x + y)$ 被理解为
$+(x + y)$。加号括号可以取消，无需进一步更改
$(x + y) + 4 = x + y + 4$
我们还可以通过添加我们想要的任何括号从右到左进行计算。

8.

如果括号内的实体为负，则写为 $-(x + y)$。所以，当我们去掉括号时，x 和 y 都是负数

$4 - (x + y) = 4 - x - y$

如果我们从右到左计算，我们在括号外加上-1。再次强调，我们希望简短一点，只在括号前写上 - 。这不能被误解。

$-1 \cdot (x + y) = -1(x + y) = -(x + y)$

9.

$\frac{4}{(x+y)}$

这里 4 除以（x + y）。（x + y）无法分离。括号可以被删除，它不会改变任何东西，4 仍然要除以总和 x+y

$$\frac{4}{(x+y)} = \frac{4}{x+y}$$

10.

$$\frac{(x+y)}{4}$$

这里(x + y)要被 4 除，并且可以被分割，使得 x 单独除以 4 - y 单独除以 4。因此，两个分数

$\frac{x}{4} + \frac{y}{4}$ 同时，括号被解除

我们可以通过做一个公分数来倒推。

CAS 没有像人类那样区分必要或不必要的括号的能力。因此，我们在使用 CAS 的时候可能需要多放一些括号。

平方规则（非凡的身份）

首先是如何将括号中的实体相乘的几个示例：

$(2 + a)\cdot(3 + 2a) = 6 + 4a + 3a + 2aa = 6 + 7a + 2aa$

我们将 2 乘以 3，然后将 2 乘以 2a，将 a 乘以 3，最后将 a 乘以 2a。最终我们减少了。

$(2 + a)(3 + 2a + b) = 6 + 4a + 2b + 3a + 2aa + ab$

方法是一样的。首先我们将 2 乘以 3、乘以 2a、乘以 b，然后将 a 乘以 3、乘以 2a、乘以 b。

和

$(2 - a)(3 - 2a - b) = 6 - 4a - 2b - 3a + 2aa + ab$ 记住标志

加倍加给加
加乘减得到减
负数乘以正数得到负数
减乘以减得到加。

2aa 也可以这样写：$2aa = 2a^2$ 我们说“两次 – a 的 2 次方”

或者 $b \cdot b = bb = b^2$ b 的 2 次方（或：b 平方）

现在是平方规则（非凡的恒等式）：

1. $(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

2. $(a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

3. $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

在第一个定理中，(a + b) 是平方的，我们写成 $(a+b)^2$。在第二个定理中，(a - b) 是平方的，我们写成 $(a-b)^2$。在第三定理中，符号不同，所以这不是平方。

简短的版本是

1. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

2. $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

这些定理被大量使用。

例子

$$\frac{4a^2-9}{4a^2+9-12a} = \frac{(2a+3)(2a-3)}{(2a-3)^2} = \frac{2a+3}{2a-3}$$

$$\frac{3b^2+12-12b}{5b^2-10b} = \frac{3(b^2+4-4b)}{5b^2-10b} = \frac{3(b-2)^2}{5b(b-2)} = \frac{3(b-2)}{5b}$$

和长期减少：

$$\frac{3}{ab-b^2} + \frac{3}{a^2+ab} - \frac{6}{a^2-b^2} =$$

$$\frac{3}{b(a-b)} + \frac{3}{a(a+b)} - \frac{6}{(a+b)(a-b)} =$$ b 推出，a 推出，定理 3

$$\frac{3(a+b)}{b(a+b)(a-b)} + \frac{3(a-b)}{a(a+b)(a-b)} - \frac{6}{(a+b)(a-b)} =$$ 延长了，延长了，什么也没有

$$\frac{\frac{3}{b}(a+b)}{(a+b)(a-b)} + \frac{\frac{3}{a}(a-b)}{(a+b)(a-b)} - \frac{6}{(a+b)(a-b)} =$$ b 感动了，a 感动了，什么也没有

$$\frac{\frac{3a}{b}+3+3-\frac{3b}{a}-6}{(a+b)(a-b)} = \frac{\frac{3a}{b}-\frac{3b}{a}}{(a+b)(a-b)} = \frac{\frac{3a^2}{ab}-\frac{3b^2}{ab}}{(a+b)(a-b)} = \frac{3a^2-3b^2}{ab(a^2-b^2)} = \frac{3}{ab}$$

平方根

如果我们有一个数字，例如 4，我们可以找到平方后为 4 的正数。也就是 2。我们说 4 的平方根是 2，我们写 $\sqrt{4} = 2$

更进一步：如果我们有一个数字，例如 8，我们可以找到 8 的 3 次方的正数。即 2。我们说 8 的三次方根是 2，我们写

$\sqrt[3]{8} = 2$

16 的第四次方根是 2

$\sqrt[4]{16} = 2$

平方根等也可以用另一种方式写，我们将在下一章“求幂”中看到。

例子

1.

$\sqrt{16 \cdot 4} = \sqrt{64} = 8$

或者

$\sqrt{16} \cdot \sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8$

所以

$\sqrt{16 \cdot 4} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{4}$

2.

$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \frac{4}{2} = 2$

 公司: WorldMathBook cvr. 44731703 丹麦 ISBN 978-87-975307-4-0

或者

$$\sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$$

所以

$$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}}$$

或者用字母

3.

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

4.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

5.

$$\frac{\sqrt{16a}}{\sqrt{25b}} = \frac{4\sqrt{a}}{5\sqrt{b}}$$

求幂

有一种更短的写法：a 乘以 a

$a \cdot a = aa = a^2$

a 是底数，2 称为指数，a^2 合起来就是：a 的 2 次方。

更多示例

$aaaaaaaaaaaaa = a^{13}$　　　　$bbbb = b^4$

或以数字表示：

$7{\cdot}7{\cdot}7{\cdot}7{\cdot}7{\cdot}7 = 7^6$　　　　$9{\cdot}9{\cdot}9 = 9^3$

对于字母我们可以省略乘号，它不会被误解。然而，对于数字我们不能省略符号，因为 999 意味着九百九十九。

特别重要且广泛使用的是 10 的幂：

$10{\cdot}10{\cdot}10 = 10^3$　　$10{\cdot}10{\cdot}10{\cdot}10 = 10^4$　　等等

使用指数有三个优点：它们非常适合非常大和非常小的数字，它们更容易计算（一旦习惯了），并且它们在微分和积分中几乎是不可或缺的，正如我们将要讨论的那样稍后见

如果我们有一个像这样的分数 $\frac{10\cdot10\cdot10}{1}$ ，−我们可以写 $\frac{10^3}{1} = 10^3$

3 之前有一个 +。因此 $10^{+3} = 10^3$

如果我们有一个像这样的分数 $\frac{1}{10\cdot10\cdot10}$ ，−我们可以写 $\frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

这里的减号表明 10^3 位于分母中。

指数前的 + 表示位置：分子，指数前的 − 表示位置：分母。

现在，我们可以写成不是一千

$1000 \quad = \quad 10^3$

我们可以写成一百万而不是一百万

$1\ 000\ 000 \quad = \quad 10^6$

阿伏伽德罗常数（物理、化学）约为： $6 \cdot 10^{23}$

普朗克常数（物理）约为： $6,63 \cdot 10^{-34}$

如果不使用幂运算，这些数字写起来会非常乏味。

例子

1.

$10^2 \cdot \mathit{10}^{\mathit{3}} = 10 \cdot 10 \cdot \mathit{10} \cdot \mathit{10} \cdot \mathit{10} = 10^5$

我们可以通过添加指数来计算这个

$10^2 \cdot 10^3 = 10^5$

2.

$$\frac{1}{10^2 \cdot 10^3} = \frac{1}{10^5} = \frac{10^{-5}}{1} = 10^{-5}$$

我们可以通过将分母中的指数相加来计算，然后将幂数移至分子，并在指数前加一个减号。

3.

$$\frac{10^4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^5}{10^2 \cdot 10^3} = 10^2 = 100$$

分子中的指数： 4-2+5 = 7

分母中的指数： 2+3 = 5 向上移动 -5

指数的计算： 7-5 = 2 这意味着 $10^2 = 100$.

4.

$10^{½} \cdot 10^{½} = 10^1 = 10$ 指数 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

但是哇！ $\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 10$ 还给出 10

所以 $10^{½} = \sqrt{10}$

我们说，10 升到 1/2 与 10 的平方根相同。因此，与其写 $\sqrt{10}$ ，不如写 $10^{½}$ 。

如前所述，这通常是一个优势。

5.

现在是棘手的一个：

$10^0 = 1$

从分数中的指数我们可以看出：

$\frac{10^1}{10^1} = 10^{1-1} = 10^0 = 1$

分子中的指数： 1

分母中的指数：　1　　向上移动　−1

指数的计算：　1−1 ＝ 0

所以，10^0 必须等于 1。

6.

$(10^2)^3 = 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 10^6 = 10^{2\cdot 3}$

7.

$(2 \cdot 3)^4 = 6^4 = 1296$

$2^4 \cdot 3^4 = 16 \cdot 81 = 1296$

所以

$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$

8.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{16}{81}$$

$$\frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

所以

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$$

或者用字母表示：

9.

$a^2 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$

10.

$\frac{1}{b^2 \cdot b^3} = \frac{1}{b^5} = \frac{b^{-5}}{1} = b^{-5}$

11.

$\frac{x^4 \cdot x^{-3} \cdot x^5}{x^2 \cdot x^3} = x^1 = x$

12.

$y^{½} \cdot y^{½} = y^1 = y$

13.

$a^0 = \frac{a^1}{a^1} = 1$ $\qquad$ $x^0 = \frac{x^1}{x^1} = 1$ $\qquad$ $1764^0 = 1$

或是漫长的路

$a^0 = a^{(1-1)} = a^1 \cdot a^{-1} = \frac{a^1}{a^1} = 1$

或者为了好玩

$a^0 = a^{(2-2)} = a^2 \cdot a^{-2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$

$a^0 = a^{(x-x)} = a^x \cdot a^{-x} = \frac{a^x}{a^x} = 1$

14.

$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^6 = a^{2 \cdot 3}$

$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

15.

$(a \cdot b)^4 = a^4 \cdot b^4$

$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$

16.

$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

17.

8 的三次方根作为幂：	$\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$
可以看出	$8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} = 8^1 = 8$
16 的第四次方根：	$\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$
可以看出	$16^{\frac{1}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 16^1 = 16$

方程

等式表示等号（=）左边的内容等于等号右边的内容。如果满足这一点，则方程为真。

我们需要方程来找到一个或多个未知量。这种情况经常发生。

例如，我的工资取决于我的工作时间。我们可以用一个等式来表示：

工资=时薪乘工作小时数

或来自物理学，牛顿第二定律：

力 = 质量乘以加速度

带符号

$F = m \cdot a$

如果我们知道质量和加速度的数字，我们可以将它们相乘并找到力。

到处都需要方程。

让我们从一个未知数（在数学中通常称为 x）和一些已知数开始。例如

$x + 3 = 5$

很容易看出 $x = 2$。

如果我们有 x^1（等于 x），我们就讨论一次方程。
如果我们有 x^2，我们就讨论二阶方程。
如果我们有 x^3，我们就讨论三次方程。
如果我们有 x^4，我们就讨论四次方程。
等等。

大多数情况下，我们需要求解一次方程。我们还有很多二次方程，而三次方程很少见，四次方程则极其罕见。

这与我们只有安全的方法来求解一次和二次方程的事实相符。高次方程只能通过特殊方法（稍后介绍）或 CAS 来求解。

在等式中

- 我们可以在等式两边乘以相同的数字（或字母或其他），但 0 除外。
- 我们可以在等式两边除以相同的数字（或字母或其他），但 0 除外。
- 我们可以在等式两边添加相同的数字（或字母或其他）。
- 我们可以在等式两边提取相同的数字（或字母或其他）。

至关重要的是，左边的东西等于右边的东西。这四项规则确保维持平等。

请记住，当我们乘、除、加或减时，必须是整个左侧和整个右侧。

例子

1.

$x + 3 = 5$

乘以 2:	$2(x + 3) = 2 \cdot 5$
乘以 a:	$a(x + 3) = a \cdot 5$

2.

$x + 3 = 5$

被除以 2:	$\frac{x+3}{2} = \frac{5}{2}$
被除以 a:	$\frac{x+3}{a} = \frac{5}{a}$

3.

$x + 3 = 5$

添加 2:	$(x + 3) + 2 = 5 + 2$
添加 a:	$(x + 3) + a = 5 + a$

4.

$x + 3 = 5$

减去 2:	$(x + 3) - 2 = 5 - 2$
减去 a:	$(x + 3) - a = 5 - a$

使用这四个规则，我们可以求解 x（使其独立）。我们一步一步地这样做。为了继续下去，我们需要一个新的标志：

⇔ 意思是“逻辑等价”、同义或相同。双箭头表明，无论向前或向后计算，该方程都是有效的。

5.

$x + 3 = 5 \quad \Leftrightarrow$

$(x + 3) - 3 = 5 - 3 \quad \Leftrightarrow$

$x + 3 - 3 = 5 - 3 \quad \Leftrightarrow$

$x = 2$

这里我们向前计算。我们还可以反推：

$x = 2 \quad \Leftrightarrow$

$x + 3 - 3 = 5 - 3 \quad \Leftrightarrow$

$(x + 3) - 3 = 5 - 3 \quad \Leftrightarrow$

$x + 3 = 5$

让我们在新的例子中再次看看这四个计算规则：

6.

$\frac{x}{3} = 2$

这里我们可以两边都乘以 3

$\frac{x}{3} = 2 \quad \Leftrightarrow$

$3 \cdot \frac{x}{3} = 3 \cdot 2 \quad \Leftrightarrow$

$x = 6$

但我们不妨说，左边分母中的 3 可以移到右边的分子

$\frac{x}{3} = 2 \quad \Leftrightarrow$

$x = 3 \cdot 2 \quad \Leftrightarrow$

$x = 6$

哪个更快。

7.

$3 \cdot x = 6$

我们两边都除以 3

$3 \cdot x = 6 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \quad \Leftrightarrow$

$x = 2$

但我们不妨说，左侧分子中的 3 可以移至右侧分母

$3 \cdot x = 6 \quad \Leftrightarrow$

$x = \frac{6}{3} \quad \Leftrightarrow$

$x = 2$

哪个更快。

8.

$x - 3 = 5$

我们可以两边加 3

$x - 3 = 5 \quad \Leftrightarrow$

$x - 3 + 3 = 5 + 3 \quad \Leftrightarrow$

$x = 8$

但我们不妨说，左侧带有减号的 3 可以移动到右侧带有加号的位置

$x - 3 = 5 \quad \Leftrightarrow$

$x = 5 + 3 \quad \Leftrightarrow$

$x = 8$

哪个更快。

9.

$x + 3 = 5$

我们可以两边都减 3

$x + 3 = 5 \quad \Leftrightarrow$

$(x + 3) - 3 = 5 - 3 \quad \Leftrightarrow$

$x = 2$

但我们不妨说，3，左边有一个加号，可以移动到右边有一个减号

$x + 3 = 5 \quad \Leftrightarrow$

$x = 5 - 3 \quad \Leftrightarrow$

$x = 2$

哪个更快。

10.

$\frac{2}{x} = 4$ 和 x ≠ 0

这里我们必须补充一点，x 不能为 0–，因为我们不能除以零。符号 ≠ 表示“不等于”或“不同于”。

问题正文中很少提到 x≠0，所以我们必须自己找出答案。尤其重要的是，如果我们进一步计算得出 x 等于 0。那就不能使用，并且会出现“无解”。

不过这里没有问题

$2 = 4 \cdot x \quad \Leftrightarrow$

$x = \frac{2}{4} \quad \Leftrightarrow$

$x = \frac{1}{2}$

11.

最终得到一个包含许多运算的方程

$\frac{x}{3} - 2x + 4 - \frac{2}{3} = 6 + \frac{6}{5} - x$

我们在左侧收集 x，在右侧收集数字

$\frac{x}{3} - 2x + x = 6 + \frac{6}{5} - 4 + \frac{2}{3}$

减少

$\frac{x}{3} - x = 2 + \frac{6}{5} + \frac{2}{3}$

找到共同点

$\frac{x}{3}$ - $\frac{3x}{3}$ $=$ $\frac{15 \cdot 2}{15} + \frac{3 \cdot 6}{3 \cdot 5} + \frac{5 \cdot 2}{5 \cdot 3}$ ⇔

$\frac{x-3x}{3} = \frac{30+18+10}{15}$ ⇔

$\frac{-2x}{3} = \frac{58}{15}$ ⇔

$15 \cdot (-2x) = 3 \cdot 58$ ⇔

$-30x = 174$ ⇔

$x = \frac{174}{-30}$ ⇔

$x = -\frac{87}{15}$ 这是准确的答案。或者

$x = -5{,}8$ 作为十进制数，此处相加。

二阶方程

当未知数或变量（这里称为 x）平方时，我们有一个二阶方程。例如

$x^2 - x = 0$

或者

$3x^2 - x = -3x + 1$

如果我们像这样重新排列

$3x^2 + 2x - 1 = 0$

并使用字母代替数字

$ax^2 + bx + c = 0$

我们可以使用这个公式求解 x

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

有时我们可能会找到更快的方法，但这个公式总是有效的。

例子

根据我们的数字，计算结果是

$3x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} \quad \Leftrightarrow$$

$x = \frac{-2 \pm 4}{6}$ ⇔

x = $\frac{2}{6}$ = $\frac{1}{3}$ 和 x = $\frac{-6}{6}$ = -1

产生两个解决方案：$\frac{1}{3}$ 和 -1

这是新的，但我们可以将这两个值插入到原始方程中来发现它是正确的。

首先我们插入$\frac{1}{3}$ 来渲染

$3(\frac{1}{3})^2 + 2(\frac{1}{3}) - 1 = 0$ ⇔

$3(\frac{1}{9}) + 2(\frac{1}{3}) - \frac{3}{3} = 0$ ⇔

$\frac{3}{9} + \frac{2}{3} - \frac{3}{3} = 0$ ⇔

$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{3}{3} = 0$ ⇔

0 = 0

这是真的

然后我们插入 −1 来渲染

$3(-1)^2 + 2(-1) - 1 = 0$ ⇔

$3 \cdot 1 + 2(-1) - 1 = 0$ ⇔

3 - 2 - 1 = 0 ⇔

0 = 0

这也是事实。所以是的，对于 x 的值，我们有两个有效的答案，两个解决方案。我们还说方程有两个“根”。

例如如果我们发现

$2 = 0$

它显然是“假”，因此我们测试的数字不是根，–意思是：它不满足方程。

证明

大多数人只是使用解决方案公式，但这里提出它是正确的。事实上，证明相当复杂：

我们已经排列了二次方程，所以它看起来像这样

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Leftrightarrow$

我们两边都乘以 4a

$4a\,(ax^2 + bx + c) = 0 \qquad \Leftrightarrow$

将 4a 乘入括号

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \qquad \Leftrightarrow$

在两边添加 b^2

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2 \qquad \Leftrightarrow$

移动 4ac

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \qquad \Leftrightarrow$

在左侧使用显着的恒等式之一（方形规则）

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \qquad \Leftrightarrow$

计算两边的平方根。

然而，这里我们需要进行干预：如果我们看一下左侧（2ax + b）可能源自负数，在平方时变为正数（负乘以负得到正）。这是看不到的，所以我们不得不说（2ax + b）可能是负数，也可能是正数。我们写下±并将其移动到等式的右侧。这是允许的，因为左侧等于右侧：

2ax + b = $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ ⇔

移动 b

2ax = -b $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ ⇔

两边除以 2a

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

并证明了公式。

更多理论

如果我们再看一下公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

我们可以关注平方根实体

$b^2 - 4ac$

并将其称为判别式 d

d = $b^2 - 4ac$

判别式的意思是“做出改变的那个”。有什么区别？显示二阶方程是否有两个、一个或无解的差异：

d = 积极的	两个解（两个根）
d = 0	一种解（一根根）
d = 消极的	无解（无根）

我们无法计算负数的平方根。

“无解”实际上具有几何意义，我们将在后面有关抛物线的章节中看到。

例子

如果二次方程没有常数部分（没有 c），我们可以使用零解：

$4x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(4x - 1) = 0$

其中 x 必须为 0，或者括号必须为 0。 =>

$x = 0$ 或者 $x = \frac{1}{4}$

高次方程

对于一次方程，我们可能有最多一个解。

对于二次方程，我们最多可能有两个解。

对于三次方程，我们最多可能有三个解。

对于四次方程，我们最多可能有四个解。

等等。

在一次方程中，我们通过使其独立位于方程左侧来求解 x。

在二次方程中，我们排列并使用公式来求 x。

在三次方程及更高次方程中，我们猜测一个解，将其插入方程中，看看它是否正确。我们可能会猜测，这可能看起来很奇怪，但如果测试猜测的值，这在数学上是很好的。

我们经常会使用 CAS。 CAS 中的电子设备和我们一样。它进行猜测并测试它，检查错误有多大，做出新的更接近的猜测，等等。该方法称为迭代（重复）。 CAS 的速度很快，但一般来说，我们也可以在 3-4 次猜测后接近结果。

例子

$x^3 = 27$

我们猜

$x = 3$ 并进行测试 $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

这是真的。所以 - 3 是一种解决方案。

−3 呢？我们做一个测试

$(-3)^3 = -3 \cdot -3 \cdot -3 = -27$

这是错误的。 −3 没有解决方案。

我们找不到其他根源。大于 3 的数字永远不可能是解，并且很容易测试 −3 和 3 之间的数字。因此，在这种情况下，我们确信除了 3 之外没有其他根。

但是关于：

$x^3 - x^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow$

如果我们写的话也许会变得更清楚

$x^3 = x^2$

我们猜是 0，是的。我们猜测 3，不是。我们猜 2，不。我们猜 1，是的。也许−1：

$(-1)^3 = 1^3$

$-1 = 1$

这是错误的，所以，不。

理论上，三个根是可能的，但很容易看出大于数字 1（|1|）的根是不可能的。此外，很容易看出小于数字 1（|1|）的根是不可能的。只有 x = 0 和 x = 1 才是根。

具有两个未知数的两个方程

如果我们有两个未知数，我们需要两个不同的方程。

如果我们有三个未知数，我们需要三个不同的方程。

等等。

求解具有两个未知数的两个方程有两种方法。

最符合逻辑的方法是在一个方程中分离出来，然后插入到另一个方程中。这种方法广泛用于所有科目。

简单情况下最快的方法是等系数法。

例子

让我们假设我们在实验室中，并以两种不同的方式测量某些东西，从而得到两个不同的方程。这里我们将未知数称为 x 和 y，但它们可能代表压力和温度，或者时间和细菌数量，或者其他东西。我们假装我们已经找到了这两种关系：

$x + y = 4$ 和 $2x = 2y + 2$

1.

$x + y = 4$ 和 $2x = 2y + 2$

我们分离第一个方程中的 x 并将其插入到另一个方程中

$x = 4 - y$ 插入 $2(4 - y) = 2y + 2$

继续等式 2

$2(4 - y) = 2y + 2 \quad \Leftrightarrow$

$8 - 2y = 2y + 2 \quad \Leftrightarrow$

$6 = 4y \quad \Leftrightarrow$

$y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

我们将其插入到原始方程之一中，无论是哪个。我们选择将其代入方程 1：

$x + \frac{3}{2} = 4 \quad \Leftrightarrow$

$x + \frac{3}{2} = \frac{8}{2}$

$x = \frac{5}{2}$

完整答案 $x = \frac{5}{2}$ 和 $y = \frac{3}{2}$.

2.

用等系数法解决同样的问题：

$x + y = 4$

$2x = 2y + 2$

这里如果我们把 x 写在 x 上面，y 写在 y 上面会更容易：

$x + y = 4$

$2x - 2y = 2$

现在我们在 x 之前选择相等的系数，因此我们将方程 1 乘以 2：

$2x + 2y = 8$

$2x - 2y = 2$

然后我们说方程 1 减去方程 2。

2x – 2x 给出 0，2y – (–2y) 给出 4y，8 – 2 给出 6：

$4y = 6 \quad \Leftrightarrow$

$y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

将其插入到原始方程之一中。我们选择式 2：

$2x = 2 \cdot \frac{3}{2} + 2 \quad \Leftrightarrow$

$2x = 5 \quad \Leftrightarrow$

$x = \frac{5}{2}$

完整答案 $x = \frac{5}{2}$ 和 $y = \frac{3}{2}$

当然，和以前一样。

为什么允许用一个方程减去另一个方程？因为我们可能会在两边减去相同的实体。在左边我们减去(2x – 2y)，右边也必须做同样的事情，只是我们选择减去(2x – 2y)等于什么，即2。

功能和比例

函数是一个技术术语，当某事物依赖于其他事物时使用。函数被写成方程，函数流程可以用图表显示。有关此内容的更多信息，请参见第 2 部分。

例如，我的薪水取决于我工作的时间。我们可以把它写成一个等式：

工资=时薪乘以工作时间

换句话说，我的工资是我的时薪和工作时间的函数。

或者来自物理学，牛顿第二定律：

力 = 质量乘以加速度

带符号

$F = m \cdot a$

力取决于质量和加速度。或者：力是质量和加速度的函数。

让我们再次看看函数/自然法则，牛顿第二定律：

$$F = m \cdot a \quad (1) \qquad \Leftrightarrow \qquad a = F \cdot \frac{1}{m} \quad (2)$$

表达式（1）表明，如果质量增加两倍，则力也会增加两倍。我们指出 F 和 m 成正比。此外，F 与 a 也成正比。

（因此，如果 m 和 a 都加倍，F 将是原来的四倍）。

表达式（2）表明，如果质量加倍，加速度将减半。我们指出 a 和 m 成反比。

区间和不等式

我们需要一张长工作台，长度必须大于 3 米，短于 4 米。如果正好是 3 米，那就有点太短了，——如果正好是 4 米，那就有点太长了。我们需要一个区间表

]3;4[　　　（我们知道它是以米为单位，但我们不写它）。

3 不包括在内，4 也不包括在内。开区间。

如果 3 米和 4 米可用，我们可以在中间使用一张桌子

[3;4]

3 包含在内，4 也包含在内。一个闭区间。

如果 3 米可以用但 4 米有点太长

[3;4[

包括 3，但不包括 4。半开（半开）区间。

它也可以写成双重不等式：

$3 <$ 长度 < 4　对应于区间　]3;4[

$3 \leq$ 长度 ≤ 4　对应于区间　[3;4]

$3 \leq$ 长度 < 4　对应于区间　[3;4[

或以小图表示

○————○　　　　开区间

•————•　　　　闭区间

•————○　　　　半开区间

3　　　4

例子

最简单的方法是写一个区间或画一个小草图。

不平等并不常见，但让我们看看这些迹象意味着什么：

< 表示小于

⩽ 表示小于或等于

> 表示大于

⩾ 表示大于或等于

小部分放置在标志点旁边。大部分位于标志的“口”处。

而不是写作

3 < 长度 < 4

我们可以写

4 > 长度 > 3

如果 x 是长度并且限制是 a 和 b，我们写

$a < x < b$ 双重不等式

我们很少用它来进行进一步的计算。分成两个单一的不等式会更舒服

$a < x$ 且 $x < b$

并对每一项进行计算。我们可能会：

在两侧添加相同的内容

两边减去相同的数

两边乘以相同的正数

两边除以相同的正数

如果我们将两边乘以或除以相同的负数，我们必须扭转不等号，因为我们把事情“颠倒了”。一个例子：

$a < x$ a 较小，x 较大

例如，如果我们在两边乘以 -2，我们必须转动符号：

$-2a > (-2)x$

因为现在 -2a 大而 -2x 小。

如果我们回到表格的例子并只考虑下限：

3 < 长度

例如在两边添加 2 是没有意义的：

3 + 2 < 长度 + 2

但是，它被允许作为计算工具，稍后我们将看到它以这种方式使用。

虚数，简要

虚数不是真实的，而是必须想象的。

是什么意思？

$\sqrt{64} = 8$ 众所周知

$\sqrt{-64}$ 无法做到，但如果我们稍微改变一下：

$\sqrt{-64} = \sqrt{(-1)\cdot 64} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{64}$ 没关系

$\sqrt{(-1)}$ 我们命名为 I，这也是允许的，然后我们有

$\mathrm{I}\cdot\sqrt{64} = \mathrm{I}\cdot 8$

所以 $\sqrt{-64} = \mathrm{I}\cdot 8$

这使我们能够像什么都没发生一样继续下去；只是现在，我们还处于虚数的世界。例如，突然我们有了一个“无解”的二阶方程的虚解。

CAS 获得实解和虚解。大多数 CAS（通常是计算器）被编程为仅给出真实答案。然而，有些程序也会给出一个虚构的答案，例如 I • 8。这可以通过询问“真实域”等来避免。

例子

让我们找到没有实根的二阶方程的虚根：

$x^2 + 2x + 5 = 0$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}$ $\Leftrightarrow$ 负判别式，没有实根

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{-2 \pm 4\sqrt{-1}}{2}$ $\Leftrightarrow$

$x = -1 + 2\sqrt{-1}$ 和 $x = -1 - 2\sqrt{-1}$ 或者

$x = -1 + 2\,\mathrm{I}$ 和 $x = -1 - 2\,\mathrm{I}$

因此有两个虚根。

实数和虚数的组合使用称为复数。复数可以作为一种数学工具，并将在本书末尾再次描述。

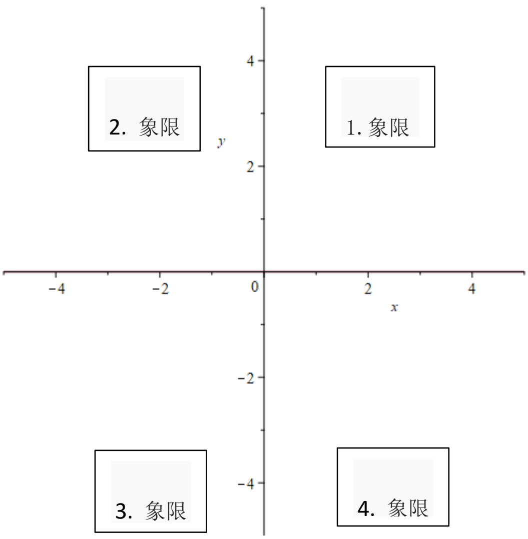
第 2 部分. 平面（2D）坐标系和函数

坐标系和距离

我们生活在一个三维世界，我们称之为空间，它由长、宽、高组成。

如果我们在二维中工作，我们称之为平面，它由两个方向组成，例如水平和垂直。我们也可以将方向称为轴。然后我们有第一轴和第二轴；或者用更专业的术语来说：横坐标和纵坐标，都来自拉丁语。横坐标的意思是“从这里（cis）出去（ab）”，可以通过站在起点水平观看地平线来描绘。纵坐标表示普通，它是垂直的（所有其他方向都不是普通的）。

在数学中，我们经常使用 x 轴和 y 轴这两个词，



但它们可以被称为其他东西。在物理学中，第一个轴可以是代表时间的 t，第二个轴可以是代表速度的 v（拉丁语中的 velox）。在经济中，第一个轴可能是几个月，第二个轴可能是成本。等等。

轴线将平面分为四个部分，称为四个象限。第一象限是 x 和 y 为正（均为 +）的位置。然后我们逆时针旋转到 2、3、4 象限。

该轴形成直角并相交于一个共同的起点，如下所示：（x,y）=（0,0）。起点称为 Origo（古希腊语）或简称 O。

在轴上，我们选择了适合该任务的比例。通常，我们为两个轴选择相同的比例，但这取决于我们要绘制的内容。如果尺度相似，我们使用技术术语：等距。

总之，它被称为坐标系（与普通的系统）。它正在被到处使用。

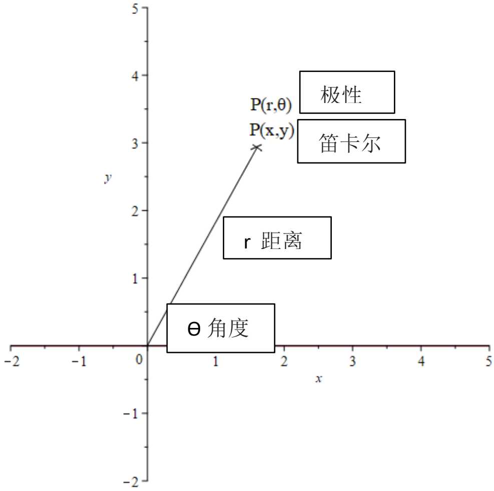
例如，坐标系用于显示函数如何变化：直线函数、抛物线函数、正弦函数等。

我们首先考虑 x，然后考虑 y，如下所示。因此，函数的 x 值也称为域，y 值称为范围（有时：值的量）。符号并不常用，因为域和范围这两个词足够简短且信息丰富，但如果我们将函数称为 f，则符号为：域 D(f) - 和范围 G(f)。（R(f) 表示范围是合乎逻辑的选择，但 R 用于其他用途）。

对函数的需求是每个 x 值只有一个 y 值。因此，坐标系中的函数流不能来回移动，因为这意味着一个 x 值有更多的 y 值。如果需要，我们将讨论向量函数或参数函数，这将在第 4 部分中讨论。

普通直角坐标系也以数学家笛卡尔的名字命名为笛卡尔坐标系。

坐标也可以用极坐标表示：（距 Origo 的距离，与 +x 轴的角度）。见图：



我们将在本书的最后进一步讨论极坐标。

现在是关于法线（笛卡尔）坐标。

距离

下面显示了一个包含 A、B 和 C 三个点的坐标系，坐标为：A(2,3) B(5,4) C(1,-3)。

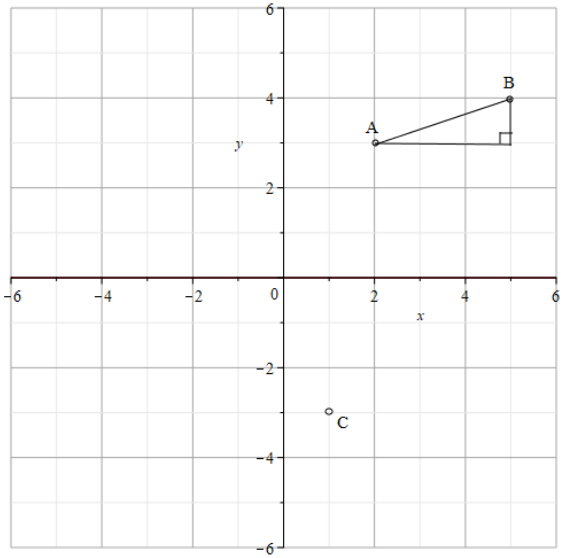
A 和 B 在第一象限，C 在第四象限。

我们将 A 和 B 之间的距离 d 表示出来，并通过使用最古老和最重要的公式之一毕达哥拉斯公式来求得它，该公式对矩形（90°）三角形有效。我们绘制一个辅助三角形，可以看到 x 方向（水平）的边长为 3，而 y 方向的边长为 1。

换句话说，我们通过说找到了长度

B 的 x 值减去 A 的 x 值 = $x_B - x_A$ = 5 - 2 = 3

B 的 y 值减去 A 的 y 值 = $y_B - y_A$ = 4 - 3 = 1



然后毕达哥拉斯指出：

$d^2 = 3^2 + 1^2$ ⇔

$d = \sqrt{3 \cdot 3 + 1 \cdot 1}$ ⇔

$d = \sqrt{10}$ 因此，距离是 $\sqrt{10}$

我们也可以将 A 到 B 的距离表示为 |AB|。直括号的意思是：

长度 = 数值 = 数字的大小

在字母中我们得到距离公式：

$|AB|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

我们还可以计算两边的平方根——有些表就是这样做的。

距离公式只是毕达哥拉斯的另一种形式。

例子

1.

上面我们通过 B 减去 A 得出 |AB| = $\sqrt{10}$。

如果我们通过 A 减去 B 求出 |BA|，我们会得到相同的距离：

$|BA|^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \quad =>$

$|BA|^2 = (2 - 5)^2 + (3 - 4)^2 \quad \Leftrightarrow$

$|BA|^2 = (-3)^2 + (-1)^2 \quad \Leftrightarrow$

$|BA|^2 = 9 + 1 \quad \Leftrightarrow$

$|BA| = \sqrt{10}$

当然，从 A 到 B 的距离与从 B 到 A 的距离相同。

2.

我们还将找到从 C 到 A 的距离。

为了保持秩序，我们说“结束减去开始”。对于 |CA| 来说，就是 A 减去 C。

$|CA|^2 = (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 \quad =>$

$|CA|^2 = (2 - 1)^2 + (3 - (-3))^2 \quad \Leftrightarrow$

$|CA|^2 = (1)^2 + (6)^2 \quad \Leftrightarrow$

$|CA|^2 = 1 + 36 \quad \Leftrightarrow$

$|CA| = \sqrt{37}$

对于 |AC| 是 C 减去 A：

$|AC|^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 \quad =>$

$|AC|^2 = (1 - 2)^2 + (-3 - 3)^2 \quad \Leftrightarrow$

$|CA|^2 = (-1)^2 + (-6)^2 \quad \Leftrightarrow$

$|CA|^2 = 1 + 36 \quad \Leftrightarrow$

$|CA| = \sqrt{37}$

同样的答案。

符号 => 表示逻辑结果。当我们只能向前计算而不能向后计算时，我们就使用它。当我们从外部引进一些东西时就会发生这种情况。这里我们引入公式中的数字。

现在我们将考虑坐标系（图表）中的重要函数、它们的方程和曲线。

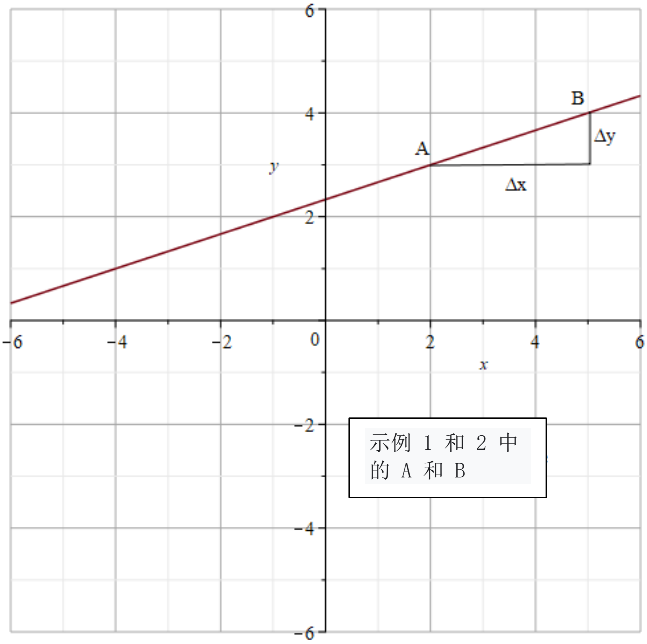
我们在直线上投入了很多精力，因为物理学、生物学、经济、设计等领域的很多内容都是通过直线来描述和解释的。此外，我们还为考虑其他功能奠定了基础。

直线（线性函数）

我们用两种方式写出线性函数的方程：

1.

让我们使用前一章的图，通过 A 点和 B 点画一条直线：



另外，我们将再次使用辅助三角形：使用字母，x 方向（水平）的边的长度为：

$x_B - x_A = \Delta x$

y 方向（垂直）的边长为：

$y_B - y_A = \Delta y$

当我们描述变化或差异时，我们使用希腊字母 Δ（delta）。这里是点的 x 值和 y 值之差。结束减去开始。（在物理学中 Δt 可能是温差，在经济中 ΔI 可能是收入差异等）。 Δ 的专业术语是“变化或差异”，也可能是负数。

现在我们感兴趣的是一个告诉我们直线斜率的数字。如果 Δy 与 Δx 相比较大，则该线的斜率较大。如果 Δy 小于 Δx，则该线的斜率较小。

这由分数 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 表示，称为斜率，通常表示为 a。

所以，我们定义：

直线的斜率 $= a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{y 差异}}{\text{x 差异}}$

我们继续计算：

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \Delta x = \Delta y \quad \Leftrightarrow \quad \Delta y = a \cdot \Delta x \quad \Leftrightarrow$

$y_B - y_A = a \cdot (x_B - x_A) \quad \Leftrightarrow$

$y_B = a \cdot (x_B - x_A) + y_A$

这是我们的直线方程。现在，我们将点命名为 A 和 B。它们可能有其他名称，许多表都指出：

$y = a \cdot (x - x_1) + y_1$

这是几乎所有直线（垂直线除外）的方程。

a 是斜率，（x1 ， y1） 是线上的已知点。如果我们知道这些，我们就可以写出某条线的方程并在坐标系中绘制它的草图。

那是方法 1。

2.

现在是方法 2，我们使用已经导出的直线方程继续计算：

$y = a \cdot (x - x_1) + y_1$

其中 （x_1， y_1） 是线上的已知点。让我们选择 y 轴上的点 (0， b)，其中 y = b。插入这一点，我们有

$y = ax + b$

这是几乎所有直线（垂直线除外）的最常见方程。

a 是斜率，b 是线与 y 轴相交的位置。如果我们知道 a 和 b，我们就可以写出某条直线的方程，并且可以在坐标系中绘制它的草图。

例子

1.

我们将使用方法 1 找到通过点 A(2,3) 和 B(5,4) 的直线方程：

$y = a \cdot (x - x_1) + y_1$

我们必须找到 a、x_1 和 x_2

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-3}{5-2} = \frac{1}{3}$

我们选择插入 A 点的坐标: $(x_1, y_1) = (2,3)$

$y = \frac{1}{3}(x - 2) + 3 \quad \Leftrightarrow$ 减少

$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + 3 \quad \Leftrightarrow$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{9}{3} \quad \Leftrightarrow$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

我们不妨插入点 B(5,4) 的坐标。 B 点也在直线上，因此也满足方程：

$y = \frac{1}{3}(x - 5) + 4 \quad \Leftrightarrow$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

当然答案相同。如果我们知道线上其他点的坐标，就会得出相同的方程。

我们发现的是“我们的”线的方程。

2.

现在我们将使用方法 2 找到通过点 A(2,3) 和 B(5,4) 的直线方程：

$y = a \cdot x + b$

a 是

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-3}{5-2} = \frac{1}{3}$

b 是通过将 A 或 B（相同结果）代入方程得出的。我们选择了 A：

$3 = \frac{1}{3} \cdot 2 + b$ ⇔

$b = \frac{7}{3}$

a 和 b 代入方程

$y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

给出了“我们的”线的方程。同样的答案。

另外，我们将看到当 x = 3 时 y 会变成什么

$y = \frac{1}{3}3 + \frac{7}{3} = \frac{10}{3}$

对于 $x = 17$

$y = \frac{1}{3}17 + \frac{7}{3} = 8$

现在我们知道（3, $\frac{10}{3}$）和（17, 8）是我们直线上的点。

3.

使用方法 2 的另一个示例 - 这次没有数字：
我的工资（y）等于我的时薪（a）乘以我工作的小时数（x）（a 和 x 成正比）。

工资 = 时薪 • 工作时间 =>

$y = a \cdot x$

如果无论我工作多少小时我也得到固定金额，则可以写成：

工资 = 时薪 • 工作时间 + 固定金额 =>

$y = a \cdot x + b$

其中 b 是固定金额。

4.

两条线称为 l 和 m。它们相交吗？如果是的话，在哪个坐标？

l: $y = -x + 3$

m: $y = 2x$

首先我们注意到它们的斜率不同 – 所以我们知道它们会在某个地方相交。如果斜率相似，它们就会平行并且永远不会相交。

这是有两个未知数的两个方程：

l 中的 y 插入到 m 中

$-x + 3 = 2x \quad \Leftrightarrow$

$-x - 2x = -3 \quad \Leftrightarrow$

$x = \frac{-3}{-3} = 1$

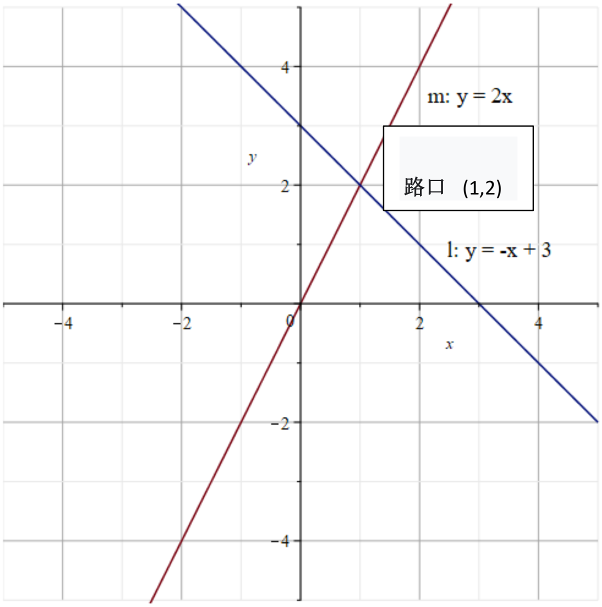
它被插入到一个旧方程中，这里是 m

$y = 2 \cdot 1 \quad \Leftrightarrow$

$y = 2$

因此，（1， 2）中的交集

如图所示（坐标系的另一种说法）：



l 正在减小（斜率为负）。

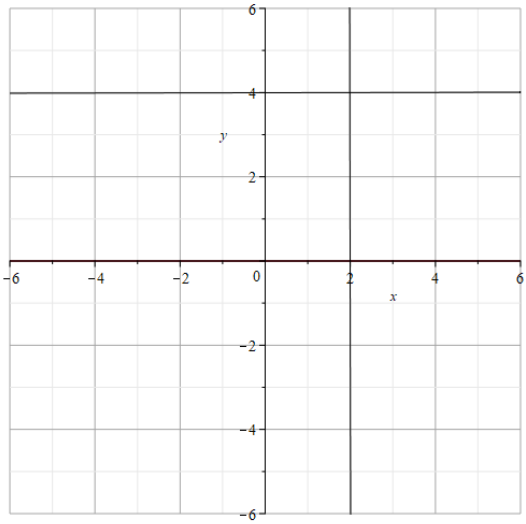
m 正在增加（斜率为正）。

交点读作（1, 2）。这称为图形解，它与计算相对应。

更多理论

一条线在两个方向上无限延伸。一条线段从一个点到另一个点。例如，从 A 到 B 的线段，如后面章节“距离”所示。

有四种特殊直线：



- 斜率为 0 的水平线。这里显示的是方程 y = 4 的线
  另一条水平线是 x 轴本身，方程 y = 0。
- 有坡度的垂直线 ∞（表示无限的符号）。因此，它们不是用通常的方程确定的。这里显示了方程 x = 2 的直线
  另一条垂直线是 y 轴本身，方程 x = 0。

顺便说一句，可以看出直线 y = 4 和 x = 2 相交于点 (2, 4)

———————————

除了刚才提到的特殊线之外，两条直角（=正交）线的斜率相乘将得到 -1。如果线名为 l 和 m，则适用以下规则：

$a_l \cdot a_m = -1$

因此，我们可以通过将两条直线的斜率相乘来判断它们是否正交，并查看是否得到 -1。例如，我们可以检查建筑物中的两条线，看看某些墙角是否有 90° 的角度。

证明

该图显示了两条正交线，称为 n 和 m。还显示了方程。
n 可以绕交点旋转 90° 并变为 m，辅助三角形随之而来。

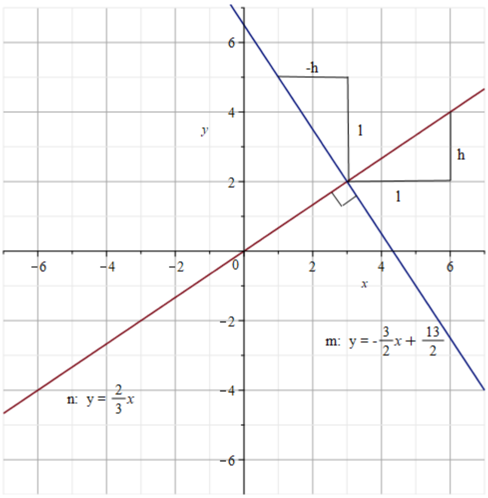
n 的斜率为： $a_n = \frac{2}{3}$
m 的斜率为： $a_m = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$

乘以它得到：

$a_n \cdot a_m = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{-2}\right) = -1$ 用数字显示

或用字母表示：

$a_n \cdot a_m = \frac{h}{l} \cdot \left(\frac{l}{-h}\right) = -1$ 用字母证明



抛物线

抛物线的技术术语是“二次多项式”。二阶是因为 x 是 2 次方。“Poly”表示几个，“nomial”表示部分。

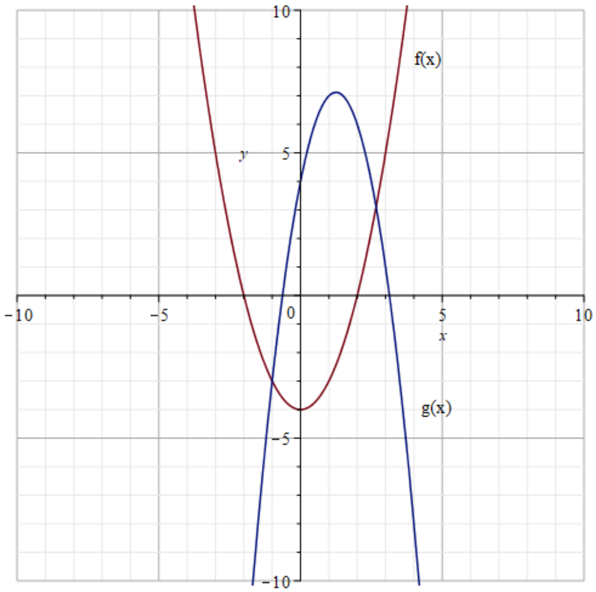
我们对所使用的图形有昵称，这条美丽的曲线被命名为抛物线，意思是比较，也许是因为当我们比较两半时，图形是对称的。

该图显示了两条抛物线。与方程之一

$f(x) = x^2 - 4$

另一个方程为

$g(x) = -2x^2 + 5x + 4$



对于两个抛物线，y 都是 x 的函数（y 取决于 x），但它们不能同时称为 y，因此第一个我们称为 f(x)（我们说 f of x），另一个称为 g(x) 。

所有抛物线的方程为：

$y = ax^2 + bx + c$ 或者

$p(x) = ax^2 + bx + c$ p 为多项式。

a 大意味着抛物线很窄。 a 小表示抛物线宽。

正 a 表示分支向上。负 a 表示分支面朝下。

b 在 x 和 y 方向上移动抛物线，而 c 仅在 y 方向上移动它。

当我们求解二次方程时，我们有：

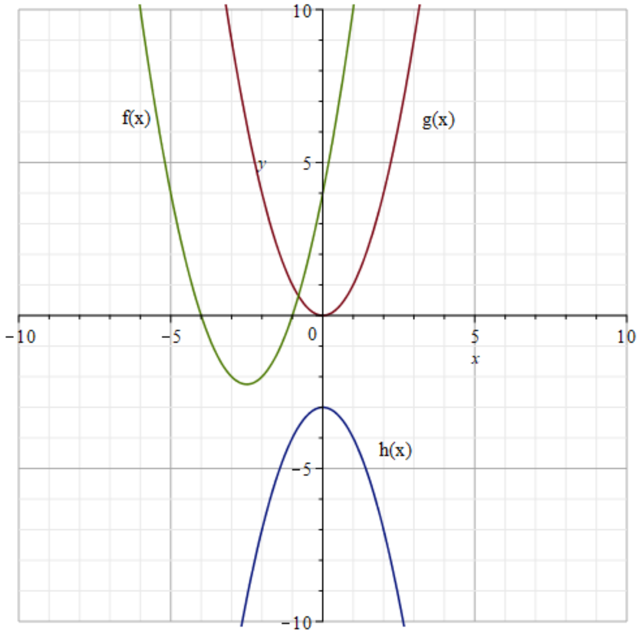
$ax^2 + bx + c = 0$

现在 vi 使用抛物线的二次方程，因此 0 一定是因为 y = 0。

x 轴上的 y 为 0。因此，对于抛物线，二次方程的解必须是抛物线与 x 轴相交的位置。

通常，在抛物线两个分支与 x 轴相交的点处，x 有两个根（如下图中的 f(x)）。

如果判别式为零，则只有一个根，即接触 x 轴的抛物线的峰值（如图中的 g(x)）。
无解意味着抛物线不与 x 轴相交或接触（如图中的 h(x)）。



因此，当 vi 使用抛物线几何的二次方程时，“无解”确实有意义。

抛物线有一个顶点（“转折点”），其坐标为：

$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$ 我们将证明：

抛物线顶点只有一个 x 值对应一个 y 值。顶点在 x 轴上的抛物线的顶点的 y 值为 0。因此，判别式为 0，x 值变为：

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ => $x = \frac{-b}{2a}$ 为了 d = 0

如果我们向上或向下移动抛物线，y 值将会改变，而 x 值将保持不变

$x = \frac{-b}{2a}$

我们将其插入抛物线方程中以找到 y 坐标：

$y = ax^2 + bx + c$ =>

$y = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$ ⇔

$y = \frac{abb}{4aa} - \frac{bb}{2a} + c$ ⇔

$y = \frac{bb}{4a} - \frac{2bb}{4a} + c$

$y = -\frac{bb}{4a} + c$ ⇔

$y = \frac{-bb+4ac}{4a}$ ⇔

$y = \frac{-d}{4a}$

x 和 y 组合： 顶点 $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$ 并证明了公式。

例子

1.

图中的 f(x)

$f(x) = x^2 + 5x + 4$ 或者

$y = x^2 + 5x + 4$ 这里我们必须记住，这个 y 值仅适用于 f(x)

它与 x 轴相交在哪里？

这种情况发生在 x 轴上 y = 0 的地方

因此，我们为 y 插入 0 并求解二次方程

$x^2 + 5x + 4 = 0$

使用公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad =>$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-5 \pm 3}{2} \quad \Leftrightarrow$$

x = -4 和 -1

它与 y 轴相交在哪里？

这种情况发生在 y 轴上 x = 0 的地方

因此，我们为 x 插入 0 并求解二次方程

$y = 0^2 + 5 \cdot 0 + 4 \quad \Leftrightarrow$

$y = 4$

其中，与图表相对应。

如果我们想将 x2 替换为 x1 的两个括号，则称为因式分解。例如，

$y = x^2 + 5x + 4$ 可以因式分解为 $y = (x + 4)(x + 1)$

或者

$y = 2x^2 + 10x + 8$ 当因式分解时 $y = 2(x + 4)(x + 1)$

这是通过将方程因子 a（此处为 2）从括号中取出，找到根，并将第一个括号形成为：x - root1，另一个为 x - root2 来完成的

因式分解将在“二次多项式因式分解的证明”。

2.

刚刚显示的图中的 h(x) 具有等式

$h(x) = -x^2 - 3$

它与 x 轴相交在哪里？

在 x 轴上 y 为 0。这里：h(x) = 0。所以

$-x^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 = -3$

这是不可能的，因此：“没有解决方案”。这意味着抛物线 h(x) 不与 x 轴相交。它与我们在图中看到的相符。

3.

$h(x) = -x^2 - 3$

顶点在哪里？

公式 $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$

在哪里 $a = -1$ $b = 0$ （没有 x）

和 $d = b^2 - 4ac = 0 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = -12$

插入的给出 $\left(\frac{0}{2\cdot(-1)}, \frac{-(-12)}{4(-1)}\right) = (0, -3)$ 与图表相对应。

4.

让我们回到抛物线图：

$f(x) = x^2 - 4$

$g(x) = -2x^2 + 5x + 4$

它们在哪里相交？

它们相交于满足两个方程的点（可能是两个点），其中一个方程等于另一个方程：

$f(x) = g(x)$ =>

$x^2 - 4 = -2x^2 + 5x + 4$

这是要排列和求解的二阶方程：

$3x^2 - 5x - 8 = 0$

公式： $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ =>

这里： $x = \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot(-8)}}{2\cdot3}$ ⇔

$x = \frac{5\pm11}{6}$ ⇔

$x = \frac{8}{3}$ 和 -1

我们称交点的 x 坐标为

$x_1 = \frac{8}{3}$ 和 $x_2 = -1$

我们读图发现它是对应的。

我们通过插入抛物线方程之一来找到 y 坐标。哪个并不重要，因为交点位于两条抛物线上。我们选择 f(x)：

$y_1 = x_1^2 - 4 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 4 = \frac{28}{9}$

$y_2 = x_2^2 - 4 = (-1)^2 - 4 = -3$

因此，两个交点是：

$\left(\frac{8}{3},\frac{28}{9}\right)$ 和 $(-1,-3)$

这也与图表相对应。

所有曲线的交点通过以下方式找到：

曲线 1 的方程 = 曲线 2 的方程

更多关于抛物线的内容

许多自然定律都是二次方程，可以在图中显示为抛物线。例如动能（运动能）的公式 E_{kin} ：

$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ 其中 m 是质量，v 是速度。

在 v，E_{kin} - 图（v 在第一轴上，E_{kin} 在第二轴上）中，我们将得到一半的抛物线。稍后会详细介绍这一点。

抛物线的技术用途：如果抛物线绕其中心线旋转，我们将得到一个抛物线盘，它是一个 3D 图形。除其他外，它还用于汽车前灯，其中灯泡位于抛物面盘的焦点处。向后和横向辐射的光会撞击抛物线并向前反射。非常“开放”的抛物线盘也可以接收例如电视信号，这些信号被反射到焦点处的接收设备。 ..以及更多。

多项式

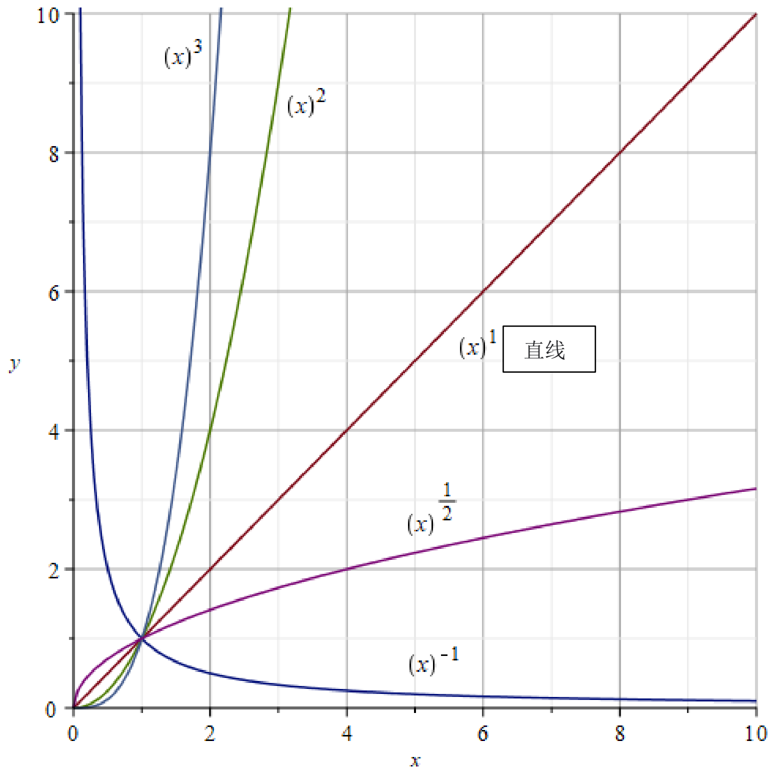
多项式以 x 作为基数和指数 n

$y = x^n$ 或者

$f(x) = x^n$

最近讨论的抛物线是指数为 2 的多项式。

该图显示了第一象限中的四个相关多项式：



x 在括号中，因为草图程序需要它， – 数学不需要它。

显示直线 $y = x^1 = x$ 以进行比较。

 ISBN 978-87-975307-4-0

例子

1.

$y = x^3$　　称为三次多项式。

例如球体的体积：

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$　　　　其中半径是三的幂。

2.

$y = x^2$　　称为二阶多项式或抛物线，这在后面的章节中讨论过。

例如动能（运动能）的公式：

$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$　　　其中 m 是质量，v 是速度。

如果质量是一个常数（可能是一个已知数），E_{kin} 将是（取决于）v^2 的函数

3.

$y = x^{½} \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$　　称为平方根函数

同样，我们可以使用动能公式作为例子，只是现在我们求解速度 v

$v = \left(\frac{2E}{m}\right)^{½}$

如果质量是一个常数（可能是一个已知数），v 将是（取决于）$E_{kin}^{½}$ 的函数

4.

$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ 称为倒数函数

倒数不能与“反向”混淆，我们稍后会讨论。

例如物理学中的波义耳・马里奥特定律。它对于气体是有效的（在限制内），并且如果温度保持恒定，则压力乘以体积是常数（某个数字）：

$p \cdot V = k$ $\Leftrightarrow$

$p = k \cdot V^{-1}$

因此，在 V,p 图中，我们有一条类似于 x,y 图中表示为 $(x)^{-1}$ 的曲线。这条曲线被称为“夸张”，是古希腊语，意思是“夸张”。

双曲线具有既不接触第一轴也不接触第二轴的能力。我们说它渐近地逼近轴，这也是古希腊语，意思是“不巧合”。

函数和四种基本算术运算

我们可以将函数相互加、减、乘、除。

让我们考虑一下莉兹和彼得，他们一年内以不同的方式赚钱。他们在丹麦工作，因此货币为丹麦克朗。

彼得每个月有固定工资：

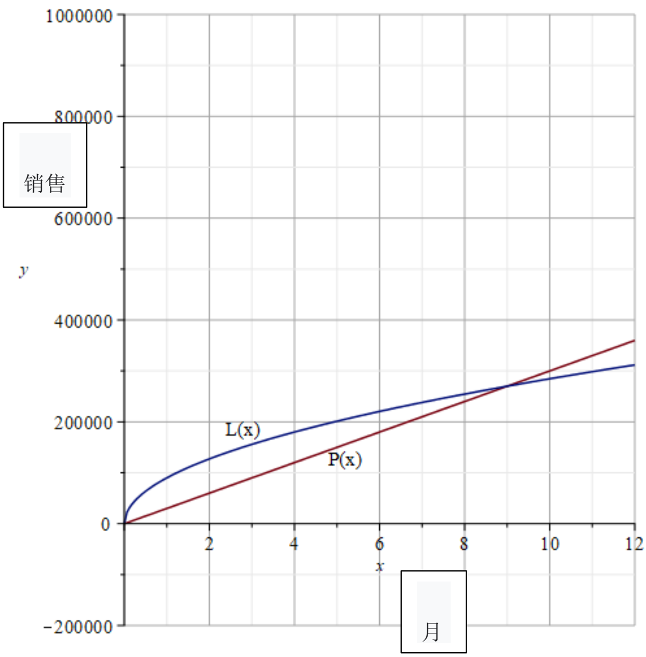
工资 ＝ 每月工资 • 月数

$P(x) = 30.000 \cdot x$

莉兹年初挣得很多，后来就少了。它大约适合这个函数：

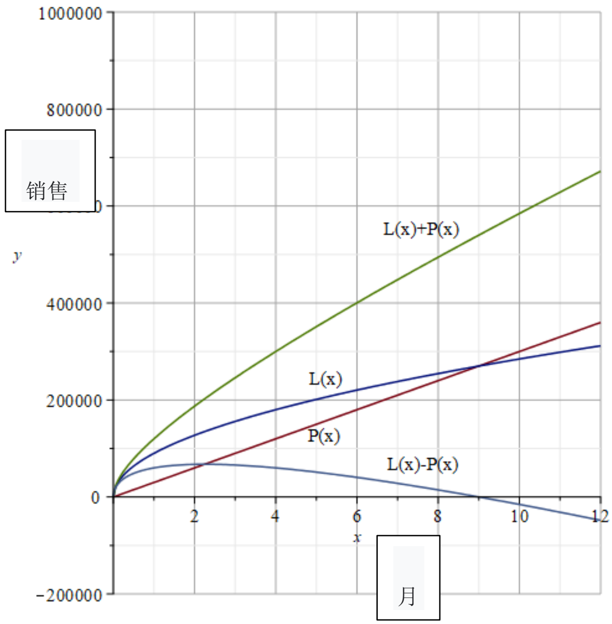
$L(x) = 90.000 \cdot x^{½}$ （她第一个月的收入为 90.000）

工资函数在图中如下所示：



下图显示了他们总共赚了多少钱（全年约 660,000 克朗）。曲线已添加。

它还显示莉兹比彼得挣得多。曲线 L(x) 减去曲线 P(x)。莉兹在第九个月之前的收入最高，一年中其余时间她的收入低于彼得。

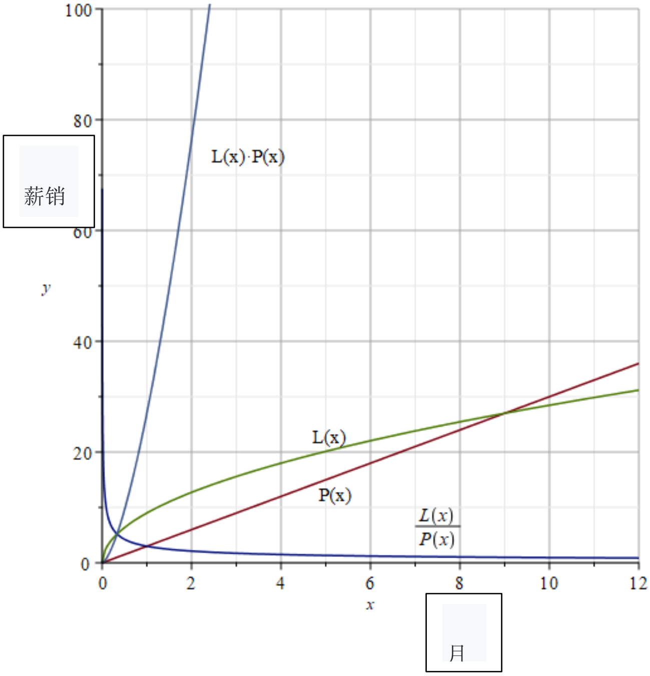


在这种情况下，将两个函数相乘并没有什么意义。我们只能得到一条陡峭的曲线，并不能提供有用的信息。但是，如下图所示。

更有趣的是看看他们相对于彼此的收入是多少。在这里，我们选择查看 Liz 相对于 Peter 的收入是多少：$\frac{L(x)}{P(x)}$

首先，莉兹的收入比彼得高得多，因此该分数在第二轴上给出了很大的值。过了一会儿，他们的收入几乎相同，因此比例变为约 1，曲线变得平坦。

第二个轴上的值变得粗糙（1 000 000 变成了 100 等），以便我们可以更好地看到 $(\frac{L(x)}{P(x)})$ 曲线。



复合函数

如果一个函数的结果随后适用于另一个函数，则我们使用复合函数。例如

$f(x) = 2x + 1$ 和 $g(x) = x^2$

这里先执行 g，然后执行 f 的复合函数将被称为 f(g(x))。我们说 f of g of x [有些写成 (f ◦ g)(x)]。

g 称为内函数，f 称为外函数。

这里：

$f(g(x)) = 2(x^2) + 1$ 因此，g 插入到 f 中。

复合函数的一个条件是内部函数的范围位于外部函数的域内。

反函数

通常我们将 y 视为 x 的函数。

对于逆函数，我们将 x 视为 y 的函数。例如

$y = 2x + 1$ 在这里我们有 $y = f(x)$ ⇔

$x = \frac{y-1}{2}$ 那么我们有 $x = f(y)$

如果我们使用普通坐标系，其中 x 在第一轴上，y 在第二轴上，我们将新的 y: x – 和新的 x: y （我们交换）命名。相当令人困惑，但这就是它的工作原理：

$y = \frac{x-1}{2}$ 这是同一坐标系中的反函数。

为了避免名称混淆，我们可以这样写：

功能 $f(x) = 2x + 1$ =>

反函数 $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

升高的-1 表明它是一个反函数。这样，很明显 f 和 f−1 是互逆的。

只有单调（即递增或递减）函数才有反函数。域和范围也被交换。

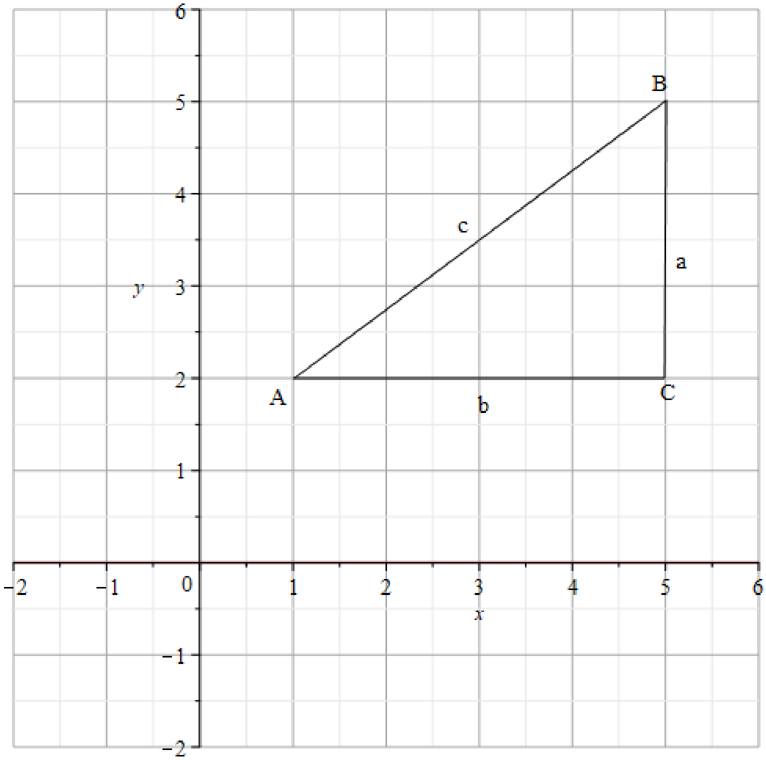
考虑到正弦、余弦和正切，以及 10 和 log，以及 e 和 ln，反函数特别有趣，我们稍后会看到。

直角三角形

所有三角形的内角和均为 180° 。直角三角形的一个角为 90° ，另外两个角为 90° ，例如角为 30° 、60° 和 90° 的三角形。

直角三角形在数学中很重要，它包含在许多设计和构造中。

图中有一个直角三角形 ABC，其边分别为 a、b、c。



古希腊人毕达哥拉斯发现了一个适用于直角三角形的公式：

$a^2 + b^2 = c^2$

可能是其中最常用的公式。

 ISBN 978-87-975307-4-0

从角 A 看，a 是对边，b 是邻边，c 是斜边（古希腊名字）。

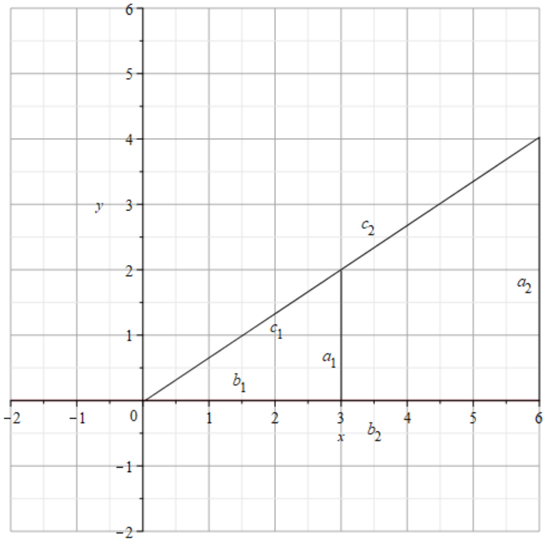
常见的直角三角形是 3、4、5 三角形，即 a = 3、b = 4 和 c = 5。然后毕达哥拉斯渲染：

$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad \Leftrightarrow$

$25 = 25$

这是真的。这意味着我们可以轻松地形成 90° 角，例如，一块木板相距 3 米钻孔，另一块木板相距 4 米钻孔，第三块木板相距 5 米钻孔。然后我们将它们摆成三角形，并在孔中插入钉子，最大角度将自动为 90°。我们还可以使用三根绳子或任何东西，如果只有一根绳子长 3，另一根绳子长 4，第三根绳子长 5，-并且不一定是米，可以是英尺或任何单位。

下图显示了一个小直角三角形和一个大直角三角形。小三角形的尺寸为 a_1、b_1、c_1，大三角形的尺寸为 a_2、b_2、c_2。



如果如图所示，角度相似，则适用以下规则：

$$\frac{a1}{a2} = \frac{b1}{b2} = \frac{c1}{c2} \quad \text{和} \quad \frac{a2}{a1} = \frac{b2}{b1} = \frac{c2}{c1}$$

从图中可以很容易地推断出。

换句话说：如果 a 增长，b 和 c 也会相应增长。例如，如果 a 加倍，b 和 c 也加倍。相应地减少。

这些三角形都是单角的。

所有三角形的面积是

$$\text{面积} = \frac{1}{2} \cdot \text{基线} \cdot \text{高度}$$

对于直角三角形来说，这特别容易，因为基线是一条直角（或腿），而高度是另一条直角（在拉丁语中，两条较小的边 – 直角的腿 – 称为两条直角））。

对于我们的小三角形，面积是：

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$$

对于大三角形，面积为：

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$$

请注意，当边长加倍时，面积会变大四倍。

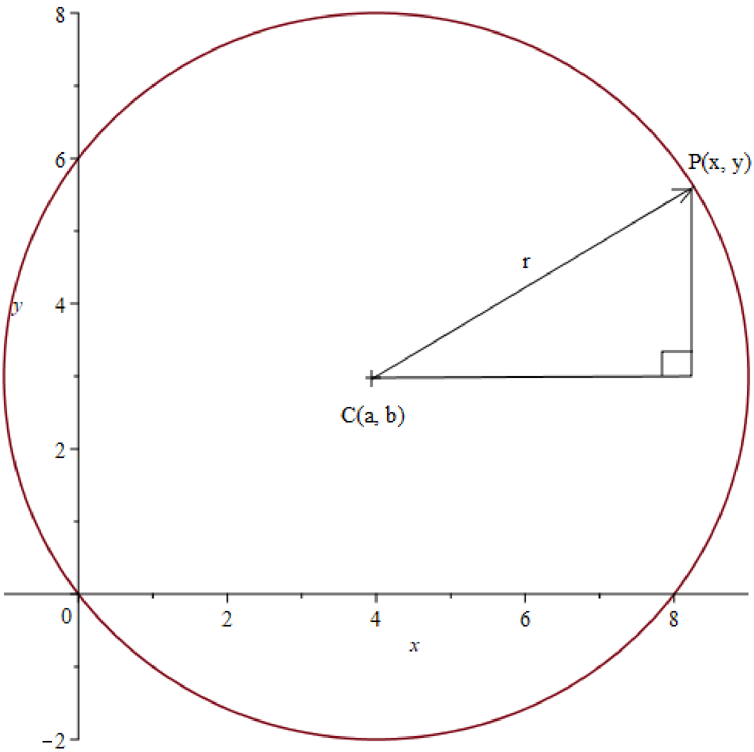
所有三角形的技术术语是“三角学”，意思是三角形测量。

圈子

地球（几乎）是圆的。许多天体都是圆形的。地球绕其自身的轴做圆周运动。旋转机器做圆周运动。许多结构和设计都有圆圈。圈子很重要。

圆的方程出奇地简单。它再次“只是”毕达哥拉斯。

该图显示了一个圆心 C(a, b) 和半径 r 与点 P(x, y) 相交的圆



当然，无论我们在圆上的哪个位置，中心 C 都是相同的。然而，P 是可变的——坐标根据我们在圆上的位置而变化。对于所有 P 来说，到 C 的距离 (r) 相同。

我们画一个辅助三角形并使用毕达哥拉斯：

(水平边)^2 + (垂直边)^2 = 半径^2 ⇔

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

这是圆的方程。

例子

1.

所示的圆有等式：

$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

我们的圆与水平线在哪里相交 $y = 6$?

该线未显示，但可以看出该线必须在点（0, 6）和（8, 6）相交

交点是直线方程等于圆方程的地方，该方程由两个具有两个未知数的方程求解：

线 $y = 6$

圆圈 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

圆中的线： $(x - 4)^2 + (6 - 3)^2 = 5^2$ ⇔

$x^2 - 8x + 16 + 9 = 25$ ⇔

$x^2 - 8x = 0$

这里，如果没有 c，我们可以使用零解：

$x \cdot (x - 8) = 0$ =>

x 或（x − 8）为零 $\Leftrightarrow$

$x = 0$ 或者 $(x - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 8$

综合起来我们发现直线与圆相交于点（0，6）和（8，6）

这与我们的阅读非常吻合。

2.

古希腊人将圆的周长确定为：

$O = 2 \cdot \pi \cdot r$

在哪里 $\pi \approx 3{,}14 \Rightarrow 2\pi \approx 6.28$

对于我们这个圈子来说是

$O = 2 \cdot \pi \cdot 5 \approx 31.4$

此外，他们还将圆的面积确定为

$A = \pi \cdot r^2$

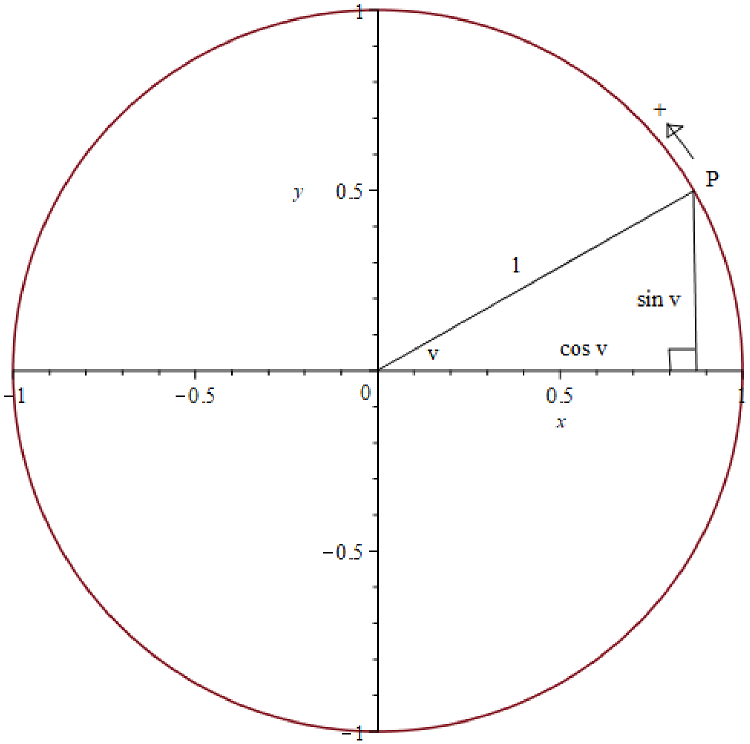
对于我们的圈子来说是

$A = \pi \cdot 5^2 \approx 78.5$

正弦、余弦和正切

我们想象自己正在风中玩耍风筝。线有多长并不重要（只要它是恒定的）。我们规定长度为 1。它水平放置在地面上。然后风来了，把它举起来做圆周运动。线的长度仍然是 1，因此当它上升时，沿着地面（水平）测量，它会离我们更近。但它距离我们仍然有 1 个长度，只是水平和垂直方向共享。

让我们用图表来看一下：



我们站在 Origo (0, 0)。风筝位于 P 点。龙的垂直高度称为正弦，水平距离称为余弦。 Sinus 是拉丁语，代表“弧高”。 Co- 的意思是“与”，因此余弦与窦相关，因为它也取决于窦。我们也清楚地看到，当龙上升时，正弦增大，余

弦减小。如果风筝升得很高，窦就大，余窦就小，-它几乎就在我们的正上方。

我们缩写正弦和余弦，并且在计算中我们使用缩写 sin 和 cos。

sin 和 cos 取决于角度 v（对于顶点）。（角度可能有各种名称）。我们通过将弧的垂直高度（y 方向）写为 sin v，将水平距离（x 方向）写为 cos v 来表示。

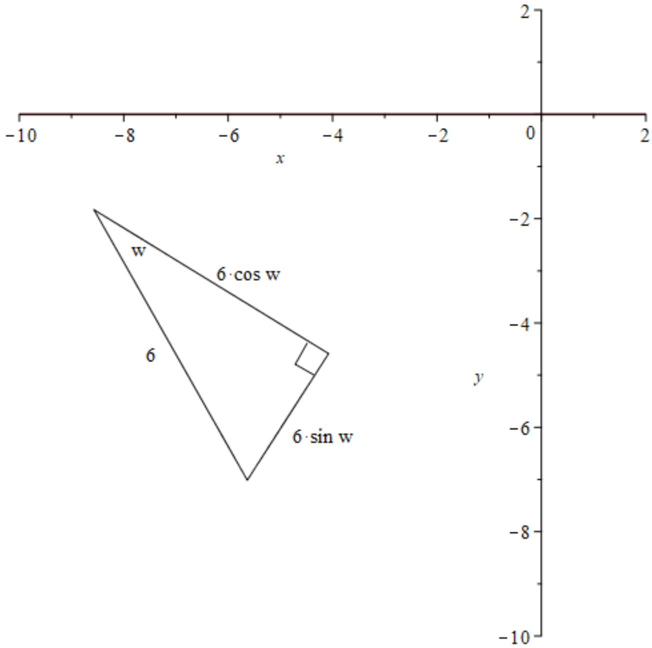
如果 v 变大，P 将逆时针旋转，这是旋转的正方向（+旋转），如图中的小箭头和+所示。

在其他连接中，顺时针旋转通常是正，但在数学中，+旋转是逆时针。

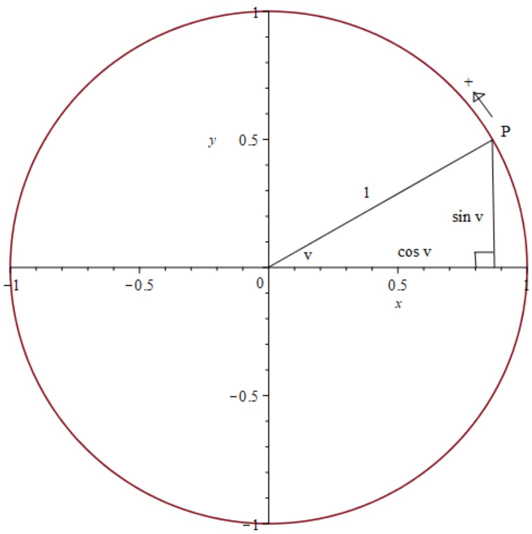
从角度 v 观察，您前面的一侧（相对侧）始终是“正弦侧”，而较远的以直角（90°）结束的相邻侧始终是“余弦侧””。长斜边始终是斜边。

如果我们移动三角形，改变它（但仍然是直角），然后旋转它，情况也是如此。

在下图中，我们展示了一个直角三角形，其中斜边（最长边）的长度为 6，角度称为 w。那么正弦侧仍然是相反的，余弦侧仍然是距离较远以 90° 角结束的相邻侧。只是现在，它们的长度增加了 6 倍。



让我们再次考虑一下在单位圆（半径 = 1 的圆的名称）中显示直角三角形的图：



$\dfrac{\sin v}{\cos v}$ 分数表示正弦相对于余弦有多大。这个分数称为正切，简称 tan：

$$tan\ v = \frac{\sin v}{\cos v}$$

我们看到，随着 v 从 0° 向 90° 变化，tan v 变得越来越大（因为 sin v 增加而 cos v 减少）。

我们已经看到了一个带有两个导管的一小部分的直角，它是：

坡 $= a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

是的，这是“相同”。不同之处在于，斜率对于坐标系中的直线有效，而切线对于任何位置的直角三角形都有效。

然而，如果我们将直角三角形放在坐标系中，我们可以谈论斜边的斜率。因此，对于这个斜边：

$$tan\ v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a = \text{坡}$$

如果你读一本旧教科书，它可能有另一个切线缩写：tg

既然我们谈论符号：

$(\sin v)^2 = \sin^2 v$ $(\cos v)^2 = \cos^2 v$ $(\tan v)^2 = \tan^2 v$

本书有第一个符号。其他书籍和表格可能有其他符号。

例子

1.

让我们开始在单位圆中的三角形上使用毕达哥拉斯：

$(sin\ v)^2 + (cos\ v)^2 = 1^2$ 称为基本关系

该方程可以求解 sin v

$(sin\ v)^2 = 1 - (cos\ v)^2 \quad \Leftrightarrow$

$sin\ v = [1 - (cos\ v)^2]^{½}$

其中使用指数 ½ 代替平方根。稍后我们将使用这个关系。

2.

利用单位圆的精细测量方法，可以求出各种角度的正弦侧和余弦侧的大小。这些量级导致在 CAS 中编程的功能。

因此，例如我们可以输入 sin 30° 并得到答案 $\frac{1}{2}$

或者我们可以输入 cos 30° 并得到答案 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

由此我们可以计算出 tan 30° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

或者我们可以输入 tan 30° 并得到相同的答案 $\frac{1}{\sqrt{3}}$

有些角度以及相应的正弦、余弦和正切值很容易记住：

角度	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

90° 处的切线将是 1 除以 0，这是无法完成的。

3.

从示例 2 的表中我们可以得到：

$sin\ 30° = \frac{1}{2}$

此外，我们可以向后使用该表：

$sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$ （在美国，sin-1 称为 arcsin 或 invsin）

或者

$cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

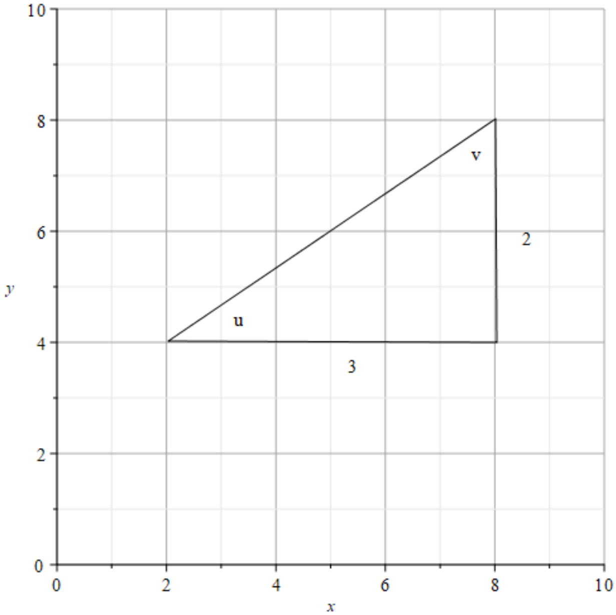
和反函数

$cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45°$ （在美国 cos-1 = arccos = invcos）

大多数 CAS 中都已编程了反函数。

4.

让我们通过构造者和设计者常用的计算来找到这个三角形中的角度 u 和 v：



$$tan\ u = \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{2}{3}$$

查看示例 2 中的表格，我们推断该角度可能在 30° 到 60° 之间（最接近 30）。 CAS 还具有反函数，因此要求 $\tan^{-1}$ 到 $\frac{2}{3}$ 会得到 33,69°

我们以同样的方式求角度 v，只是现在正弦侧为 3，余弦侧为 2：

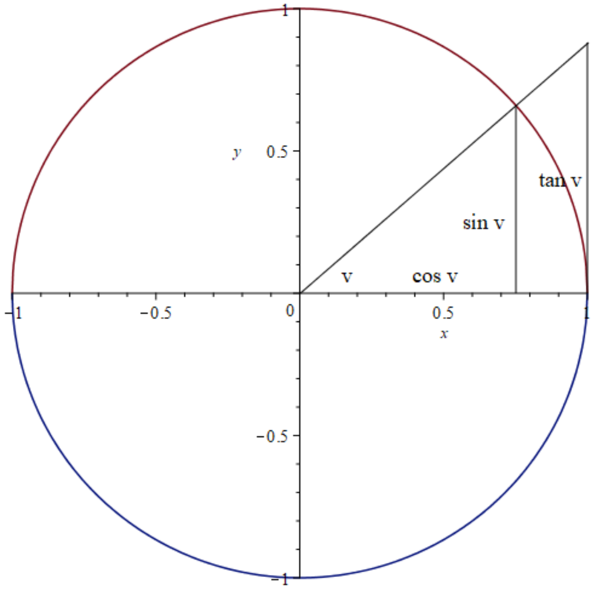
$$tan\ v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$v = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) = \text{invtan}\left(\frac{3}{2}\right) = 56{,}31°$$

控制： $90° + 33{,}69° + 56{,}31° = 180°$ 好的

5.

一个例子，显示切线的名称从哪里开始：



小三角形和大三角形是一个角 =>

$$\frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\tan v}{1}$$

使用单位圆我们可以看到 tan v 被描绘出来。

在 CAS 之前的时代，可以通过这种方式确定切线，但这不是切线的定义，而是：

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$$

弧度

半径从中心向外围辐射，因而得名。

弧度是大自然测量角度的方式。人类决定以度为单位来测量角度，但同时也以弧度为单位来测量：

古希腊人发现圆的周长与圆的半径成正比。他们称比例因子为：2π

圆周 $= 2 \cdot \pi \cdot$ 半径 $\Leftrightarrow$

$O = 2\pi \cdot r$

他们还发现 $\pi \approx 3{,}14 \;\; => \;\; 2\pi \approx 6{,}28$

因此，半径是决定圆周长大小的变量。如果 r 加倍，O 也会加倍，依此类推。

因此，无论圆有多大，绕一圈的半径都是 2π。我们现在将其称为 2π 弧度，或简称为：2π 弧度

无论圆有多大，绕一圈的游览也是 360° 的游览。所以：

π 弧度 $= 360$ 度

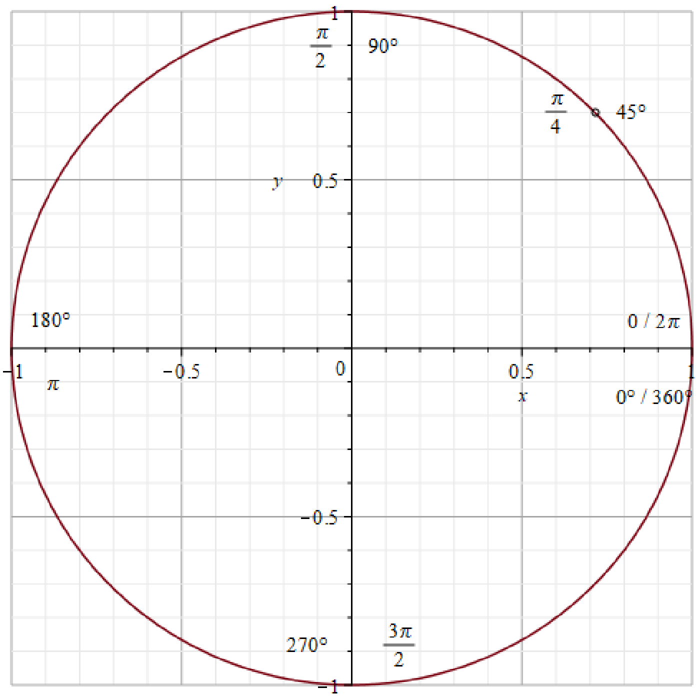
例如可以分为：

$\pi\,\mathrm{rad} = 180° \Leftrightarrow$

$\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad} = 90° \Leftrightarrow$

$\frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad} = 45°$

等等。另请参见图：



比例计算得出以下转换公式：

$$\frac{\text{角度（弧度）}}{2\pi} = \frac{\text{角度（以度为单位）}}{360}$$

例子

1.

角 v 是 30°，它的弧度是多少？

回答：

$$\frac{\text{角度（弧度）}}{2\pi} = \frac{\text{角度（以度为单位）}}{360} \quad \Leftrightarrow$$

$$v_{\text{弧度}} = 2\pi \cdot \frac{30}{360} \quad \Leftrightarrow$$

$$v_{\text{弧度}} = \frac{\pi}{6} \text{ 弧度}$$

通常，我们不渲染十进制数。我们留下 π 是为了精确并表明我们正在使用弧度。

2.

角 w 是 60°，它的弧度是多少？
回答：

$$\frac{\text{角度（弧度）}}{2\pi} = \frac{\text{角度（以度为单位）}}{360} \qquad \Leftrightarrow$$

$$w_{\text{弧度}} = 2\pi \cdot \frac{60}{360} \qquad \Leftrightarrow$$

$$w_{\text{弧度}} = \frac{\pi}{3} \text{ 弧度}$$

3.

角度是 1 rad，它的度数是多少？
回答：

$$\frac{\text{角度（弧度）}}{2\pi} = \frac{\text{角度（以度为单位）}}{360} \qquad \Leftrightarrow$$

$$u_{\text{度}} = \frac{360 \cdot 1}{2\pi} \qquad \Leftrightarrow$$

$$u_{\text{度}} \approx 57{,}3°$$

这里我们通常写一个十进制数。

4.

角度 φ（fi）是 π 弧度，它的度数是多少？

回答

$$\frac{角度（弧度）}{2\pi} = \frac{角度（以度为单位）}{360} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\varphi_{度} = \frac{360 \cdot \pi}{2\pi} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\varphi_{度} = 180°$$

角度和圆弧长度

我们再看一下圆的周长公式：

$O = 2\pi \cdot r$ 0 是称为圆周的特殊弧长

两边除以 2

$\frac{O}{2} = \pi \cdot r$ 这是半圆

然后我们两边除以例如 3

$\frac{O}{6} = \frac{\pi}{3} \cdot r$ 并且弧长变短

这三个表达式聚集在一个共同的方程中：

弧长 = 角度（弧度） • 半径

角度和弧长成正比。

例子

5.

半径 9 米的圆的 45° 弧长是多少？

我们将 45° 更改为弧度：

$$\frac{\text{角度（弧度）}}{2\pi} = \frac{\text{角度（以度为单位）}}{360} \quad \Leftrightarrow$$

$$\text{角度（弧度）} = 2\pi \cdot \frac{45}{360} \quad \Leftrightarrow$$

$$\text{角度（弧度）} = \frac{\pi}{4}$$

和： 弧长 $= \frac{\pi}{4} \cdot 9 \approx 7{,}07$ 米

章节结束

让我们通过展示前一章中的表格（正弦、余弦和正切）来结束本章， – 现在仅用弧度角度进行扩展

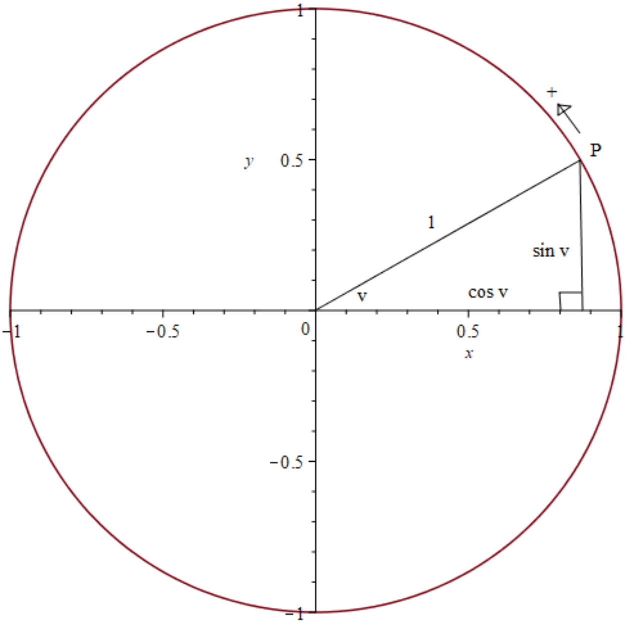
角度	0°	30°	45°	60°	90°
角度	*0* 弧度	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

90° 处的切线等于 1 除以 0，这是不可能的。

在一些书籍和一些表格中，v 是以度为单位的角度，x 是以弧度为单位的角度。通常我们需要注意相似事物的不同名称。

正弦函数和正弦振荡

我们再看一下单位圆：



我们称其为单位圆，因为半径为 1。

如果角度 v 为 0，则点 P 位于 x 轴上，坐标为（1， 0）。那么 cos v = 1 且 sin v = 0

如果 v 增加，sin v 将增加，cos v 将减少。

如果 $v = 90°\ (\frac{\pi}{2})$: $cos\ v = 0$ 和 $sin\ v = 1$

如果我们在第二象限继续沿 + 方向（逆时针）旋转，cos v 变得更负，而 sin v 变得更不正

在 $v = 180°\ (\pi)$: $cos\ v = -1$ 和 $sin\ v = 0$

在第 3 象限中，cos v 的负值减小，sin v 的负值增大

在 v = 270° ($\frac{3\pi}{2}$): $cos\ v$ = 0 和 $sin\ v$ = -1

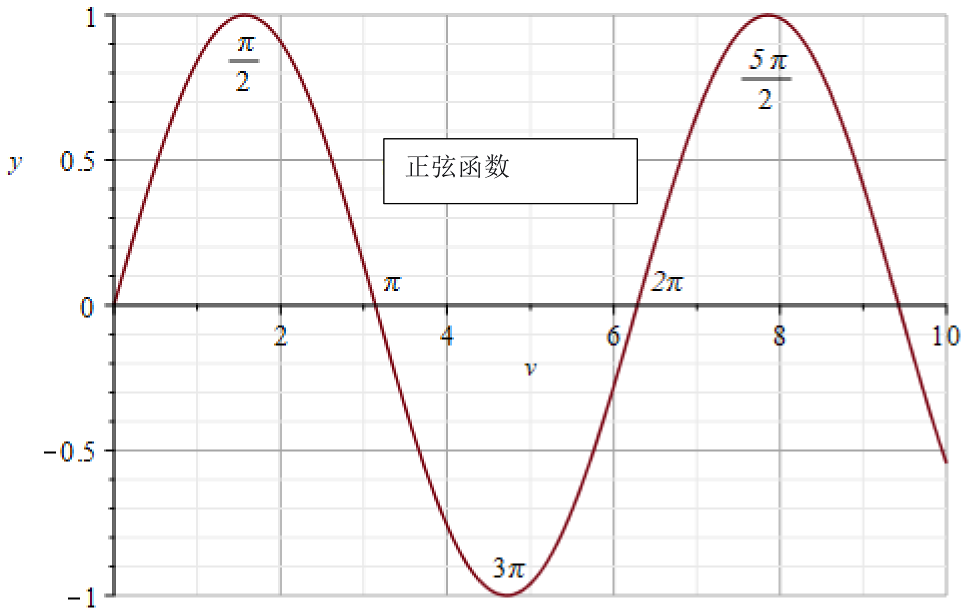
在 4. 象限中，cos v 变得更正，sin v 变得更负

在 v = 360° (2π) 我们重新开始。

sin v 的变化方式可以写成函数：

y = $sin\ v$

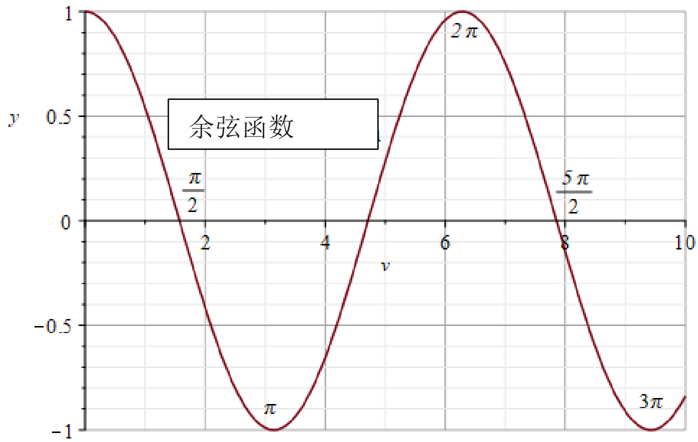
我们可以在坐标系中显示该函数，其中第一轴为弧度 v，第二轴为 sin v：



曲线围绕中性轴（此处为第一轴）波动。最大波动称为幅度（此处为+1 和-1）。从 0 到 2π 的一圈称为一个周期或一个周期。

我们还显示余弦函数

y = $cos\ v$



类似地，仅沿第一轴移动 $-\frac{\pi}{2}$。

所以，我们只考虑正弦函数。

正如我们所看到的，正弦函数可用于查找圆弧段的角度和弧长，并且与余弦和正切一起我们可以对直角三角形进行计算，这在几何中很重要。我们可以说，正弦函数结合了圆、角度、弧长和直角三角形。

然而，正弦函数包含更多内容：

正弦振荡

许多旋转或波动的事物都遵循正弦函数。重复事件。我们将它们命名为正弦振荡。正弦振荡出现在自然界和技术中，特别是技术振荡需要对方程进行扩展。

我们在自然界中发现了正弦振荡，例如我们的脉搏和呼吸、一年中的温度波动、24 小时节律、潮汐、声音、光等。

技术振荡的例子有旋转机械、声音技术、乐器、灯光技术等。

当物体上下、前后波动、旋转等时，就会产生正弦振荡。

让我们考虑以恒定速度旋转的物体，例如地球绕其自身轴旋转。那么弧长和时间是相关的：

24 小时地球转动角度 2π 弧度，弧长 2πr。 1 小时地球转 $\frac{2\pi}{24}$ 弧度，弧长 $\frac{2\pi r}{24}$ 等。

所以，角度和弧长成正比。

我们现在需要一个称为角速度（ω）的物理尺寸，它定义为以弧度为单位的角转除以以秒为单位的时间（t）：

角速度 = $\frac{角度}{时间}$

并在符号中

$\omega = \frac{v}{t}$ $\Leftrightarrow$ v 是角度

$v = \omega t$ ω 是希腊语欧米茄

现在我们的角度是 ωt，因此正弦函数是时间 t 的函数，如下所示：

$f(t) = \sin \omega t$

在技术上我们可能需要改变角度。写为：

$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ φ 是希腊字母 fi。

现在角度是 $(\omega t + \varphi)$

我们可能还需要改变幅度。我们通过乘以振幅大小 A 来实现这一点。 A 是从中性线到最大顶部或底部的测量值。

最后，我们可能需要在图中向上（或向下）移动正弦曲线。因此，我们添加 k。如果 k 为正，则曲线向上移动，如果 k 为负，则曲线向下移动：

$f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) + k$

这是扩展的正弦函数，或正弦振荡方程。
这些正弦振荡也称为谐波振荡。

例子

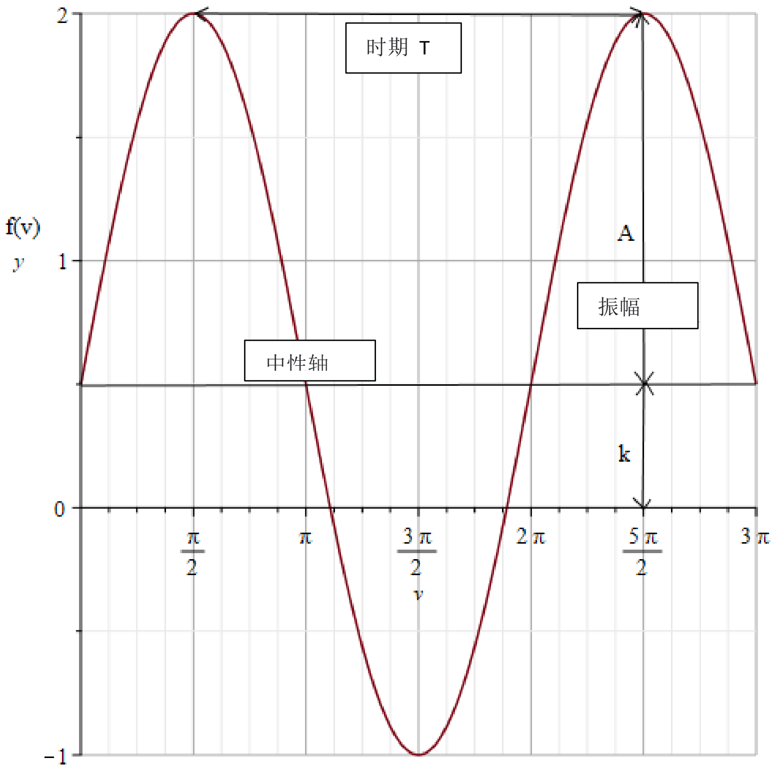
1.

该图显示了部分扩展的正弦函数，其中曲线继续取决于角度 v，并且其中：

$A = 0{,}5 \qquad k = 0{,}5 \qquad =>$

$f(v) = 1{,}5 \cdot \sin(v) + 0{,}5$

v 在第一个轴上，f(v) 在第二个轴上。



它显示，中性轴现在为 f(v) = 0,5，因为 k = 0,5 并且振幅 A 等于 1,5

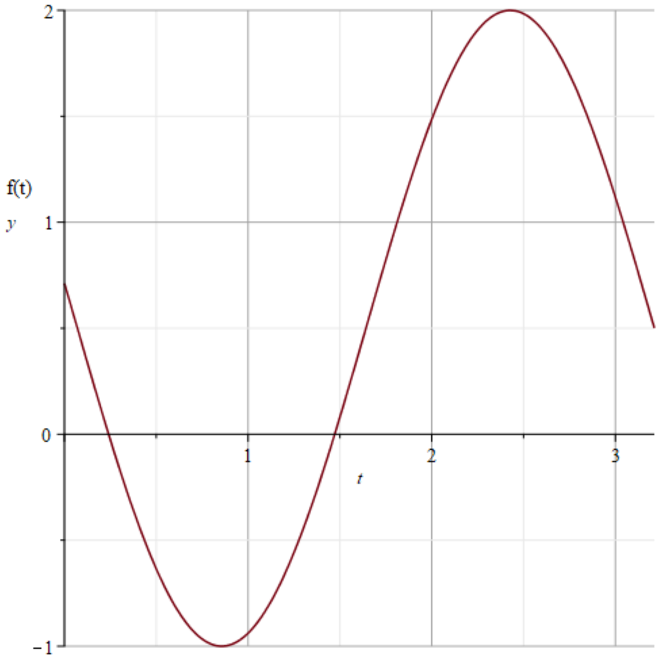
2.

现在我们希望考虑与时间而不是角度相关的正弦函数。我们通过插入 ω 和 φ 的数值来实现这一点。
该图显示了完全展开的正弦函数，其中：

$A = 1,5 \qquad \omega = 2 \qquad \varphi = 3 \qquad k = 0,5 \qquad =>$

$f(t) = 1.5 \cdot \sin(2t + 3) + 0.5$

t 在第一个轴上，f(t) 在第二个轴上。



我们注意到，第二个轴上的值显示从 -1 到 2 的不变振荡，而第一个轴上的值随着角度和时间的变化而变化。这是由于为 ω 和 φ 插入的值造成的。

ω 和 φ 合在一起形成分数 $-\frac{\varphi}{\omega}$ 沿 x 方向移动曲线而不改变其形状。$-\frac{\varphi}{\omega}$ 称为相移。
这在下面得到证明：

证明

一次振荡的角度（ωt + ϕ）位于 0 到 2π 弧度之间：

$$0 \leq (\omega t + \varphi) \leq 2\pi \quad \Leftrightarrow$$

$$-\varphi \leq \omega t \leq 2\pi - \varphi \quad \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\varphi}{\omega} \leq t \leq \frac{2\pi-\varphi}{\omega}$$

因此初始值从 0 变为 $-\frac{\varphi}{\omega}$ ，因此称为相移。

计算还表明，一次振荡从 $-\frac{\varphi}{\omega}$ 到 $\frac{2\pi-\varphi}{\omega}$ 。我们通过以下方式看到这一点：

结束减去开始 ⇔

$\frac{2\pi-\varphi}{\omega} - (-\frac{\varphi}{\omega}) = \frac{2\pi}{\omega}$ 称为周期 T

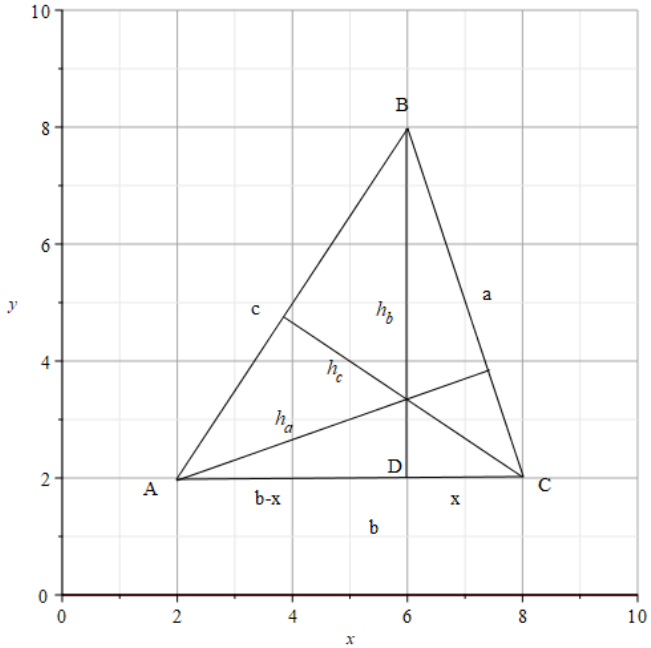
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

通常 t 是时间，因此 T 代表整个振荡 = 一个周期 = 一个周期。

不直角三角形

也称为任意三角形。

本章还包括等腰三角形和等边三角形，它们通常不被认为是任意的。



对于所有三角形，角和为 180°

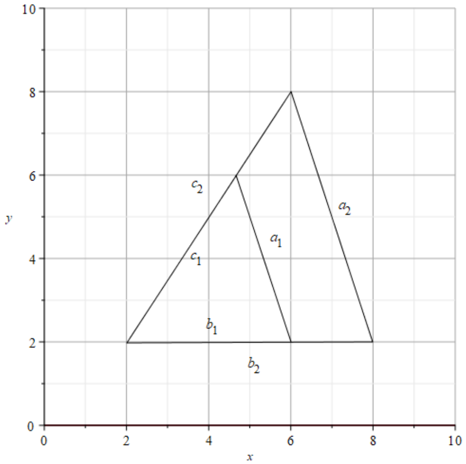
所有三角形的面积是

面积（A）$= \frac{1}{2} \cdot$ 基线 $\cdot$ 高度

三角形的高从一个角垂直到对边。

对于所有单角三角形，它适用于

$\frac{a1}{a2} = \frac{b1}{b2} = \frac{c1}{c2}$ 和 $\frac{a2}{a1} = \frac{b2}{b1} = \frac{c2}{c1}$



然而，毕达哥拉斯不适用于任意三角形。相反，应用正弦规则和余弦规则：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad\qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \sin C$$

证明

正弦规则：

三角形的面积可以用三种方式写出：

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

相反，高度可以被视为较小内三角形的正弦边（参见前图）。例如

$$h_a = \sin B \cdot c \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot \sin B \cdot c = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sin C \cdot a = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \sin A \cdot b \qquad \Leftrightarrow$$

$$a \cdot \sin B \cdot c = b \cdot \sin C \cdot a = c \cdot \sin A \cdot b \qquad \Leftrightarrow$$

当我们将方程的所有部分除以 a • b • c 时。

$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$ ⇔

或如某些表中所述的倒数

$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$

正弦规则是最简单的，但如果证明它们不够，则可能会应用余弦规则

余弦规则:
第一个图中的线段 b 可以分为 b−x 和 x，并且由于内部较小的三角形是直的，我们可以使用毕达哥拉斯

第一个三角形 BCD

$x^2 + h_b^2 = a^2$ ⇔ $h_b^2 = a^2 - x^2$

然后三角形 ABD

$(b - x)^2 + h_b^2 = c^2$ =>

$b^2 + x^2 - 2bx + (a^2 - x^2) = c^2$ h_b^2 插入

x 是三角形 BCD 中角 C 的余弦边

$x = a \cdot \cos C$ =>

$a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos C = c^2$ x 插入

我们还可以考虑线段 a 和 b，这将产生：

$b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A = a^2$

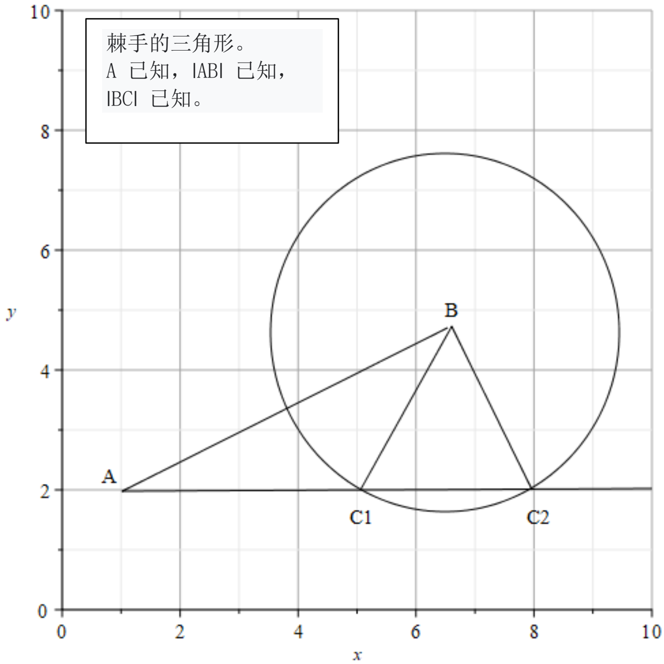
$a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos B = b^2$

因此，存在三个余弦规则，但通常表格只显示其中之一。

更多理论

我们需要了解有关三角形的三件事才能构造它。然而，有两个例外：

- 如果我们知道所有三个角度，则三角形可能具有所有大小。
- 如果我们知道两条边长和一个不在两者之间的角度，则可能会出现问题，如图所示：



我们画出角度 A。标记点 B。 |BC| 现在是指南针的半径，我们看到 C 可能有两个位置。

不幸的是，这个错误相当常见，例如在设计椽子时。设计师本意是 C1，但却有 C2。

例子

对于一个三角形 B = 82°, b = 14 和 c = 13,1
什么是 C?

我们使用正弦规则中我们有信息的部分：

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \quad \Leftrightarrow$$

$$\sin C = \frac{c \cdot \sin B}{b} \quad =>$$

$$\sin C = \frac{13{,}1 \cdot \sin 82°}{14} \quad \Leftrightarrow$$

$$C = \sin^{-1}\left(\frac{13{,}1 \cdot \sin 82°}{14}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$C = 67{,}9°$$

A 面?

A is 180° - 82° - 67,9° = 30,1°

我们可以再次使用正弦规则，但我们选择了余弦规则

$$b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A = a^2 \quad =>$$

$$a^2 = 14^2 + 13{,}1^2 - 2 \cdot 14 \cdot 13{,}1 \cdot \cos 30{,}1° \quad \Leftrightarrow$$

$$a^2 = 50{,}27 \quad \Leftrightarrow$$

$$a = 7{,}09$$

指数函数

指数函数以正常数（此处称为 a）作为基数，以 x 作为指数

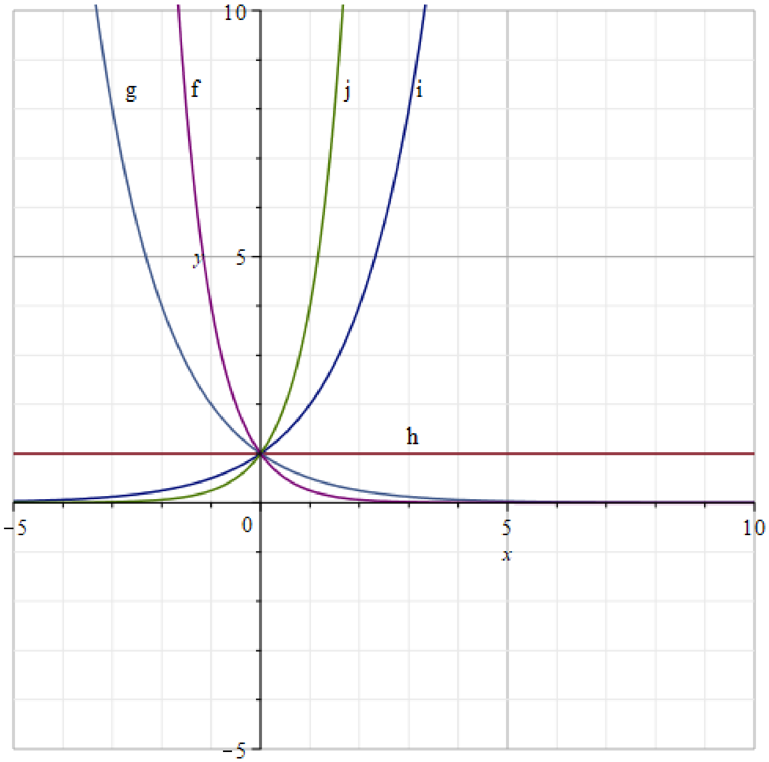
$y = a^x$ 或者

$f(x) = a^x$

图中：

$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $h(x) = 1^x$

$i(x) = 2^x$ $j(x) = 4^x$



这次在 f(x) 中省略了 x 并缩写为 f、g 等。这是允许的，因为很明显 x 在第一轴上。

指数函数的定义域在区间]-∞;∞[中，范围在区间]0;∞[中，因此仅放置在第一和第二象限中。第一象限通常是有趣的象限。

一般来说，当 a 在 0 和 1 之间时，指数函数递减（从 +x 方向看），当 a 大于 1 时，指数函数递增。

h 函数的 a = 1 ，因此它是水平的，并且将递减与递增分开。

另请注意，所有指数函数都经过点 (0,1)，因此在第一象限中它们都将从这里开始。

指数函数很有趣，因为它们经常应用于自然界，特别是基数为 2.7183…或大约 2.72 的函数。这个基数被称为 e，以一位著名数学家欧拉的名字命名：

欧拉数 = e ≈ 2.72

下图显示了基数为 e 的指数函数。

通过读取 x = 1 处的 f(x)，我们发现 e ≈ 2.72。该点被标记为 (1,e)

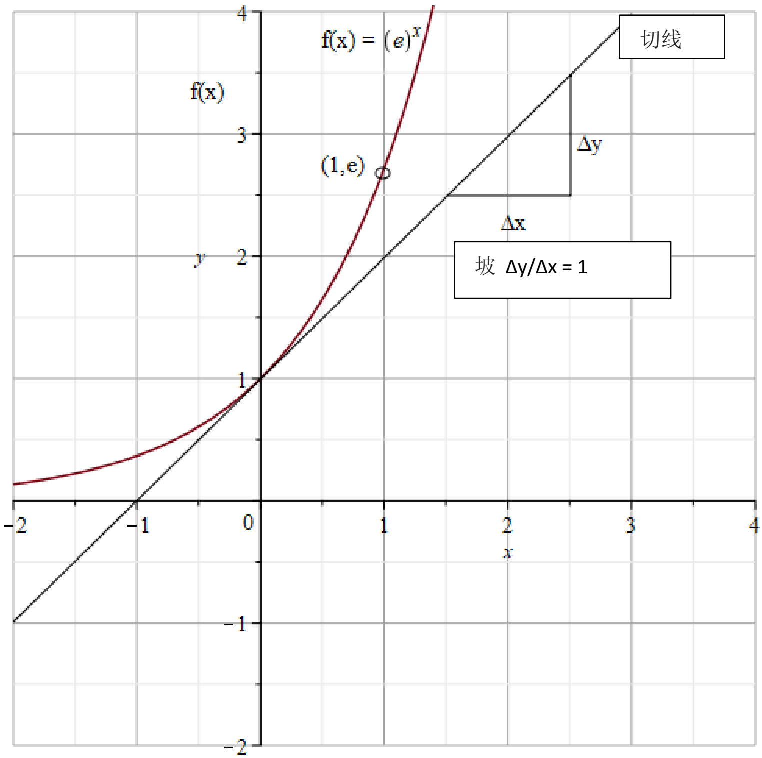
为什么基数 e 如此有趣？这是因为曲线的斜率，我们需要先解释一下：

斜率表明函数增加（斜率为正）或减少（斜率为负）的程度。

斜率会变化，所以如果我们在某个点找到它，我们会在该点上切线并找到它的斜率，这也是曲线的斜率。在起始点 (0, 1)，其中 f(x) 为 1，我们的指数函数 ex 的斜率为 1。

现在，我们可以给出答案：

基数为 e 的指数函数非常有趣，因为对于 f(x) = 1，斜率也是 1。对于 f(x) = 2，斜率也是 2。对于 f(x) = 3，斜率也是 3，等等。



因此，对于所有指数 e 函数，我们有：

$f(x) = e^x$ 且切线斜率 $= e^x$

没有其他函数具有函数值和切线斜率相同的能力，即 e^x。这种能力存在于细菌、植物、动物……的生物生长以及物理和化学过程的许多联系中。

因此，该函数被命名为：“自然指数函数”，而基数 e（欧拉数）是数学中最重要的常数之一。

第 3 部分将详细介绍这一点。

更多理论 1

首先，我们考虑以变量 a 作为基数（我们一开始的那个）的普通指数函数。就像我们之前想要扩展正弦函数一样，现在我们想要扩展指数函数，以便它可以被广泛使用。我们从

$f(x) = a^x$　　指数函数

到

$f(x) = b \cdot a^{kx}$　　指数增长函数

其中 b 给出曲线与第二轴相交的另一个点（或者起点，如果我们只考虑第一象限），而 k 使曲线或多或少变得陡峭。或者：$f(x) = b \cdot c^x$ for $a^k = c$

实施例 1

让我们考虑一个经济方面的例子：

$f(x) = b \cdot a^{kx}$　被重新排列

$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$　　这是利息公式

这里 f(x) 现在称为 K_n，它是未来值

b 称为 K_0，它是初始值

a 称为 (1 + r)，其中 r 是利率

kx 现在称为 n，即期限数，即实际利率的时间段（通常以年数为单位）。

例如，我们可以使用这个等式计算今天在银行借出的资金的未来价值，并在 5 年后偿还。如果我们在 5 年内以每年 4% 的利率借出 10,000 英镑，那么我们将欠：

$K_5 = 10.000 \cdot (1 + 0{,}04)^5 = 12.167$ pounds

更多理论 2

以同样的方式，我们现在考虑以 e 为基数的自然指数函数，并从

$f(x) = e^x$ 自然指数函数

到

$f(x) = b \cdot e^{kx}$ e 指数增长函数

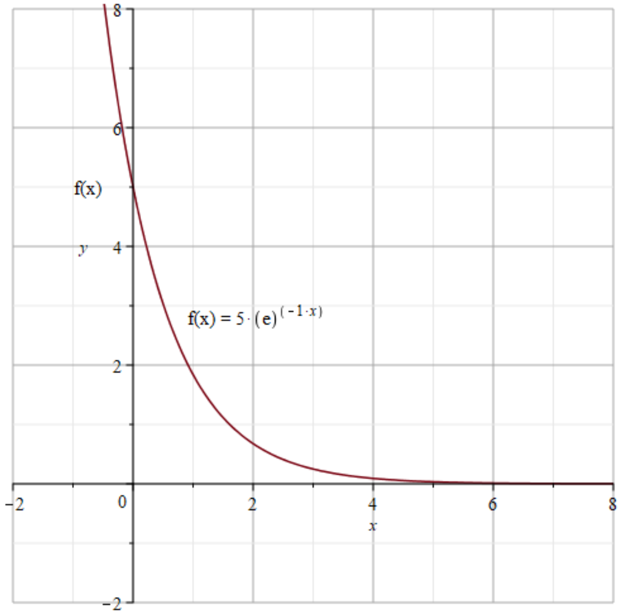
其中 b 给出曲线与第二轴相交的另一个点（或者起点，如果我们只考虑第一象限），而 k 使曲线或多或少变得陡峭。负增长时 k 为负。

实施例 2

该图显示了指数增长的 e 函数，其中 b = 5 且 k = -1。

负 k 使曲线呈指数下降。

一个例子可能是放射性物质的衰变，这里时间在第一轴上，放射性在第二轴上。曲线将从点（0,5）开始，除非我们想回到过去。



 公司: WorldMathBook cvr. 44731703 丹麦 ISBN 978-87-975307-4-0

对数函数（log 和 ln）

对数是拉丁语，意思是“算术数字”。

这里我们用一种新的方式来计算。

四种基本算术运算可以用于大多数情况，但我们还需要更多。我们第一次看到一些新东西，是函数 sin、cos 和 tan（从角度到距离），以及它们的反函数 $\sin^{-1}$、$\cos^{-1}$ 和 tan-1 - 或 arcsin、arccos、arctan - 或 invsin 、invcos、invtan（从距离到角度）。

现在我们又必须以新的方式进行计算。

我们需要一个工具来找到指数方程中的 x，例如

$y = 10^x$ 和 $y = e^x$

10 的对数

让我们考虑这行 10 次方的数字。下面我们只写指数：

10^x ↑	…	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	… ↓	$\log10^x$
x	…	-2	-1	0	1	2	3	4	…	x

很明显，我们从第 2 行转到第 1 行：

x 转移到 10x 或

$x \longrightarrow 10^x$

当我们从第 1 行转到第 2 行时，我们现在决定说：

$\log10^x \longrightarrow x$ 所以，我们定义 $\log10^x = x$

换句话说：10^x 的对数是 x，-，然后我们可以插入一个数字来代替 x。

现在我们可以解方程

$y = 10^x$ 两边取对数

$\log y = \log 10^x$ ⇔

$\log y = x$ ⇔

$x = \log y$

如果 y 是已知数字，例如 100 (= 10^2)，我们可以在刚刚得出的表中读取 $\log 10^2 = 2$ 并通过以下方式完成

$x = 2$

我们的表只包含几个数字，但精细的表被编程到 CAS 中。例如，我们可以输入：

$\log 37 \approx 1.57$

请注意，第 1 行中的所有数字均为正数。我们只能求大于零（>0）的数字的对数。

还有更多优点，因为它使我们有机会在第 1 行和第 2 行之间切换。第 1 行中的乘法和除法在第 2 行中变成加法和减法，反之亦然。

示例 I. 第 1 行中的 $10^2 \cdot 10^3$ 变为第 2 行中的 2 + 3。2 + 3 是 5。返回到第 1 行，我们找到答案 10^5

实施例二. 第 1 行中的 $10^2 : 10^3$ 变为第 2 行中的 2 - 3。2 - 3 为 -1。返回第 1 行，我们找到答案 10^{-1}

我们很少需要相反的方式，但让我们尝试一下：
第 2 行中的 -1 + 4 变为第 1 行中的 10^{-1} 和 10^4。
10^{-1} • 10^4 是 10^3。返回到第 2 行，我们看到答案：3

有用。

在 CAS 之前的时代，我们使用基于 10 秒对数的计算尺。今天我们有了 CAS，所以现在对数主要用于求解指数方程，就像我们开始时一样。

10s 对数的计算规则为：
而不是示例 I 中的数字

$\log(10^2 \cdot 10^3) = 2 + 3 = \log 10^2 + \log 10^3$

我们可以使用字母：

$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$ 这是规则 1

代替示例二中的数字

$\log(10^2 : 10^3) = 2 - 3 = \log 10^2 - \log 10^3$

我们可以使用字母

$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$ 这是规则 2

最后一个规则是，如果幂数不是 10（或 e）。我们推导它

$\log a^x = \log(10^{\log a})^x = \log 10^{x \log a} = x \cdot \log a \quad \Leftrightarrow$

$\log a^x = x \cdot \log a$ 这是规则 3

There are only these calculation rules for logarithms.

自然对数

或电子对数。

一切就像 10 的对数一样，只是现在的基数是 e

e^x	⬆	… e^{-2}	e^{-1}	e^0	e^1	e^2	e^3	e^4 …	⬇	$\ln e^x$
x		… -2	-1	0	1	2	3	4 …		x

我们称之为 ln x，它代表“自然对数”或更惯用的说法：“自然对数”，因为它就像它的基数 e 一样存在于自然界中。很明显，我们从第 2 行转到第 1 行：

x 转移到 e^x 或

$x \longrightarrow e^x$

当我们从第 1 行转到第 2 行时，我们现在决定说：

$\ln e^x \longrightarrow x$ 所以，我们定义 $\ln e^x = x$

换句话说：e^x 的自然对数是 x，-，然后我们可以插入一个数字来代替 x。

现在我们可以解方程

$y = e^x$ 两边都有 ln

$\ln y = \ln e^x \quad \Leftrightarrow$

$\ln y = x \quad \Leftrightarrow$

$x = \ln y$

如果 y 是已知数，例如 e^2，我们可以在刚刚制作的表中读取 $\ln e^2 = 2$ 并通过以下方式完成

x = 2

我们的表只包含几个数字，但是精细的表被编程到 CAS 中。例如，我们可以输入：

$\ln 37 \approx 3.61$

请注意，第 1 行中的所有数字均为正数。我们只能求大于零（> 0）的数字的对数。

计算规则为

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ 这是规则 1

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ 这是规则 2

$\ln a^x = x \cdot \ln a$ 这是规则 3

更多理论

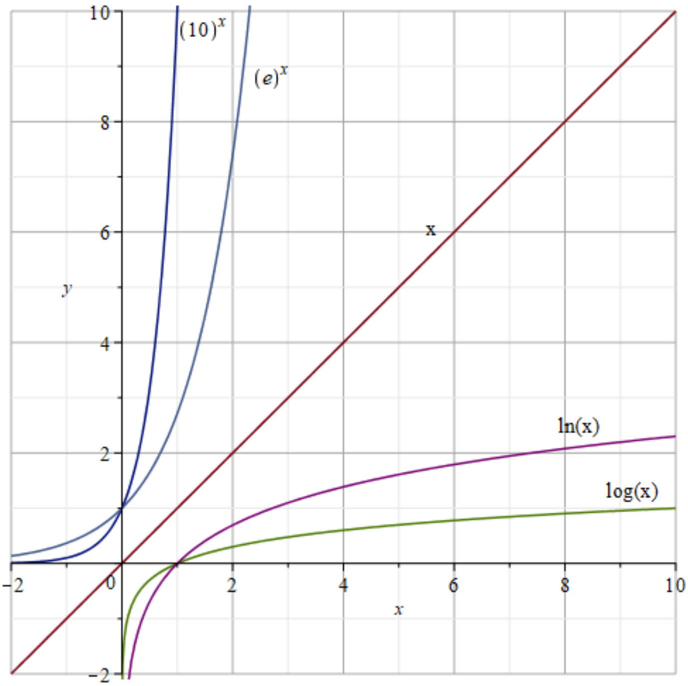
从上面看来，10^x 和 log x 是反函数

$\log 10^x = x$ 和 $10^{\log x} = x$

相应地，e^x 和 ln x 是反函数

$\ln e^x = x$ 和 $e^{\ln x} = x$

我们可以将其显示在图表中，其中也显示了 y = x 进行比较，我们看到 y = x 是对称线，因此，曲线可能在这条对称线上镜像。



这里我们只写表达式的右边。它不能被误解，所以它是被允许的。

当 x 增加时，指数函数/曲线越来越倾斜，而对数函数/曲线越来越倾斜。

----

2 次方对数函数的其他表示法：

$(\log x)^2 = \log^2 x \qquad (\ln x)^2 = \ln^2 x$

在本书中，我们使用第一种符号。其他一些书籍和表格可能使用其他符号。

使用计算规则 1 的示例

符号 ≈ 表示使用了 CAS。

$\log 3 + \log 4 = \log (3 \cdot 4) = \log 12 \approx 1.079$ (log 12 是精确的)

$\log 4 + \log 25 = \log(4 \cdot 25) = \log 100 = 10$

$\log\left(\frac{2}{3}\right) + \log\left(\frac{3}{4}\right) = \log\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) = \log\left(\frac{2}{4}\right) \approx -0.301$

$\log(10 \cdot \sqrt{10}) = \log 10 + \log\sqrt{10} = 1 + \log\sqrt{10} = 1.5$

$\ln 3 + \ln 4 = \ln(3 \cdot 4) = \ln 12 \approx 2.48$

$\ln 4 + \ln 25 = \ln(4 \cdot 25) = \ln 100 \approx 4.605$

$\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{2}{4}\right) \approx -0.693$

$\ln(e \cdot \sqrt{e}) = \ln e + \ln\sqrt{e} = 1 + \ln\sqrt{e} = 1.5$

使用计算规则 2 的示例

$\log 3 - \log 4 = \log\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0.125$

$\log 4 - \log 25 = \log\left(\frac{4}{25}\right) \approx -0.796$

$\log\left(\frac{10}{\sqrt{8}}\right) = \log 10 - \log\sqrt{8} = 1 - \log\sqrt{8} \approx 0.549$

$\ln 3 - \ln 4 = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0.288$

$\ln 4 - \ln 25 = \ln\left(\frac{4}{25}\right) \approx -1.83$

$\ln\left(\frac{e}{\sqrt{8}}\right) = \ln e - \ln\sqrt{8} = 1 - \ln\sqrt{8} \approx -0.0397$

使用计算规则 3 的示例

$\log 3^4 = 4 \cdot \log 3 \approx 1.91$

$\log 10^{2x} = 2x \cdot \log 10 = 2x \cdot 1 = 2x$

$1 + \log\sqrt{10} \;=\; 1 + \log 10^{0,5} \;=\; 1 + 0.5\cdot\log 10 \;=\; 1 + 0.5\cdot 1 \;= 1.5$

$\log 10^3 - \log 10^2 \;=\; 3 - 2 \;=\; 1$

$\ln 3^4 \;=\; 4\cdot\ln 3 \;\approx\; 4.39$

$\ln e^{2x} \;=\; 2x\cdot\ln e \;=\; 2x\cdot 1 \;=\; 2x$

$1 + \ln\sqrt{e} \;=\; 1 + \ln e^{0,5} \;=\; 1 + 0,5\cdot\ln e \;=\; 1 + 0.5\cdot 1 \;=\; 1.5$

方程示例

$3^x \;=\; 27 \quad\Leftrightarrow\quad \ln 3^x \;=\; \ln 27 \quad\Leftrightarrow$

$x\cdot\ln 3 \;=\; \ln 3^3 \quad\Leftrightarrow\quad x\cdot\ln 3 \;=\; 3\cdot\ln 3 \quad\Leftrightarrow$

$x \;=\; 3$

$1,8^{-2x} \;=\; 4 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(1,8^{-2x}) \;=\; \ln 4 \quad\Leftrightarrow$

$-2x\cdot\ln 1.8 \;=\; \ln 4 \quad\Leftrightarrow\quad x \;=\; \frac{\ln 4}{-2\cdot\ln 1.8} \quad\Leftrightarrow$

$x \;\approx\; -1.18$

我们将在指数增长公式中分离出时间 t

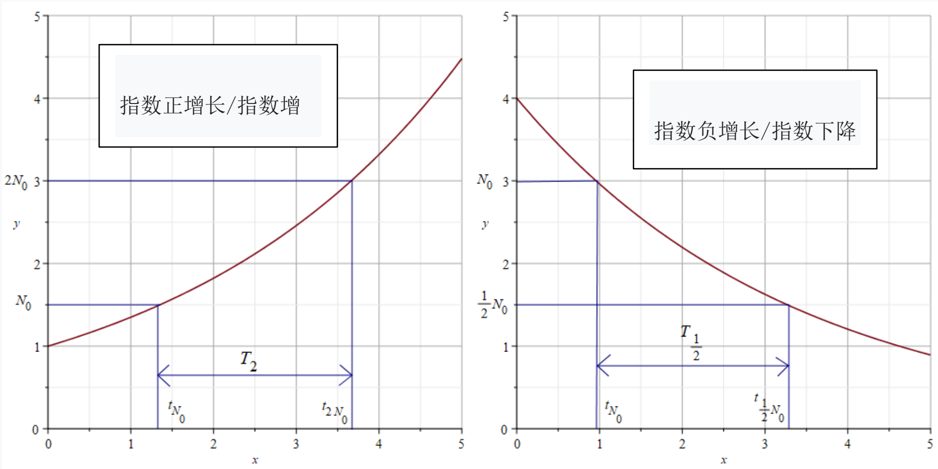
$y \;=\; b\cdot e^{kt} \quad\Leftrightarrow\quad e^{kt} \;=\; \left(\frac{y}{b}\right) \quad\Leftrightarrow$

$\ln e^{kt} \;=\; \ln\left(\frac{y}{b}\right) \quad\Leftrightarrow\quad kt \;=\; \ln\left(\frac{y}{b}\right) \quad\Leftrightarrow$

$t \;=\; \frac{1}{k}\cdot\ln\left(\frac{y}{b}\right)$

例如，这可能是某种细菌生长的时间。

更多理论



显示的两个函数都有方程 $f(x) = b \cdot c^x = b \cdot a^{kx}$

对于指数函数，通常很高兴知道事物何时翻倍或减半。通常，时间在第一轴上，因此倍增常数表示为 T_2，减半常数表示为 $T_{½}$，我们可以推导出它们的计算公式。在第二个轴上，我们用 N 表示数字。起始条件是

$f(t_2) = 2 \cdot f(t)$	=>	$b \cdot c^{t_2} = 2 \cdot b \cdot c^t$	⇔
$c^{t_2} = 2 \cdot c^t$	⇔	$c^{t_2 - t} = 2$	⇔
$ln\ c^{t_2 - t} = ln\ 2$	⇔	$(t_2 - t) \ln c = \ln 2$	⇔
$t_2 - t = \frac{\ln 2}{\ln c}$	⇔	$T_2 = \frac{\ln 2}{\ln c} = \frac{\ln 2}{\ln a^k}$	和
$f(t_{½}) = \frac{1}{2} \cdot f(t)$	=>	$b \cdot c^{t_2} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c^t$	⇔
$c^{t_2} = \frac{1}{2} \cdot c^t$	⇔	$c^{t_2 - t} = \frac{1}{2}$	⇔
$ln\ c^{t_2 - t} = ln \frac{1}{2}$	⇔	$(t_2 - t) \ln c = \ln \frac{1}{2}$	⇔
$t_2 - t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln c}$	⇔	$T_{½} = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln c} = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln a^k}$	

其他功能

这里我们将简单讨论一些比较罕见的功能。

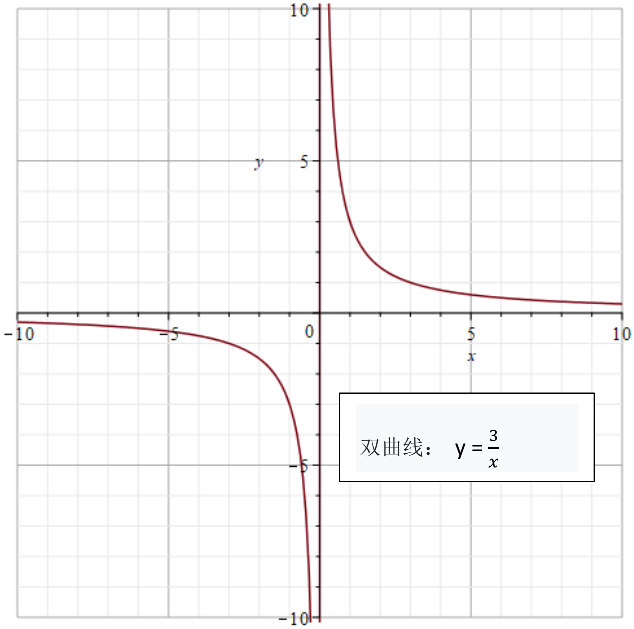
双曲线

双曲线（希腊语：夸张）的方程为

$x \cdot y = k \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{k}{x}$ 或者 $x = \frac{k}{y}$

其中 k 是常数。

可以看出 x 和 y 都不能为 0 – 曲线不能通过 x = 0 或 y = 0 ，因此 x 轴和 y 轴成为函数（曲线）的渐近线（这意味着：不重合）。曲线仍然接近轴，但永远不会到达它。



我们遇到波义耳–马里奥特定律（物理学）中的双曲线，其形式为

$p \cdot V = k$ 仅与第一象限相关

这代表

压力 • 体积=常数

恒温下有效。

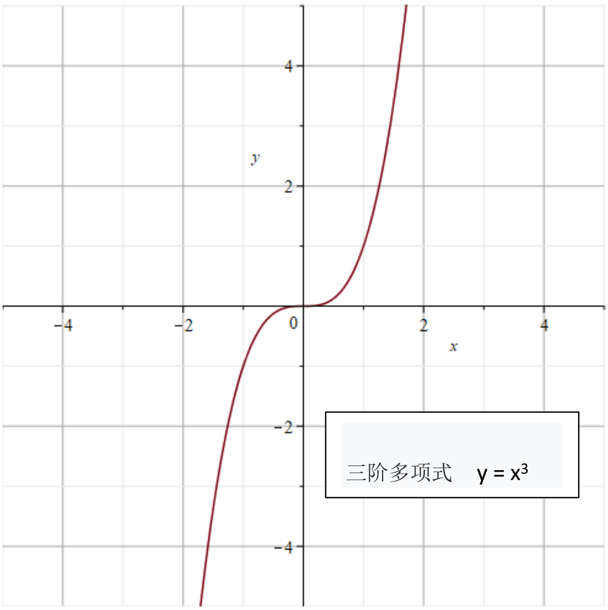
由于绝对压力和体积都不能为负，因此曲线仅与第一象限相关。

在技术上，双曲线形状适用于特殊研磨的磁传感器等。

三阶多项式

三次多项式有很多版本，但基本函数是

$y = x^3$



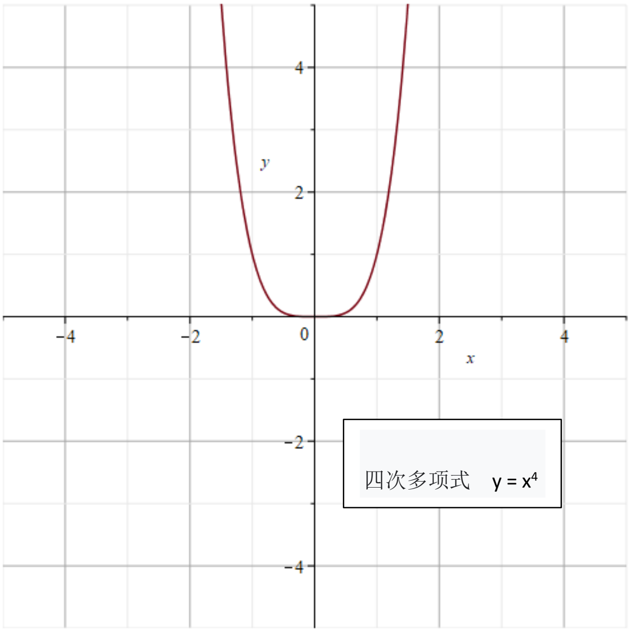
 ISBN 978-87-975307-4-0

一些自然定律是三次方程。例如，开普勒第三定律指出，周期的平方与其到太阳的平均距离成正比，即三的幂。

$T^2 = k \cdot r^3$ 仅与第一象限相关

四次多项式

$y = x^4$



四次多项式很少见。物理学中的一个例子是斯蒂芬-玻尔兹曼辐射定律，该定律指出黑体的辐射强度等于常数乘以温度（开尔文）的四次方：

$I = k \cdot T^4$ 仅与第一象限相关

多项式分数函数

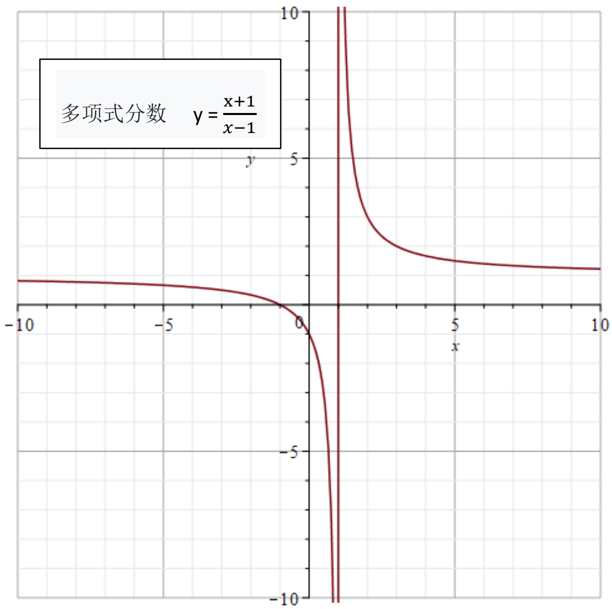
有些功能非常罕见，您可能不会遇到它们。然而，它们可能具有有趣的特征，需要对此进行简短的评论。例如这个多项式分数函数：

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

分母不能为零，因此 x 不能为 1。因此曲线不能通过 x = 1，从而成为渐近线。

如果 x = -1，则 y = 0 必定成立，因为分子将为 0。

因此，我们可以提前看到并显示一些内容：



据观察，x = 1 是垂直渐近线。此外，我们怀疑 y = 1 是水平渐近线。我们将通过在方程中插入 y = 1 来测试：

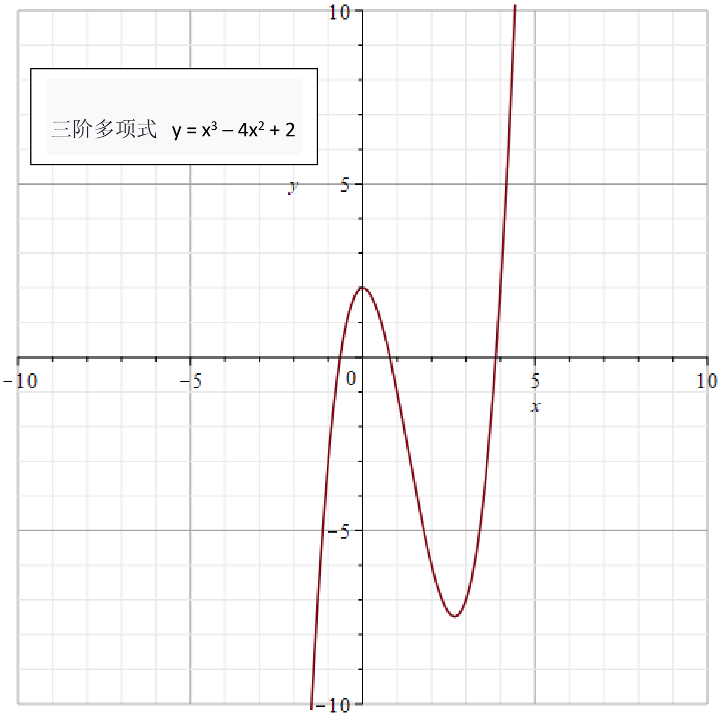
$y = 1 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 2$

这是错误的，因此 y 不能为 1。这意味着曲线不能通过 y = 1 ，因此它是水平渐近线。

特殊三次多项式的示例

最后是三次多项式，这很有趣，因为它有一个局部最大值和一个局部最小值：

$y = x^3 - 4x^2 + 2$

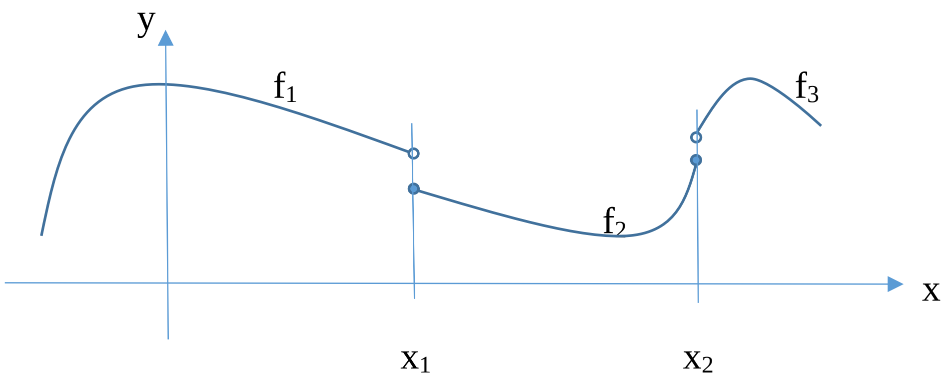


我们可以很容易地读出局部极大点：(0, 2)

局部最小值只能近似读取。

稍后，在微分计算中，我们将看到如何精确计算这些点。

部分定义的函数



然后显示的函数分为三个部分，每个部分都在一个区间中定义

$f_1(x)$ = 区间内的函数方程：$]-\infty\,;\,x_1[$

$f_2(x)$ = 区间内的函数方程: $[x_1\,;\,x_2\,]$

$f_3(x)$ = 区间内的函数方程: $]x_2\,;\,\infty[$

这些部分还可能有更多不同的名称，例如 f、g 和 h。

第三部分：差异化与整合

介绍

现在我们要绕过数学的尖锐但也非常美丽的角落。我们将研究变化的数量以及它们如何变化。它引导我们采用新的计算方法。之前，我们从四种基本算术运算扩展到三角函数（sin、cos、tan）和对数。现在我们进一步扩展，理解这种新计算方式的唯一方法是理解证明。微分和积分必须通过证明来理解。

不过，首先要了解一点数学哲学和历史。古希腊人发现并不能证明一切。我们需要一个基本的，他们称之为公理——这意味着基本。从基础开始，我们必须证明我们所做的事情是正确的。

一个点没有范围。那么它存在吗？是的，就是答案，因此我们有一个公理。如果一个点没有范围，那么一个区域内一定有无数个点？是的，——这是另一个公理。如果面积更大，是否会包含更多的点？是的。无限的东西能比其他同样无限。

直线没有宽度，抛物线、圆或任何其他曲线也没有宽度。数学和其他科学（例如物理学）之间存在显着差异。想象一个球形的球躺在平面上。在数学中，只有一点有联系。在物理学中，这会产生无限的表面压力，但显然不是这样的——没有材料可以承受。物理事实是，圆球和平面都会变形并形成接触区域（而不仅仅是点），从而形成可以计算和测量的表面压力。

古希腊人可能不是第一个考虑这些主题的人，但我们知道，他们考虑过这个问题。我们可以谈论某个点或某个时间点的速度吗？我们能谈谈化学反应在某一时刻的反应速度吗？还是为了生物的生长？而且，我们可以计算一下吗？

答案是肯定的。古希腊人没有成功地找到数学基础。直到这一千六百人才成功地做出了数学证明。对于物理学家艾萨克•牛顿和数学家戈特弗里德•莱布尼茨来说，这几乎是同时发生的。据我们所知，他们当时并不认识，而且做法也不同。牛顿需要新颖的数学来解决物理问题，而莱布尼茨是一位理论数学家。它都是关于计算一个点附近的差异/变化，这就是它被称为：微分的原因。下面将对该技术术语进行更详细的描述。

我们现在将长期证明微分和积分，看看它能让我们进行多少全面的计算。

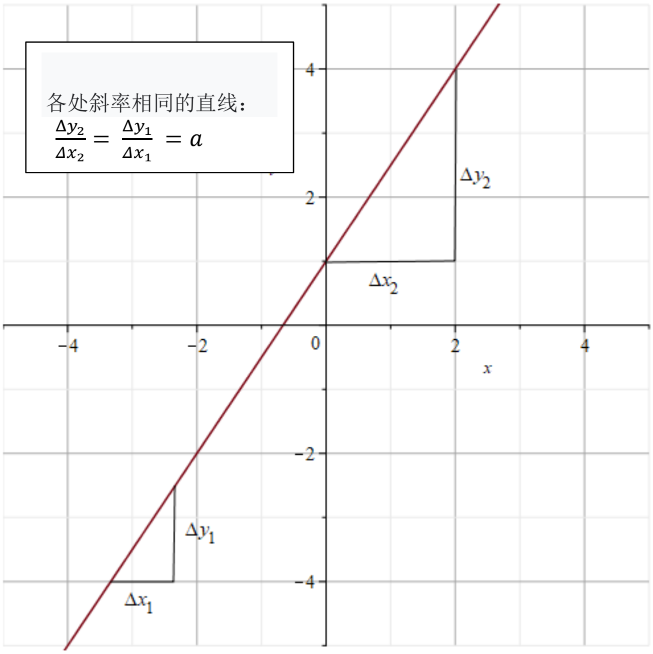
我们不会证明一切，但几乎可以证明——最重要的。

有时，微分和积分被称为无穷小微积分，因为我们在微分时对无穷小部分进行计算，在积分时回忆无穷多个无穷小部分。

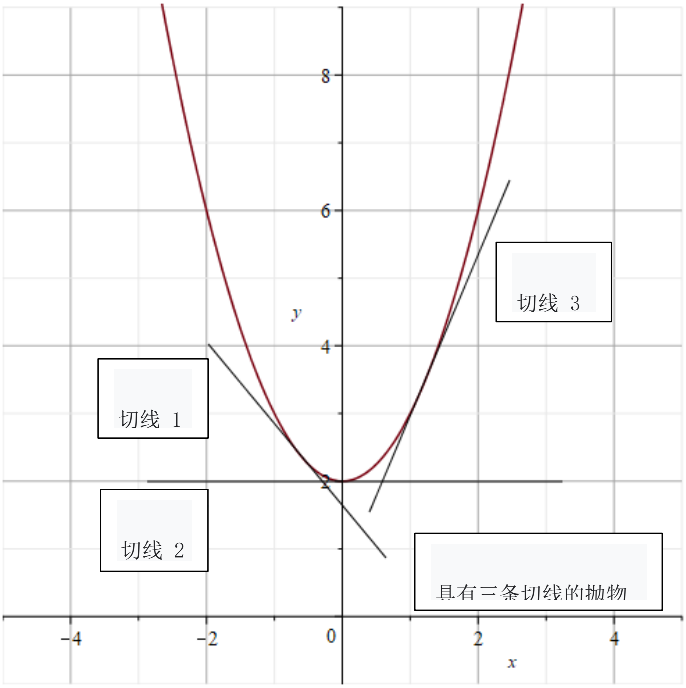
微分学

坐标系中函数/曲线的斜率描述了相关数量的变化。如果斜率为零（水平线），则没有变化 – 无论 x 值如何，我们都有一个恒定的 y 值。

让我们首先考虑线性函数，无论我们在线上的哪个位置，斜率都不会改变。换句话说，无论 Δx_1 变化小还是 Δx_2 变化大，所有 x 的斜率都是相同的



所有其他函数在不同地方都有不同的斜率，例如抛物线：

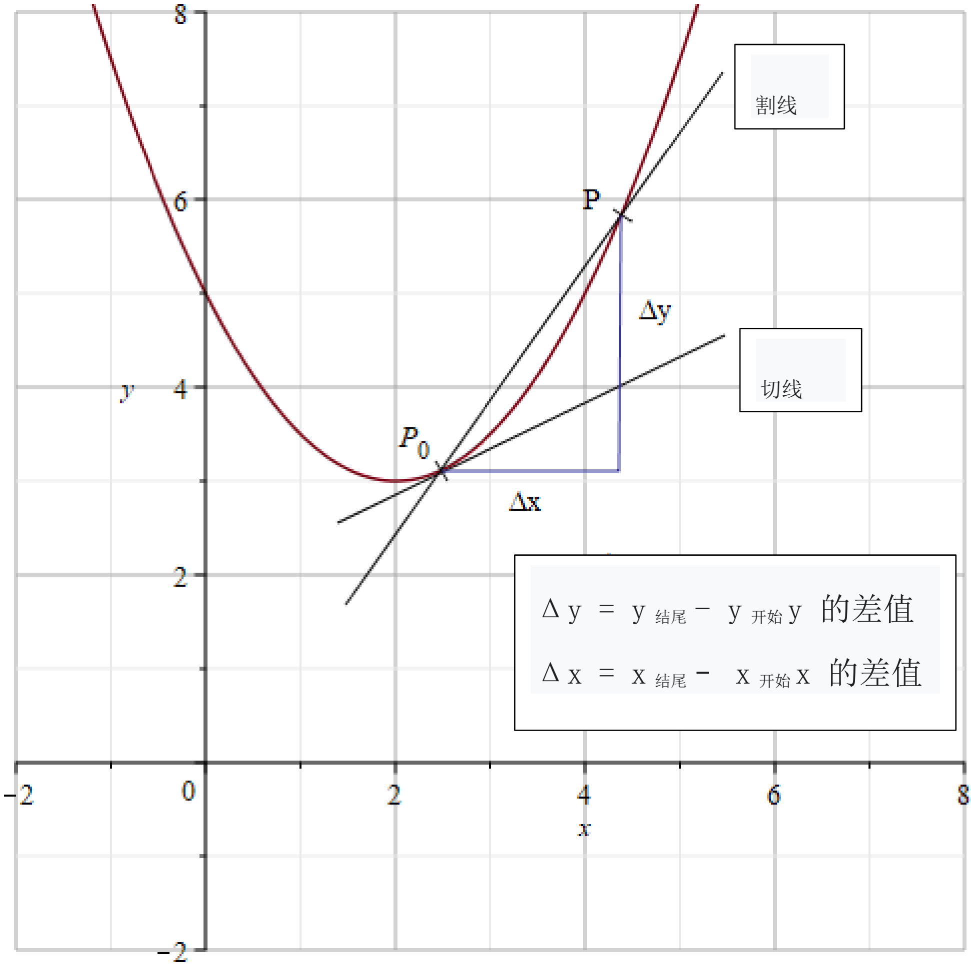


可以观察到，从左到右，所示的抛物线具有负斜率，当我们向顶点移动时，斜率减小，顶点处的斜率为零，然后当我们进一步向右移动时，斜率正且增加。

人眼很敏锐，所以我们能够在抛物线上的一点上画出切线。切线仅与抛物线有一点相切。它是一条切线，我们可以不确定地读取它的斜率。但是我们想要精确一点，那么我们能通过计算找到切线的斜率吗？

如果我们可以确定切线的斜率，我们也可以确定该点处曲线的斜率。他们是一样的。哦，但是一个点没有范围，那么我们如何谈论一个点内曲线的斜率，以及我们如何计算它！？

在下图中，我们有一条抛物线（可以是任何曲线），其割线相交于点 P_0 和 P。



此外，还有一个蓝色的辅助三角形显示割线的斜率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

现在我们想象 P 点沿着抛物线下滑。因此，当接近 P_0 点时，割线将随之滑动并具有较小的斜率。当我们几乎到达 P_0 时，割线几乎变成 P_0 的切线。 Δx 也变小，现在称为 δx，而 Δy 变为 δy。

我们现在已经从 Δx 和 Δy 大且可见的宏观世界（这就是为什么我们使用希腊字母大写 Delta，Δ）转移到 δx 和 δy 无限小的微观世界（这就是为什么我们使用希腊字母大写 Delta）小增量，δ）。

后来，d 取代了 δ，这是我们字母表中的现代小三角洲。因此，我们看到了这一点：

- P 沿着抛物线下滑，几乎与 P_0 重合
- 割线几乎变成相切
- Δx 变为 dx
- Δy 变为 dy
- 割线斜率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 变为正切斜率 $\frac{dy}{dx}$

尽管 P 和 P_0 非常非常接近，但它们不是同一点。因此，我们对点没有范围的公理没有任何问题，因此，在实践中，我们可以讨论点中函数的斜率。

宏 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 称为差商（=差分数）

微 $\frac{dy}{dx}$ 称为微分系数（=导数）

简单来说：

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = 正割斜率 = 差商

$\frac{dy}{dx}$ = 切线斜率 = 微分系数

下一步是按照刚才提到的相同过程计算已知函数的切线斜率 $\frac{dy}{dx}$

微积分的证明 1

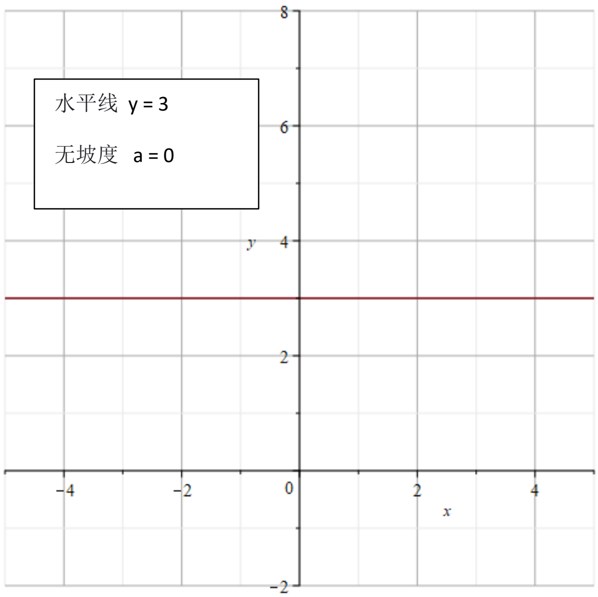
有一些方法。我们将使用三步规则：

1. 计算 Δy
2. 计算 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
1. 让 Δx 趋于零，**求** $\frac{dy}{dx}$

我们将从一条水平线开始，我们已经知道其斜率为 0。因此，我们期望找到微分系数 0。

水平线

$y = b$　　　　或者　　　　$y =$ 持续的



1. 计算 Δy　　　　这里: 0
2. 计算 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$　　　　这里: 0

3. 让 Δx 趋于零，**求** $\frac{dy}{dx}$ 这里: 0

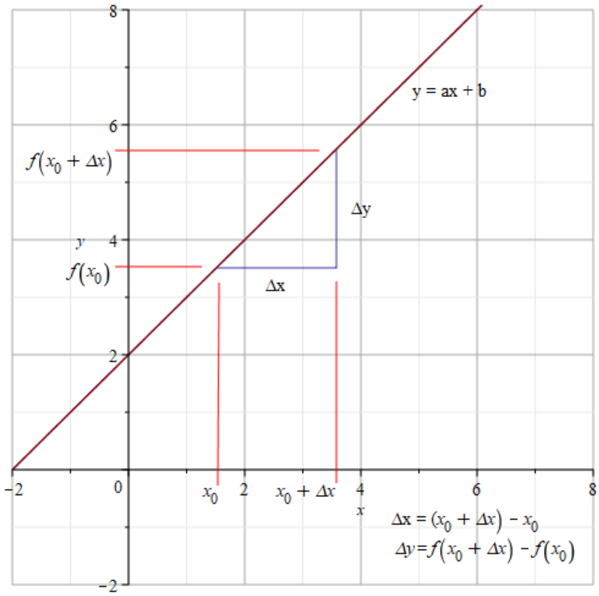
因此，当我们对一个常数求微分时，我们得到 0，即斜率 = 0

换句话说：一个常数的差值是 0，它不会改变。正如预期的那样。

直线

然后我们考虑直线，我们已经知道它具有相同的斜率（即 a），因此到处都有相同的微分系数。

$y = ax + b$ 或者 $f(x) = ax + b$



该图显示一条直线和一个辅助三角形，其一个角位于 x 值 x_0 处。再向右，x 值变为 $x_0 + \Delta x$（因为我们再向右距离 Δx）。

相应的 y 值现在称为函数值：$f(x_0)$ 和 $f(x_0 + \Delta x)$

三步法则

1. 计算 Δy

   $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ =>

   将我们的 x 值插入线方程 $y = ax + b$

   $\Delta y = [a(x_0 + \Delta x) + b] - [ax_0 + b]$ ⇔

   $\Delta y = a \cdot \Delta x$

2. 计算 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

   $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a \cdot \Delta x}{\Delta x} = a$

3. 让 Δx 趋于零，求 $\frac{dy}{dx}$ =>

   Δx 从第 2 点的方程中减少，因此 Δx 对斜率没有影响。它成为了

   $\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$

   它与我们已知的情况非常吻合，即直线到处都有相同的斜率。这里我们称它为 a，其他时候我们可能称它为 c 或 k 以表明它是一个常数。

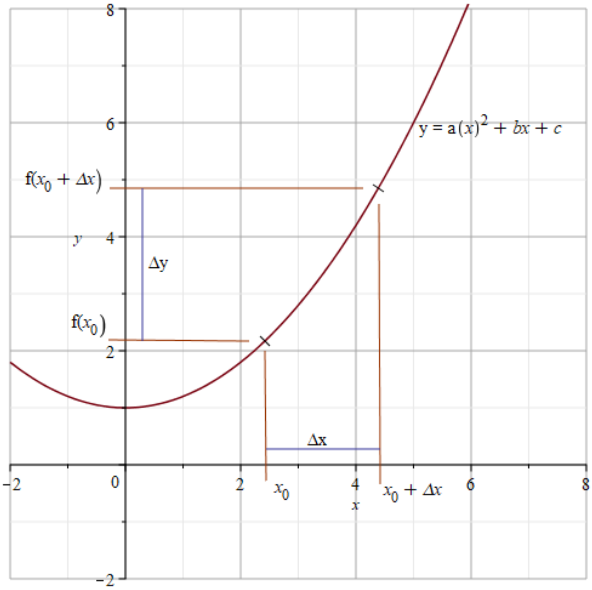
直线的切线斜率（等于直线的微分系数 $\frac{dy}{dx}$）等于数字常数）a。

微分系数也称为 f´(x)。所以：

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = a$ 稍后还会使用 f´(x) 的原因

抛物线

$y = ax^2 + bx + c \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = ax^2 + bx + c$



三步法则

1. 计算 Δy

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

和抛物线的值

$\Delta y = (a(x_0+\Delta x)^2 + b(x_0+\Delta x)+c) - (ax_0^2+bx_0+c)$

$\Delta y = (a(x_0^2+(\Delta x)^2 + 2x_0\Delta x)+bx_0+b\Delta x+c) - (ax_0^2+bx_0+c)$

$\Delta y = ax_0^2 + a(\Delta x)^2 + 2ax_0\Delta x + bx_0 + b\Delta x + c - ax_0^2 - bx_0 - c$

$\Delta y = a(\Delta x)^2 + 2ax_0\Delta x + b\Delta x$

2. 计算 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(\Delta x)(\Delta x) + 2a\cdot x_0\cdot\Delta x + b\Delta x}{\Delta x} = a\Delta x + 2ax_0 + b$$

3. 让 Δx 趋于零，求 $\frac{dy}{dx}$ =>

$\frac{dy}{dx}$ = 2ax + b 　　　因为 x_0 改变 x 来描述 x 的所有值，而不仅仅是我们命名为 x_0 的值

抛物线的切线斜率等于微分系数 $\frac{dy}{dx}$，因此变为一个方程

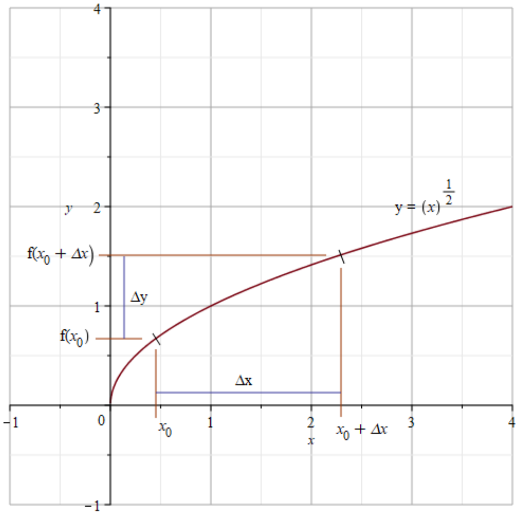
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2ax + b$$

a 和 b 是已知常数，而 x 是变量。

切线斜率取决于 x。换句话说：切线斜率取决于我们在抛物线上的位置。

平方根函数

$y = \sqrt{x}$ 　或更好 　$y = x^{½}$ 　⇔ 　$f(x) = x^{½}$



三步法则

1. 计算 Δy

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

以及平方根函数的值

$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^{½} - x_0^{½}$

2. 计算 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\Delta y = \frac{(x_0 + \Delta x)^{½} - x_0{}^{½}}{\Delta x}$$

分子和分母乘以 $((x_0 + \Delta x)^{½} + x_0^{½})$

$$\Delta y = \frac{((x_0 + \Delta x)^{½} - x_0{}^{½})}{\Delta x} \cdot \frac{((x_0 + \Delta x)^{½} + x_0{}^{½})}{((x_0 + \Delta x)^{½} + x_0{}^{½})}$$

我们使用平方尺

$$\Delta y = \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x \cdot ((xo + \Delta x)^{½} + x_0{}^{½})} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot ((x_0 + \Delta x)^{½} + x_0{}^{½})} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Delta y = \frac{1}{(x_0 + \Delta x)^{½} + x_0{}^{½}}$$

3. 让 Δx 趋于零，求 $\frac{dy}{dx}$ =>

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{2\,x^{½}} = \frac{1}{2}\,x^{-½} \qquad x_0 \text{ 改为 } x$$

切线斜率取决于 x。换句话说：切线斜率取决于我们在曲线上的位置。

多项式

$y = x^n$ ⇔ $f(x) = x^n$ 也称为

我们刚刚看到了两个多项式的微分系数：抛物线和平方根函数。其他多项式呢 $(x^3, x^4, x^{2,3},\ldots)$?

如果我们简化为 $y = x^2$ 微分系数为：

$$y = x^2 \quad => \quad \frac{dy}{dx} = 2x^1 = 2x$$

对于平方根函数

$$y = x^{½} \quad => \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-½}$$

实际上，这两个函数的区别是“将指数作为因子放在前面，让指数减 1”。抛物线很容易看出：“2 放在前面，让指数下降：2 − 1 = 1”。对于平方根函数：“½ 放在前面，指数变为 ½ − 1 = −½ ”

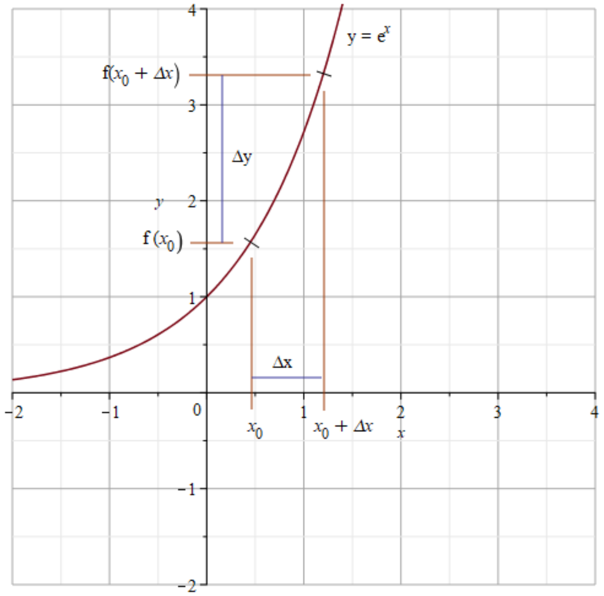
所有多项式都以相同的方式微分：

$$y = x^n \quad => \quad \frac{dy}{dx} = n\cdot x^{n-1}$$ 权力法则

我们不会证明这一点。

自然指数函数

$y = e^x$ ⇔ $f(x) = e^x$



三步法则

1. 计算 Δy

   $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

   以及函数的值

   $y = e^{xo+\Delta x} - e^{xo}$

2. 计算 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{xo+\Delta x} - e^{xo}}{\Delta x} = e^{xo} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

3. 让 Δx 趋于零，求 $\frac{dy}{dx}$

   在我们在第 2 点找到的表达式中，我们看到如果 Δx 趋向于 0，e^{xo} 不会改变。

如果我们看一下分数 $\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ 让 Δx 趋向于 0，$e^{\Delta x}$ 趋向于 1，分子趋向于 0。
分母也将趋于 0。
然而，我们无法看到整个分数走向哪个值。我们需要更多信息：
我们从函数 $y = e^x$ 的定义中得到这一点，其中：

$x_0 = 0$ 插入到 $e^{xo} \cdot \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ 斜率为 1：

$x_0 = 0 \quad => \quad 1 \cdot \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$

只有当分数接近 1 时才会发生这种情况。

组合 $e^{xo} \cdot \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ 走向 $e^{xo} \cdot 1$ 当 Δx 趋于 0 =>

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = e^x$ $\quad$ x_0 改为 x

e 是已知的欧拉数（自然对数的底数），而 x 是可变的。

切线斜率取决于 x。换句话说：切线斜率取决于我们在曲线上的位置。

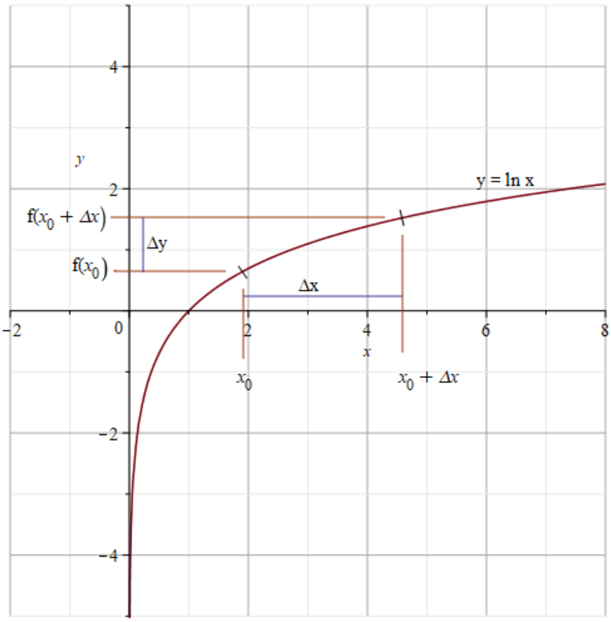
请注意，函数 e^x 的切线斜率是 e^x

$f(x) = e^x$ 和 切线斜率 $= \frac{dy}{dx} = f'(x) = e^x$

没有其他函数具有此特性。

自然对数

$y = \ln x$ 或者 $f(x) = \ln x$



三步法则

1. 计算 Δy

   $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

   以及函数的值

   $\ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0 = \ln\left(\frac{x_0+\Delta x}{x}\right)$

2. 计算 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln\left(\frac{x_0+\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x}$$

   这里我们必须将分数 $\left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)$ 分开，看看当我们让 Δx 接近 0 时会发生什么。我们通过调用分数 k 来做到这一点：

   $\frac{\Delta x}{x_0} = k \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x = kx_0 \quad =>$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(1+k)}{kx_0} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln(1+k)}{k}$$

3. 让 Δx 趋于零，求 $\frac{dy}{dx}$

现在我们看到，当 Δx 趋向于 0 时，k 也会趋向于 0。这意味着式中的分子和分母 $\frac{\ln(1+k)}{k}$ 趋向于 0，但我们看不到分数趋向于什么值，因此我们需要更多信息：

我们通过记住 ln 函数是 e^x 函数的反函数来得到这一点，因此斜率为 1

$x_0 = 1$:

$x_0 = 1$ 插入到 $\frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln(1+k)}{k}$ 斜率为 1：

$x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{\ln(1+k)}{k} = 1$

只有当分数接近 1 时才会发生这种情况。

组合 $\frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln(1+k)}{k}$ 走向 $\frac{1}{x_0} \cdot 1$ 当 k 和 Δx 趋近于 0 时 =>

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{x}$$ x_0 变为 x

切线斜率取决于 x。换句话说：切线斜率取决于我们在曲线上的位置。

一般来说，第 3 步的另一种写法是：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

lim 代表 Limes，拉丁语，意思是限制。因此，它说：

Δx 趋于 0 时差商 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限值为微分系数 $\frac{dy}{dx}$

符号

微分系数可以用多种方式书写。在某些情况下，一种方法是优选的，而在其他情况下，另一种方法是优选的。

其核心是：

$\frac{dy}{dx}$ = 微分系数 = 切线斜率方程

然后是所有其他符号：

函数通常称为 y 或 y(x)，或 f(x)，或简称为 f。因此，微分系数通常称为 y´、或 f´(x)、或 f´。

如果我们只使用 y 或 f，就可以理解我们知道未知数的名称 – 通常是 x。当然，变量可以是其他东西，例如代表时间的 t，并且函数可以被称为除 f 之外的任何名称。

在 CAS 中我们经常有 $\frac{d}{dx}y$ 或者 $\frac{d}{dx}f(x)$ 例如，也可以插入函数/方程 $\frac{d}{dx}(x^2+x)$.

综合起来我们有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}f(x) = y' = f'(x) = f'$$

它们都表达相同的内容，即微分系数，即切线斜率的方程，它告诉我们函数如何变化。

用言语来说

微分系数 = 一阶导数

（正如我们稍后将看到的，我们可以再微分一次并获得二阶导数）。

微分和四种基本算术运算

也许我们有一个由四种基本算术运算（和、差、乘积、除法）组合而成的函数。在这种情况下，我们如何找到函数斜率的方程，即微分系数？

这里整个函数被称为 y 或 f，而函数的各个部分被称为 u 和 v，那么应该避免错误。

总和（加法）

$y(x) = u(x) + v(x)$ ⇔ 或简短

$y = u + v$ => 被微分为

$y' = (u + v)' = u' + v'$

功能逐部分区分

$y = u + v$

如果 x 改变 Δx，则整个函数 y 将发生 Δy 的变化，而部分函数将发生变化：Δu 和 Δv =>

$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v)$ ⇔

$u + v + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$ ⇔

$\Delta y = \Delta u + \Delta v$ => 从宏观到微观

$dy = du + dv$ ⇔ 除以 dx

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ ⇔ 或者

$y' = u' + v'$ ⇔

$y' = (u + v)' = u' + v'$ 因此，逐部分微分

 ISBN 978-87-975307-4-0

例子

$y = 3x^2 + \ln x \quad => \quad y' = 6x + \frac{1}{x}$

差值（减法）。

y(x) = u(x) - v(x)　　　或简短

y = u - v　=>　差异化的

$y' = (u - v)' = u' - v'$

功能是逐个部分区分的。

证明与求和证明类似，只是 v 是负数。

例子

$y = 3x^2 - \ln x \quad => \quad y' = 6x - \frac{1}{x}$

产品（乘法）

$y = u \cdot v$　=>　差异化的

$y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$　　这就是所谓的乘积公式

证明：

$y = u \cdot v$

如果 x 变化了 Δx，则整个函数 y 将变化 Δy，而函数的部分变化：Δu 和　　=>

$y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v)$　⇔

$u \cdot v + \Delta(u \cdot v) \;=\; u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v + \Delta u \cdot \Delta v \quad \Leftrightarrow$

$\Delta(u \cdot v) \;=\; u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v \quad =>$

由于 Δu • Δv 无穷小（无限小），所以该部分可以省略。所以，当我们从宏观到微观时，我们有

$d(u \cdot v) \;=\; u \cdot dv + v \cdot du \quad =>$ 除以 dx

$\frac{d(u \cdot v)}{dx} \;=\; u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} \quad =>$

$y' = (u \cdot v)' = u \cdot v' + v \cdot u'$ 产品配方

例子

$y \;=\; 3x^2 \cdot \ln x \quad => \quad y' = 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 6x \cdot \ln x$

分配

$y \;=\; \frac{u}{v} \quad =>$ 差异化的

$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ 这就是所谓的商公式

证明：

$y \;=\; \frac{u}{v}$

如果 x 发生变化 Δx ，则整个函数 y 将发生 Δy 变化，而函数的部分内容将发生变化： Δu 和 Δv =>

$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} \quad =>$

$\frac{u}{v} + \Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} \quad \Leftrightarrow$

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v(u+\Delta u)}{v(v+\Delta v)} - \frac{u(v+\Delta v)}{v(v+\Delta v)} = \frac{v\cdot u + v\cdot\Delta u - u\cdot v - u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\cdot\Delta u - u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$ 由于 v • Δv 是无穷小，我们有

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\cdot\Delta u - u\cdot\Delta v}{v^2} \quad => \quad \text{从宏观到微观}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\cdot du - u\cdot dv}{v^2} \quad \Leftrightarrow \quad \text{除以 } dx$$

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\cdot\frac{du}{dx} - u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - v'\cdot u}{v^2} \quad \text{商公式}$$

例子

$$y = \frac{3x^2}{\ln x} \quad => \quad \frac{6x\cdot\ln x - x^{-1}\cdot 3x^2}{(\ln x)^2}$$

复合函数的微分

如果 x 的“作用”多于算术运算的四个规则，我们就谈论复合函数。

复合函数微分的最简单方法是通过链式法则，我们推导了链式法则

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy \cdot du}{dx \cdot du}$ ⇔ 按因子 du 扩展

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy \cdot du}{du \cdot dx}$ ⇔

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ 链式法则

因此，我们将函数拆分为 x 所具有的两个“角色”，一一微分并通过乘法将它们聚集起来。

例子

1.

$y = (x^2 + 1)^3$

这里我们选择将“内部”函数称为 u =>

$\frac{du}{dx} = \frac{d(x^2+1)}{dx} = 2x + 0$

和外层函数 y =>

$\frac{dy}{du} = \frac{d(u^3)}{du} = 3u^2 = 3(x^2 + 1)^2$

合并的

$2x \cdot 3(x^2 + 1)^2$ 减少到 $6x \cdot (x^2 + 1)^2$

或者简单地说：

$y = (x^2 + 1)^3$

差异化的内在	$2x$
差异化外层	$3(x^2 + 1)^2$
合并的	$2x \cdot 3(x^2 + 1)^2$

2.

$y = \ln(x^2 - x)$ $\Leftrightarrow$

差异化的内在	$2x - 1$
差异化外层	$\frac{1}{x^2 - x}$
合并的	$\frac{2x-1}{x^2 - x}$

作为参考，链式法则可以扩展到例如

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

这使得它更加有用。不过，我们不再进一步讨论。

更多理论

对于一些表中的表示法，我们利用链式法则再次考虑复合函数，然后改变表示法

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad =>$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x))}{d(g(x))} \cdot \frac{d(g(x))}{dx} \qquad \Leftrightarrow$$

$$y' = \frac{d}{d(g(x))} f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x) \qquad \Leftrightarrow$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

有些表对整个函数以及函数的部分使用 f 和 g，就像这里的情况一样。

正如我们所看到的，推导有点麻烦，但我们的结果是一样的：我们只需区分内部和外部并将两者相乘即可。

微分计算证明 2

利用刚刚实现的新颖公式，我们现在可以进行更多证明。

差异化 e^{kx}

$y = e^{kx}$ 或者 $f(x) = e^{kx}$

被微分为复合函数：

内部，kx 微分为 k

外部，这是 e 函数微分到 e^{kx}

合并的 $\frac{dy}{dx} = f'(x) = k \cdot e^{kx}$

指数函数

$y = a^x$ 或者 $f(x) = a^x$

重新排列 $y = (e^{\ln a})^x \Leftrightarrow y = e^{x \cdot \ln a}$

并微分为复合函数：

内部，它是 x • ln a 微分到 $\ln a$

外部，这是 e 函数微分到 $e^{x \cdot \ln a} = a^x$

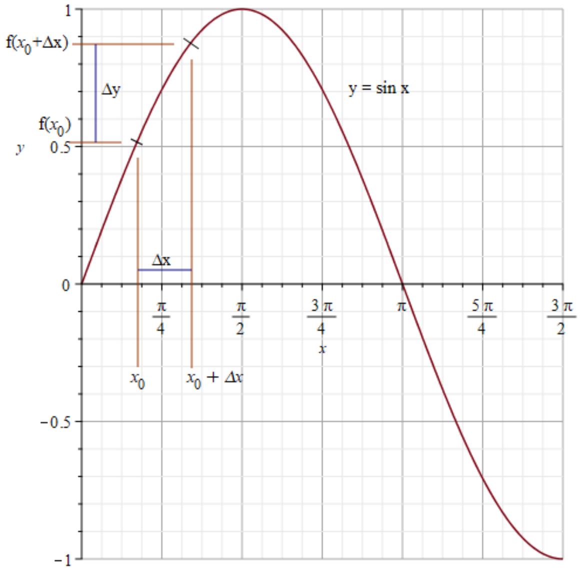
合并的 $\frac{dy}{dx} = f'(x) = a^x \cdot \ln a$

正弦函数

$y = \sin v \Leftrightarrow f(v) = \sin v$ 角度 v（以度为单位）

或者

$y \ = \ \sin x \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \ = \ \sin x$ 　　角度 x 的弧度



我们将再次使用三步规则：

三步法则

1. 计算 Δy

   $\Delta y \ = \ f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

   以及函数的值

   $\sin (x_0 + \Delta x) - \sin x_0$

2. 计算 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin (x_0 + \Delta x) - \sin \ x_0}{\Delta x}$$

   可以证明（我们不展示，我们只是使用它）：

   $\sin x - \sin y \ = \ 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \qquad =>$ 　　　　这里

$$\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \cdot \cos\frac{(x_0+\Delta x)+x_0}{2} \cdot \sin\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{2}$$

$$\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$

插入

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

我们用分子和分母除以 2

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

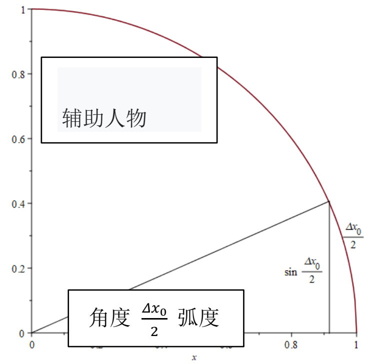
并一分为二

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

3. 让 Δx 向 0 方向求 $\frac{dy}{dx}$

$\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$ 走向 $\cos x_0$

$\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ 走向 1, 因为单位圆中的 $\frac{\Delta x}{2}$ 既是弧度角度，也是角度弧长。当 Δx 趋向于 0（角度变小）时，角度的正弦值和弧长将趋于相同的值。见图：



结合起来，我们将走向 $\cos x_0$ =>

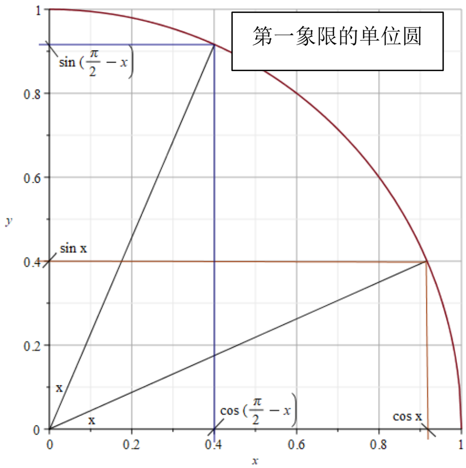
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \cos x \qquad\qquad x_0 \text{ 变为 } x$$

切线斜率取决于角度 x（此处以弧度为单位）。换句话说：切线斜率取决于我们在正弦曲线上的位置。

余弦函数

$y = \cos x \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = \cos x$

正弦和余弦是相关的，其中一个可以重写为另一个。这是一个例子：



角度 x（此处以弧度为单位）是相对于 x 轴标记的，并且与 y 轴相关。可见

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

因此，我们可以对 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 进行微分，而不是对 cos x 进行微分。我们通过区分外部和内部来做到这一点

$$\frac{dy}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot(-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

由图可见等于 - sin x =>

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = -\sin x$$

切线斜率取决于角度 x（此处以弧度为单位）。换句话说：正切斜率取决于我们在余弦曲线上的位置。

正切函数

y = tan x ⇔ f(x) = tan x 角度 x（弧度）

我们使用切线的定义

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

和商公式

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} \quad \text{or} \quad 1 + (\tan x)^2$$

因此，有两个相似的答案，表达方式不同：

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$$

民意调查

通过大量的证明和推导，我们现在已经为微分学奠定了基础。这样，我们也为积分学奠定了基础，稍后我们将对此进行描述。

调查内容是：

功能。 y 或者 f(x)	导数（函数的微分） $\frac{dy}{dx}$ 或者 f´(x)
持续的 (c, k, a, 或者....)	0
ax + b	a
$ax^2 + bx + c$	2ax + b
$x^{½}$ or $\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\, x^{-½}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
e^x	e^x
ln x	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
sin x	cos x
cos x	- sin x
tan x	$\frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$

$y = u + v \quad \Rightarrow \quad y' = (u+v)' = u' + v'$

$y = u - v \quad \Rightarrow \quad y' = (u-v)' = u' - v'$

$y = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$y = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

$y = y(u(x)) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$y = f(g(x)) \quad \Rightarrow \quad y' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

后两个公式表达的意思是一样的。

例子

1.

带关键词的解决方案。第一个示例以替代表示法给出了答案：

$f(x) = 2x^2$	=>	$f'(x) = 4x$	力量
$f = 2x$	=>	$f' = 2$	力量
$y = 2$	=>	$y' = 0$	力量
$f(x) = 2a + 7$	=>	$f'(x) = 0$	常量
$y = 2k + 117$	=>	$\frac{dy}{dx} = 0$	常量
$f(x) = 2a + 3b$	=>	$\frac{d}{dx} f(x) = 0$	常量

$f(x) = 4x^3 + 2\ln x$ => $f'(x) = 12x^2 + 2\cdot\frac{1}{x}$ 逐个术语

$y = 4x^3 + a\cdot\ln x$ => $\frac{dy}{dx} = 12x^2 + a\frac{1}{x}$ 逐个术语

$y = 4x^3 + \ln x$ => $\frac{d}{dx}y = 12x^2 + \frac{1}{x}$ 逐个术语

$4x^3 - \ln x$ => $12x^2 - \frac{1}{x}$ 逐个术语

$4x^3 \cdot \ln x$ => $12x^2 \cdot \ln x + 4x^3 \cdot \frac{1}{x}$ 产品

$\frac{4x^3}{\ln x}$ => $\frac{12x^2\cdot\ln x - 4x^3\cdot x^{-1}}{(\ln x)^2}$ 商

$x^{\frac{1}{3}}$ => $\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}$ 力量

$x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} - 4) = x - 4x^{\frac{1}{2}}$ => $1 - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot x^{-\frac{1}{2}} = 1 - 2x^{-½}$ 逐个术语

$\frac{x}{x+1}$ => $\frac{1(x+1)-x(1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$ 商

$(e^x - 2x)^3$ => $3(e^x - 2x)^2 \cdot (e^x - 2)$ 外、内

6^{-x} => $6^{-x}\cdot\ln 6\cdot(-1)$ 外、内

$xe^x - 1$ => $(1\cdot e^x + x\cdot e^x) - 0 = e^x(1 + x)$ 产品

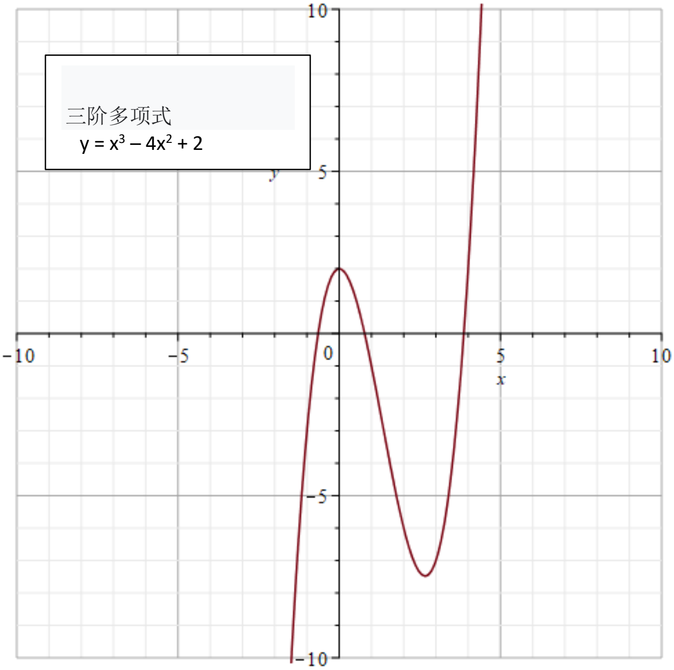
$f(t) = A\cdot\sin(\omega t + \varphi) + k$ =>

$f'(t) = A\cdot\cos(\omega t + \varphi)\cdot\omega + 0$ 外部、内部和 k 至 0

2.

现在我们可以在前面提到的函数中计算局部最大值和最小值（组合称为极值）等。

（对函数的研究是找出它在哪里增加/减少，有最大值/最小值，也许还有渐近线？）



我们通过找到切线斜率为零的位置来实现这一点，这意味着微分系数为零的位置。

$y \;=\; x^3 - 4x^2 + 2$ $\qquad$ =>

$\frac{dy}{dx} \;=\; 3x^2 - 2\cdot 4x + 0 \;=\; 0$ $\qquad$ ⇔

$3x^2 - 8x \;=\; 0$ $\qquad$ ⇔

$x(3x - 8) \;=\; 0$ $\qquad$ ⇔

$x_1 \;=\; 0$ 和 $x_2 \;=\; \frac{8}{3}$ $\qquad$ 并插入到函数中

$y_1 \;=\; 2$ 和 $y_2 \;=\; \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 2 \;=\; -\frac{202}{27} \;\approx\; -7.48$ $\qquad$ =>

点存在极值 $(0, 2)$ 和 $\left(\frac{8}{3}, -\frac{202}{27}\right)$

在曲线上，我们看到 (0, 2) 是局部最大值，$\left(\frac{8}{3}, -\frac{202}{27}\right)$ 是局部最小值，并且它与读数很好地对应。

如果 CAS 不可用，我们必须研究两个 x 值之前、之间和之后的函数，以确定它是最小值还是最大值。我们这样做是通过

- 将例如−1 插入微分系数 =>

  $y = 3\cdot(-1)^2 - 8(-1) = 11$ 这是一个正斜率，表明函数增加
- 例如将+1 插入微分系数 =>

  $y = 3\cdot(1)^2 - 8(1) = -5$ 这是一个负斜率，表明函数减小
- 并在微分系数中插入例如+3 =>

  $y = 3\cdot(3)^2 - 8(3) = 3$ 这是一个正斜率，表明函数再次增加

因此，(0, 2) 是局部最大值，$\left(\frac{8}{3}, -\frac{202}{27}\right)$ 是局部最小值。

3.

之前我们看到过抛物线

$h(x) = -x^2 - 3$

我们找到了它的顶点： $T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right) = T(0, -3)$

我们还可以通过微分系数找到顶点：

在顶点处，切线斜率为 0（水平），因此微分系数为 0。我们使用以下信息：

在顶点处，切线斜率为 0（水平），因此微分系数为 0。我们使用以下信息：

$h'(x) = -2x = 0 \quad => \quad x = 0$

将其插入抛物线方程中以求出 y 值

$h(x) = -0^2 - 3 = -3 \quad => \quad T(0, -3)$

相同的答案。

4.

一家工厂生产一种特殊的测量工具，每个售价 300 磅。利润等于收入减去费用

$P = I - E$

市场不可能饱和，所以 I 等于一件商品的价格乘以商品数量 x

I = 价格 • 售出数量（= 生产数量）= 300 • x

费用分为固定成本（主要是新设备）和可变成本（运营费用）。估计

费用分为固定成本（主要是新设备）和可变成本（运营费用）。估计

$E = F + V = (10\,000) + (11 \cdot x + x^2)$

11x 是与生产的物品数量成正比的费用，而 x^2 最终会变得很重要，因为生产设备会磨损。

每件产品的费用是多少？

什么时候每件产品的利润最大？

 公司: WorldMathBook cvr. 44731703 丹麦 ISBN 978-87-975307-4-0

生产什么时候会出现赤字？

每件商品的费用为

$$\frac{E}{x} = \frac{10\,000+11x+x^2}{x}$$

当以下情况时，每件产品的利润最大

$\frac{E}{x}$ = f(x) 是最小值，当斜率（即微分系数）为零时会发生这种情况：$\left(\frac{E}{x}\right)' = 0$ =>

$$\left(\frac{E}{x}\right)' = \frac{(11+2x)\cdot x-1\cdot(10\,000+11x+x^2)}{(x)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{CAS}$$

x = 100 (或者 x = -100 不能使用的)

因此，第 100 号产品的每个生产产品的利润最大。

当然，生产一开始会出现缺陷，后来当磨损变得严重时，就会再次出现缺陷。这两点是从每项利润和每项费用之间的相等推导出来的：

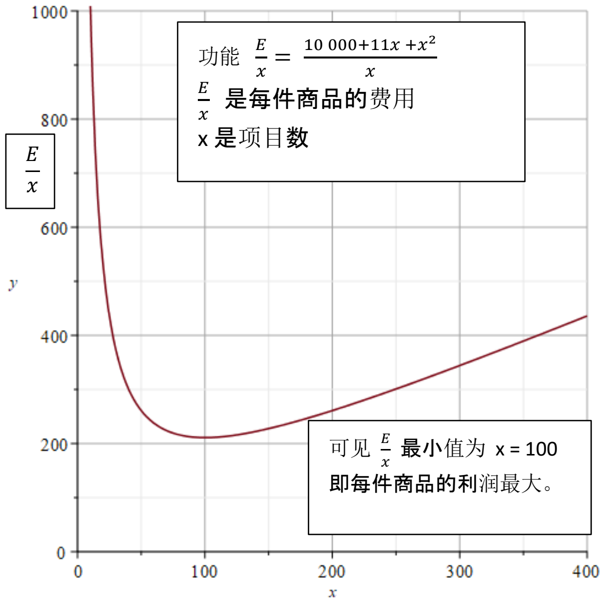
$$300 = \frac{E}{x} \quad =>$$

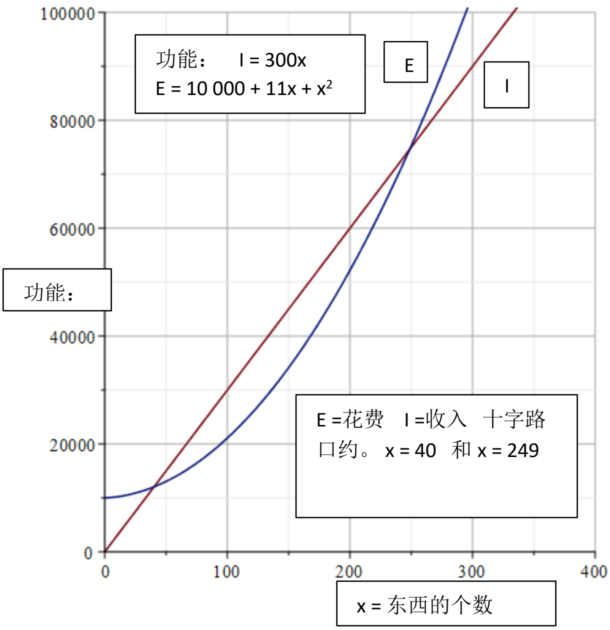
$$300 = \frac{E}{x} = \frac{10\,000+11x+x^2}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \text{CAS}$$

x ≈ 40 and x ≈ 249

因此，在生产 40 种产品之前，我们会出现亏损；在生产 249 种产品之前，我们会盈利；在生产 249 种产品之后，我们会出现亏损。

让我们通过图表进行概述：





计算和读数非常匹配。

5.

如果我们排除空气阻力，自由落体是线性的，并且具有恒定（在限制内）的加速度。伽利略在 1600 年左右推导出了以下自然定律：如果我们有 t 代表时间，s 代表位置（拉伸），v 代表速度，g 代表万有引力加速度，他发现了公式

$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

大约 100 年后，当牛顿推导出微分学以便可以用“点”进行计算时，他继续伽利略的工作，并首先定义：

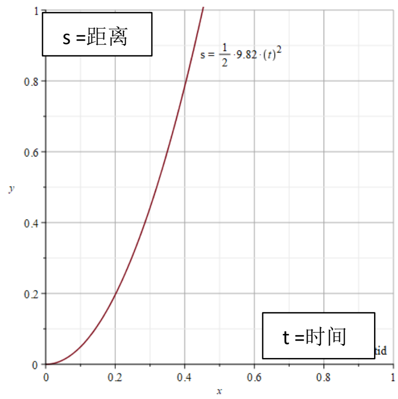
瞬时速度： $v = \frac{\text{距离}}{\text{时间}} = \frac{ds}{dt}$

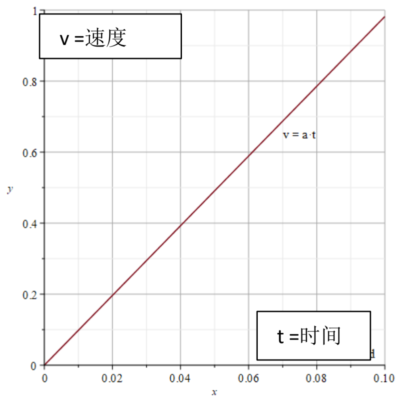
和瞬时加速度： $a = \frac{\text{速度}}{\text{时间}} = \frac{dv}{dt}$

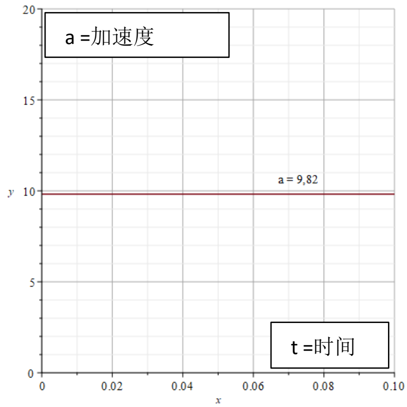
因此，当距离方程对时间微分一次时，我们得到速度， – 当我们对时间微分第二次时，我们得到加速度：

$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$	抛物线方程	=>
$v = \frac{ds}{dt} = a \cdot t$	直线方程	=>
$a = g$	这是常数（等于 9.82 m/s^2）	

t, s 图显示半条抛物线，其中切线斜率显示速度。 t, v 图显示一条直线，其中斜率是加速度。 t, a 图显示一条水平线：







上面也可以这样写：

$$v \;=\; \frac{\text{距离}}{\text{时间}} \;=\; \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} \;=\; s'$$

这是一阶导数

和

$$a \;=\; \frac{\text{速度}}{\text{时间}} \;=\; \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} \;=\; \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}}\right)}{\mathrm{dt}} \;=\; \frac{d^2s}{dt^2} \;=\; v' \;=\; s''$$

这是二阶导数。

6.

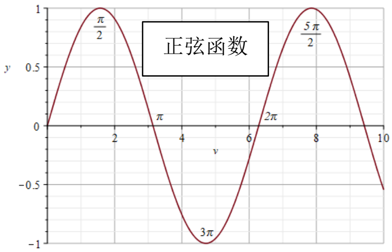
在示例 5 中，二阶导数表示物理意义，即

a = s´´　　加速度=距离差。相对于时间而言两次

在其他示例中，二阶导数仅表示一阶导数曲线的切线斜率。这可以用于对函数的研究，正如我们将在这里看到的：

我们将考虑正弦函数

y = sin v　　　　　　v 是弧度角



正弦曲线最大斜率在哪里？

（似乎是在 π，2π，. . . 等处，但让我们精确计算一下）：

它必须处于最大微分系数。

斜率/微分系数的方程为

y´ = cos x

当它自己的微分系数为 0 时，它有一个最大值：

y´´ = - sin x = 0

这适用于角度 π，2π，3π，…. p• π， 其中 p 是整数。

它与我们认为从图中读到的内容相符。

更多理论

是否有可能继续区分第三个、第四个……时间？

原则上，是的，如果我们的变量 x （或这里的 t）的幂足够高。在自由落体的情况下，我们必须在第三次微分中对时间进行微分。这将产生 0，然后就结束了。

我们之前提到过，五次方程在数学中是可能的，但在其他地方几乎不可能。可以微分五次，每次我们都求出曲线的斜率，但没有任何其他意义。数学是无限的，但我们的世界却不是。

可微分 – 不可微分

我们能够计算曲线上有切线的“点”的微分系数，并且我们声明该函数是可微的。

如果我们无法从同一条曲线的两侧逼近点（此处为 P 和 Q），则曲线/函数是不连续的，我们无法确定切线。因此，我们也无法计算微分商，并且函数在这些点上不可微。

举几个例子：

由于我们无法确定点 P 和 Q 的极限值，因此函数在 P 和 Q 中不可微。

 ISBN 978-87-975307-4-0

积分学

在微分学中，**我**们将其切成非常小的部分来研究细节。在积分演算中，我们再次聚集小部分，使它们成为一个整体，- **回去。所以**，**如果我**们先对一个函数求导，然后积分，我们就会回到原来的函数。然而，可能存在一个常数，该常数在微分过程中消失，因此当我们重新积分时将是一个未知数。

因此，**我**们通过逆计算来进行积分。所有的证明都是在微分过程中做出的，现在我们"**只是**"**必**须逆向使用调查。

我们可以从微分函数返回到函数，即从 f´ **到** f，- **或者我**们可以只积分一个函数，即从 f **到** F。F **被命名**为基函数（回到基函数）。

通常，**在自然科学**领域，我们实际上对细节的了解多于对整体的了解。例如，我们现在可能会观察到某些事情正在发生变化，但随着时间的推移，情况会是什么样子呢？然后，我们需要整合。

然而，**我**们还需要一段时间才能解决此类问题。首先要考虑

如何整合，这是自己存在的。

民意调查：

导数（函数的微分）	函数
$\frac{dy}{dx}$ 或者 f´(x)	y 或者 f(x)
或者	
函数	基函数
f(x)	F(x)

0	常数（通常命名为 c 或 k）
a	ax
2ax + b	$ax^2 + bx$
$\frac{1}{2}x^{-½}$	$x^{½}$ or $\sqrt{x}$
$x^{½}$	$\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}$
$n\cdot x^{n-1}$	x^n 或者
x^n	$\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}$

“因此，我们将指数增加 1，然后除以新的指数”

$\frac{1}{x} = x^{-1}$	ln |x| |x| 因为 x 可能为负数
ln x	x·ln x - x
e^x	e^x
e^{kx}	$\frac{1}{k}\cdot e^{kx}$
a^x	$\frac{1}{\ln a}\cdot a^x$

cos x	sin x
sin x	- cos x
tan x	-ln |cos x|

证明

这两个新颖的功能必须得到证明。

ln x 通过对结果（乘积和逐项）求微分来证明：

x·ln x - x 差异化的 => $(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) - (1) = \ln x$

tan x 也通过结果（外、内）微分来证明：

-ln |cos x| 差异化的 => $-\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \tan x$

符号

我们用这个符号写一个积分： $\int$

拉伸的 S 表示我们求和、求和、收集、积分。整合就是聚集，整合就是聚集。我们收集了衍生品制作的所有非常小的碎片。

如果我们的导数是 $f'(x)$ 我们可以写：

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$ $\Leftrightarrow$

$dy = f'(x) \cdot dx$

现在我们要回到整体。我们通过在左侧收集所有小 dy 块，并在右侧收集所有小块 dx 乘以 f′(x) 来实现这一点：

$\int dy = \int f'(x) \cdot dx$

左边很简单：首先我们将宏 y 切割成微 dy，然后将它们重新组装成 y：

$y = \int f'(x) \cdot dx$ 或者 $f(x) = \int f'(x) \cdot dx$

这就是我们编写普通积分（称为不定积分）的方式，它可以产生完整的解。

这里我们必须使用调查（和数学表格）中已经证明的计算规则来计算右侧。

例子

1.

我们找到了函数的导数

$f(x) = x^2 + x + 3 \quad => \quad f'(x) = 2x + 1 + 0$

为了查看细节，即曲线上点的斜率。

现在我们回到整体。我们通过聚集、整合来做**到**这一点：

$y = \int f'(x) \cdot dx$

$y = \int (2x + 1)\, dx$ 通常我们省略乘法点 =>

$y = x^2 + x + k$

如果我们找到 k，我们需要有关该函数的更多信息。

我们可以写成 f(x) 而不是 y。

2.

$f(x) = x^2 + x^3 \quad =>$

$F(x) = \int f(x)\, dx \quad =>$

$F(x) = \int (x^2 + x^3)\, dx \quad \Leftrightarrow$

$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + k$

3.

我们将做更多的例子。实际上，我们可以回到导数中的例 1，将蕴涵符号从 => 转为 <= ，然后通过添加一个常数从微分到积分：

$f(x) = 2x^2 + k \quad <= \quad f'(x) = 4x$

无论如何，我们将通过以不同的方式/符号编写第一个答案来解决更多问题：

$\frac{dy}{dx} = 2x + 3$ => $y = x^2 + 3x + k$

$y' = 3x^2 - 2x + 2$ => $y = x^3 - x^2 + 2x + k$

$\frac{d}{dx} y = -2x + \frac{3}{x^2} = -2x + 3x^{-2}$ => $y = -x^2 - 3x^{-1} + k = -x^2 - \frac{3}{x} + k$

$\frac{d}{dx} f(x) = 5x^{-6}$ => $f(x) = -x^{-5} + k$

$f'(x) = 4x^{-½}$ => $f(x) = 8x^{½} + k$

$f' = 2$ => $f = 2x + k$

$f(x) = 2\pi$ => $F(x) = 2\pi x + k$ π 是一个数字

$f = e^x$ => $F = e^x + k$

$e^7 \cdot e^{-x}$ => $e^7 \cdot e^{-x} \cdot (-1) + k$ e^7 是一个数字

$6^{-2x} = (6^{-2})^x$ => $\frac{6^{-2x}}{\ln(6^{-2})} + k$

$\frac{x^4}{4}$ => $\frac{x^5}{4 \cdot 5} + k = \frac{x^5}{20} + k$

$x^{\frac{3}{4}}$ => $\frac{4}{7} \cdot x^{\frac{7}{4}} + k$

$\ln x$ => $(x \cdot \ln x - x) + k$

$\frac{1}{x}$ => $\ln|x| + k$

积分和四种基本算术运算

和

就像求导数一样，我们可以将函数逐个积分然后相加，也可以在同一个积分符号下进行积分：

$\int u(x)\,dx + \int v(x)\,dx = \int (u(x) + v(x))\,dx$

我们通过逐部分计算左侧整体的导数来证明这一点

$(\int u(x)\,dx + \int v(x)\,dx)' = (\int u(x)\,dx)' + (\int v(x)\,dx)' = u(x) + v(x)$

以及右边整体的导数

$(\int (u(x) + v(x))\,dx)' = u(x) + v(x)$ 给出相同的（右侧是相似的）。

不同之处

这次我们写的简单一点，暗示 u 和 v 是 x 的函数

$\int u\,dx - \int v\,dx = \int (u - v)\,dx$

我们通过逐部分计算左侧整体的导数来证明这一点

$(\int u\,dx - \int v\,dx)' = (\int u\,dx)' - (\int v\,dx)' = u - v$

以及右边整体的导数

$(\int (u - v)\,dx)' = u - v$ 给出相同的

产品

我们可以乘以积分内部或外部的常数，因此我们可以移动它。这是因为无论我们从宏观到微观还是回到宏观，常数都不会改变。它是一个常数。

为了避免混淆，我们将上面的积分常数 k 称为新常数 c。

$\int c\cdot u(x)\,dx \;=\; c\cdot\int u(x)\,dx$

我们再次通过左侧整体微分来证明

$(\int c\cdot u(x)\,dx\,)' = \; c\cdot u(x)$

并按差异。整个右侧

$(\,c\cdot\int u(x)\,dx\,)' = \; c\cdot u(x)$ 给出相同的

实施例 1

$\int (\,\frac{1}{x} + \ln x)\,dx \;=\; \int \frac{1}{x}\,dx + \int \ln x\,dx \;=\; (\ln|x|) + (x\cdot\ln x - x) + k$

$\int (\,\ln x - 117)\,dx \;=\; \int \ln x\,dx - \int 117\,dx \;=\; (x\cdot\ln x - x) - (117x) + k$

$\int c\cdot x\,dx \;=\; c\cdot\int x\,dx \;=\; c\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2 + k \;=\; c_1\cdot x^2 + k$

由于 c 无论如何都是未知的，我们可以将 c 和 $\frac{1}{2}$ 一起放在一个新常量中，我们称之为 c_1

$\int a\cdot b\cdot x\,dx \;=\; ab\int x\,dx \;=\; ab\cdot\frac{1}{2}x^2 + k \;=\; cx^2 + k$

再次将常数放在一起为 c

替代整合

有些积分很难求解。因此，我们将展示一些聪明的方法，这可能会对我们有所帮助。第一个是替代整合。正如我们之前所看到的，在数学中，可以挑选一些尺寸或部分并称它们为其他名称 – 我们替换。然后我们继续计算新颖性，并且通常（但并非总是）通过替换回来来完成。当 x 有更多“角色”时，这是一个很好的方法。

例子

1.

$\int (4x - 2)^{½}\, dx$

我们选择替代 4x - 2. 我们称之为 t

$\int t^{½}\, dx$ 在哪里 $t = 4x - 2$

我们无法以 t 的方式收集 dx，因此 dx 必须针对 dt 进行更改。我们这样做是通过

$t = 4x - 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{dt}{4}$

哪个被插入

$\int t^{½} \frac{dt}{4} \quad = \quad \int t^{½} \cdot \frac{1}{4} \cdot dt$

$\frac{1}{4}$ 是一个常数，被移到“外面”

$\frac{1}{4} \int t^{½}\, dt$

现在我们可以以 t 的方式收集 dt，因此，我们可以积分

$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + k_t$

并且，我们代回 x

$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (4x - 2)^{\frac{3}{2}} + k_x$ 这就是答案（可能会减少）

积分常数 k_t 属于 t 表达式，并在 x 表达式中更名为 k_x。

简单地说：

$\int (4x - 2)^{½} dx$ 选择： $t = 4x - 2$ =>

$\frac{dt}{dx} = 4$ ⇔

$dx = \frac{dt}{4}$

$\int t^{½} \frac{dt}{4}$ =

$\frac{1}{4} \int t^{½} dt$ =

$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + k_t$ =

$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (4x - 2)^{\frac{3}{2}} + k_x$ 这就是答案（可能会减少）

2.

$\int \frac{2x}{x^2-3} dx$ 选择： $t = x^2 - 3$ =>

$\frac{dt}{dx} = 2x$ ⇔

$dx = \frac{dt}{2x}$

$\int \frac{2x}{t} \cdot \frac{\mathrm{dt}}{2\mathrm{x}}$ =

$\int \frac{1}{t} \cdot \mathrm{dt}$ =

$\ln |t| + k_t$ =

$\ln |x^2 - 3| + k_x$ 这就是答案

对于我们所谓的“t”，没有任何规则，我们必须做好做出另一种选择的准备。作者建议选择“最里面的”和/或“最复杂的”——就像本例中的情况一样。

3.

$\int \sin x \cdot (\cos x)^{½}\, dx$ 选择： $t = \cos x$ =>

$\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dx}} = -\sin x$ ⇔

$\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{dt}}{-\sin x}$

$\int \sin x \cdot t^{½} \cdot \frac{\mathrm{dt}}{-\sin x}$ =

$-\int t^{½}\, dt$ =

$-\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + k_t$ =

$-\frac{2}{3} (\cos x)^{\frac{3}{2}} + k_x$ 这就是答案

分部整合

当 x 位于整个函数 (f) 的两个相乘部分（u 和 v）中时，可以使用分部积分：

$\int u \cdot v \, dx = U \cdot v - \int U \cdot v' \, dx$ U 是 u 的基函数

通过对右边求导来证明该式：

$(U \cdot v - \int U \cdot v' \, dx)' = (U \cdot v)' - (\int U \cdot v' \, dx)' =$ 一部分接着一部分

$(U' \cdot v + U \cdot v') - (U \cdot v') =$ 产品规则和 ′ 废除 ∫

$U' \cdot v = u \cdot v$

通过积分得到左侧。从而证明。

例子

1.

$\int x \cdot \sin x \, dx = (-\cos x) \cdot x - \int (-\cos x) \cdot 1 \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + k$

2.

现在是一个先进的解决方案。我们想要计算

$\int e^x \cdot \sin x \, dx$ 并通过部分积分来实现：

$\int e^x \cdot \sin x \, dx = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \, dx$ 方程 1

这里我们一事无成，但如果我们在后一部分再次使用部分积分：

$\int e^x \cdot \cos x \, dx = e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x) \, dx$

并将其代入方程 1：

$\int e^x \cdot \sin x \, dx = e^x \cdot \sin x - (e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x) \, dx) \Leftrightarrow$

并收集左侧的所有积分：

$$\int e^x \cdot \sin x\, dx + \int e^x \cdot \sin x\, dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x \quad \Leftrightarrow$$

$$2\int e^x \cdot \sin x\, dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x + k \quad \Leftrightarrow$$

$$\int e^x \cdot \sin x\, dx = \frac{1}{2}(e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x) + k =$$

$$\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + k$$ 这就是解决方案。

其他例子

3.

在微分章节中，我们看到了一个带有恒定加速度 g 的自由落体公式的示例。

现在我们将考虑所有具有恒定加速度的线性运动以及作为时间函数的加速度、速度和位置的相应公式。

我们从定义开始

瞬时速度： $v = \frac{\text{距离}}{\text{时间}} = \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow ds = v \cdot dt$

和瞬时加速度： $a = \frac{\text{速度}}{\text{时间}} = \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow dv = a \cdot dt$

根据这些表达式，我们可以积分从加速度到速度再到位置，如下所示：

加速 $a =$ 持续的 $\Rightarrow$

速度 $dv = a \cdot dt \Leftrightarrow \int dv = \int a \cdot dt \Leftrightarrow$

$$v = a\int dt \Leftrightarrow v = at + k \Leftrightarrow$$

$$v = at + v_0$$

位置 $ds = v \cdot dt \Leftrightarrow \int ds = \int v \cdot dt \Leftrightarrow$

$$s = \int (at + v_0)\, dt \Leftrightarrow$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

速度的积分常数是初始速度 v_0

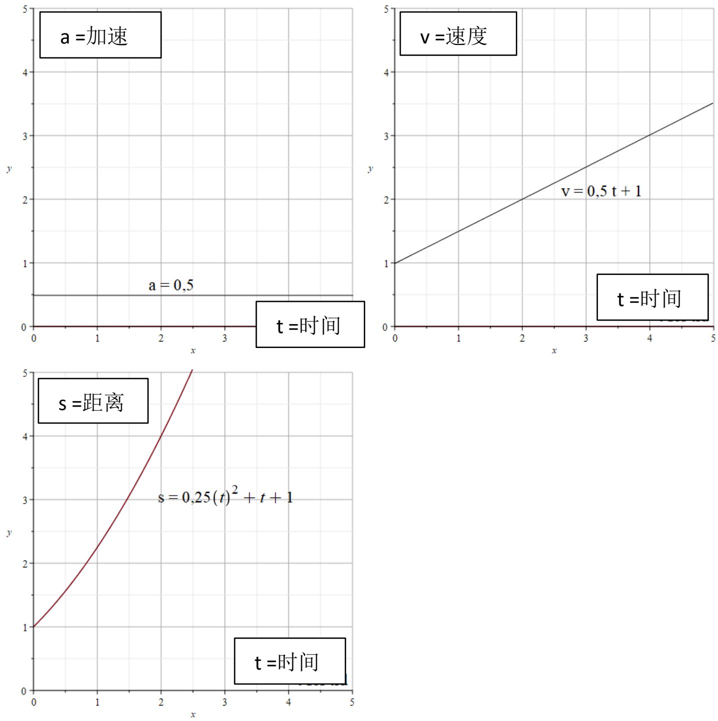
位置的积分常数是初始位置 s_0

a 公式在 t, a 图中呈现一条水平线。

v 公式绘制一条斜率为 a 的直线，并在 t, v 图中从 v_0 开始。

s 公式生成斜率为 v 的二阶多项式，并在 t, s 图中从 s_0 开始。

另请参阅这些插入数字的函数图： a = 0,5 v_0 = 1 s_0 = 1



具体积分

到目前为止，我们已经考虑了返回基函数的微分函数。我们把非常非常小的碎片整合成一个整体。其技术术语是不定积分，它为我们提供了完整的解决方案。

也许我们只对整体的一部分感兴趣。例如，我们可能对过去一无所知，只关注未来。然后我们使用特定的积分来产生特定的/特定的解决方案。

我们这样写

$y = \int_a^b f(x) \cdot dx$

这里指出，我们通过收集从 x = a（下限）到 x = b（上限）的非常小的部分 f(x) • dx 来找到 y。

当我们积分并找到基函数 F(x) 时，我们为 x 插入 b，并减去为 x 插入的 a。我们这样写

$y = \int_a^b f(x) \cdot dx = [F(x)]^b{}_a = F(b) - F(a) =$ 回答

例如

$y = \int_1^3 2x \cdot dx = [x^2]^3{}_1 = 3^2 - 1^2 = 8$

这里我们集成了从 1 到 3 的函数 2x。

计算规则与不定积分相同。然而，我们必须注意两件事：

首先，积分常数 k 均来自 F(b) 和 F(a)，但由于我们有上限减去下限，所以我们也有 k 减去 k，即为零。因此，没有 k。

其次，如果我们通过替代进行积分，极限也会替代。我们将在一个例子中这样做。

例子

1.

$\int_1^2 (\ln x + \ln x^2)\,\mathrm{dx} = \int_1^2 (\ln x + 2\ln x)\,\mathrm{dx} =$ 为了 $x > 0$

$\int_1^2 (3\ln x)\,\mathrm{dx} = 3\int_1^2 \ln x\,\mathrm{dx} = 3\cdot[x\ln|x| - x]^2{}_1 =$

上减下

$3((2\ln 2 - 2) - (1\ln 1 - 1)) = (6\ln 2 - 6) - (-3) \approx 1.16$

2.

$\int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2-3}\,\mathrm{dx}$ 和 $x \neq \sqrt{3}$ 替换、选择： $t = x^2 - 3 \;\Rightarrow$

$\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dx}} = 2x \;\Leftrightarrow$

$\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{dt}}{2x}$

改变限制： $t_{降低} = (-1)^2 - 3 = -2$

$t_{上} = 0^2 - 3 = -3$

替换 dx 和极限：

$\int_{-2}^{-3} \frac{2x}{t} \cdot \frac{\mathrm{dt}}{2x} =$

$\int_{-2}^{-3} \frac{1}{t} \cdot \mathrm{dt} =$ 我们有一个完整的 t 表达式

$[\ln|t|]^{-3}{}_{-2} =$

$\ln|-3| - \ln|-2| =$

$\ln\frac{3}{2} \approx 0.406$ 这就是答案

我们不需要替换回 x 表达式，因为我们还替换了限制并插入了数字。

现在我们通过再次代入 x 表达式来解决同样的问题：

$\int_{-1}^{0} \frac{2x}{x^2-3}\,dx$ 选择： $t = x^2 - 3 \Rightarrow$

$\frac{dt}{dx} = 2x \Leftrightarrow$

$dx = \frac{dt}{2x}$

现在我们将从 x 替换为 t，并且也应该替换从 x 到 t 的限制，但由于我们稍后会返回，所以我们只是将 t 限制称为一些未知值，例如 a 和 b，同时：

我们插入

$\int_{a}^{b} \frac{2x}{t} \cdot \frac{dt}{2x} =$

$\int_{a}^{b} \frac{1}{t} \cdot dt =$ 一个 t 表达式

$[\ln|t|]^{b}_{a} =$

$[\ln|x^2-3|]^{0}_{-1} =$ 回到 x 有 x 限制

$(\ln|0^2-3|) - (\ln|(-1)^2-3|) =$

$\ln 3 - \ln 2 =$

$\ln\frac{3}{2} \approx 0.406$ 相同的答案

3.

汽车开始加速

$a(t) = \frac{\sqrt{t}}{10}$ 其中 t 是以秒为单位的时间

60 秒后的速度 v 是多少，汽车有多远，距离 s，以米为单位？

我们从加速度到速度，再到距离进行积分：

$a = \frac{dv}{dt}$ => $dv = a\,dt$ => 功能 a 插入

$v = \int_0^{60} \frac{\sqrt{t}}{10}\,dt = \frac{1}{10} \int_0^{60} t^{½}\,dt = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2}{3} \left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{60} \right) =$

$\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2}{3}(60^{\frac{3}{2}})\right) - (0) = 31 \frac{m}{s} \; \left(\approx 110 \frac{km}{hour}\right)$ 这是速度

$v = \frac{ds}{dt}$ => $ds = v\,dt$ => 功能 v 插入

$s = \int_0^{60} [\frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3}(t^{\frac{3}{2}})]\,dt = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} \int_0^{60} t^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \left[t^{\frac{5}{2}}\right]_0^{60} \right)$
$=$

$\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}(60^{\frac{5}{2}})\right) - (0) \approx 744 \text{ m}$ 这是距离

该示例将在“区域”一章示例 4 中进一步考虑。

领域

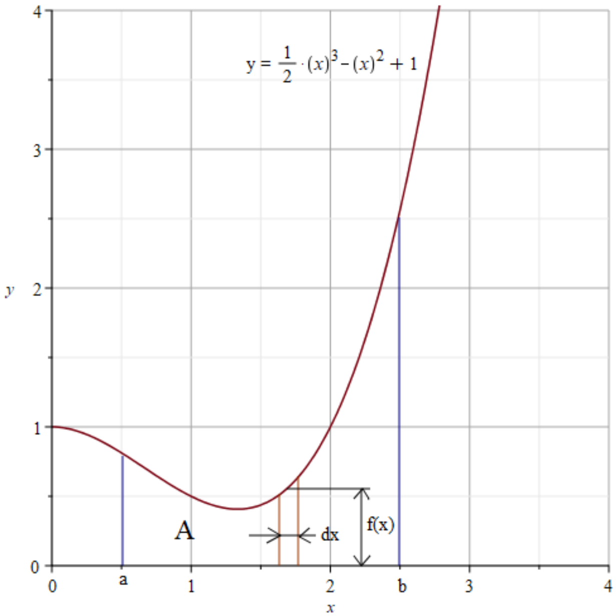
在数学中，通常在推导出公式并开发出工具后，结果发现该工具可能有不同的用途。

特定积分还可以用作一种高级方法来查找其他“不可能”图形的区域。

让我们以另一种方式再次考虑这个表达式：

$A = \int_a^b f(x) \cdot dx$　　　　　　　　现在称为

是 x 方向上的一个很小的距离，而 f(x)是 f(x)方向（y 方向）上对应的距离。乘法：f(x) • dx 形成一个很小的区域。如果我们收集从 a 到 b 的所有微观区域（非常小的条带），我们就得到了一个可见的宏观区域。条带的高度 f(x) 随函数的不同而变化，请参见图中的以下示例



由于 dx 无限小，因此实际上 f(x) 将是中间和两侧条带的高度。只是，这里 dx 显示得足够宽，让我们能够看到它。

由 x 轴、曲线以及直线 x = a 和 x = b 限定的面积可以使用特定积分来精确计算。

例子

1.

图中面积为

$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx \quad \Leftrightarrow$$

$$A = \int_{0,5}^{2,5} \left(\frac{1}{2}x^3 - x^2 + 1\right) dx \quad \Leftrightarrow$$

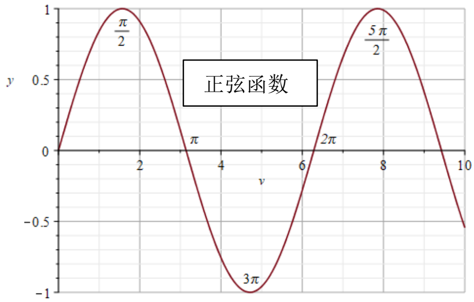
$$A = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x\right]^{2,5}_{0,5} \quad \Leftrightarrow$$

$$A \approx (4{,}88 - 5{,}21 + 2{,}5) - (0{,}0078 - 0{,}0417 + 0{,}5) \quad \Leftrightarrow$$

$$A \approx (2{,}17) - (0{,}466) \approx 1{,}704$$

2.

如果我们位于 x 轴下方，则函数值 f(x) 为负，面积也将变为负。因此，如果面积低于 x 轴，我们将进行数值计算。例如，如果我们找到 x 轴和从 x = 0 到 x = 2π 的正弦曲线之间的面积



$$A = \int_0^{\pi} \sin x \cdot dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \cdot dx \right| \quad \Leftrightarrow$$

$$A = (-\cos\pi - (-\cos 0)) + |(-\cos 2\pi - (-\cos\pi))| \quad \Leftrightarrow$$

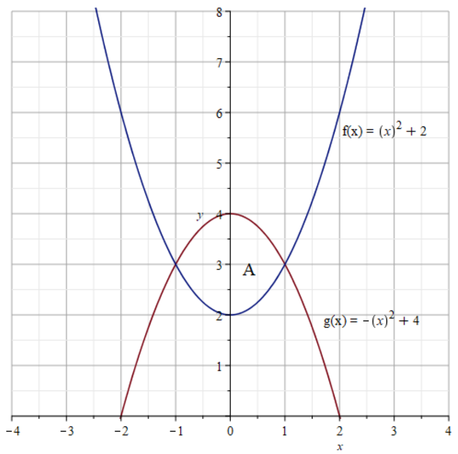
$$A = (-(-1) - (-1)) + |(-1 - (-(-1))| = 2 + 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$A = 4$$

3.

让我们找到这两条抛物线之间的公共面积

$f(x) = x^2 + 2$ 和 $g(x) = -x^2 + 4$



我们找到抛物线相交的极限，即

$$f(x) = g(x) \quad =>$$

$$x^2 + 2 = -x^2 + 4 \quad \Leftrightarrow$$

$2x^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x = -1$ 和 $x = 1$

现在我们可以通过求 g 下的面积并减去 f 下的面积来积分

$$A = \int_{-1}^{1} (-x^2 + 4)\,dx - \int_{-1}^{1} (x^2 + 2)\,dx \quad \Leftrightarrow$$

$$A = \left[(-\frac{1}{3}x^3 + 4x) - (\frac{1}{3}x^3 + 2x)\right]_{-1}^{1} \quad \Leftrightarrow$$

$$A = ((-\frac{1}{3} + 4) - (\frac{1}{3} + 2)) - ((\frac{1}{3} - 4) - (-\frac{1}{3} - 2)) \quad \Leftrightarrow$$

$$A = \frac{4}{3} - (-\frac{4}{3}) \quad \Leftrightarrow$$

$$A = \frac{8}{3}$$

4.

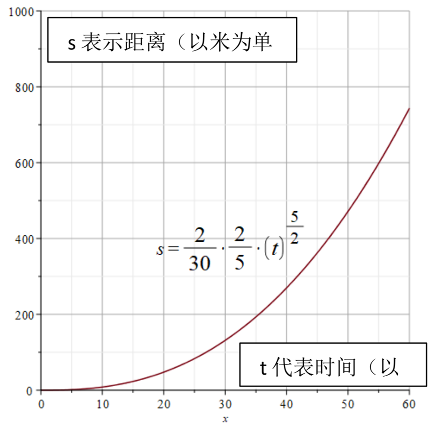
我们将继续“特定积分”一章中的示例 3，其中一辆加速汽车：

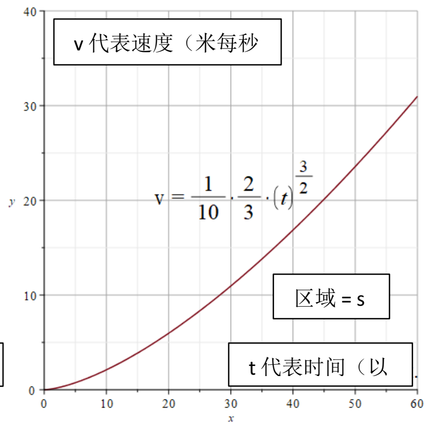
我们有： $a = \frac{\sqrt{t}}{10} \quad => \quad v = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \quad => \quad s = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot t^{\frac{5}{2}}$

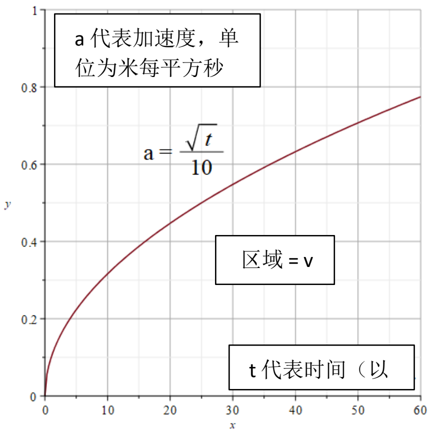
现在我们可以通过读取 t,a 曲线下的面积以图形/数字方式找到速度 v。从 t = 0 到 t = 60 秒，该区域观测到的速度相当于每秒 31 米。

我们可以通过读取 t,v 曲线下的面积来找到距离 s。从 t = 0 到 t = 60 秒，观测到的面积相当于 744 米。

显然，我们的读数存在不确定性，但我们观察到了对应关系。


s 表示距离（以米为单
$s = \frac{2}{30} \cdot \frac{2}{5} \cdot (t)^{\frac{5}{2}}$
t 代表时间（以

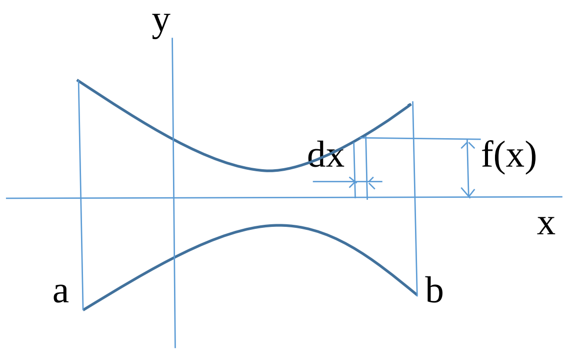

v 代表速度（米每秒
$v = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot (t)^{\frac{3}{2}}$
区域 = s
t 代表时间（以


a 代表加速度，单位为米每平方秒
$a = \frac{\sqrt{t}}{10}$
区域 = v
t 代表时间（以

卷

我们可以围绕 x 或 y 轴旋转 2D 区域并获得 3D 体积。

绕 x 轴旋转的公式推导



如果我们绕 x 轴旋转无限薄的条带，我们就会得到一个微型圆柱体。宏观圆柱体的体积

$V = \pi \cdot r^2 \cdot l$ l 代表长度

对于我们的微型圆柱体来说，体积是

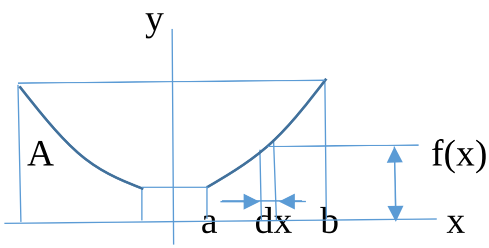
$dV = \pi \cdot f(x)^2 \cdot dx$

通过从 a 到 b 的积分（聚集所有微型圆柱体）

$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$ 绕 x 轴的旋转体积

因此，当我们有函数表达式时，就可以计算体积，该函数表示半径如何变化。

绕 y 轴旋转的公式推导



通过绕 y 轴旋转无限薄条，我们得到了一个具有体积的圆柱壳

dV = 高度 • 周长 • 微观厚度 =>

$dV = f(x) \cdot 2\pi x \cdot dx$ =>

当我们从 a 到 b 积分（收集所有微型圆柱壳）时，体积 – 数值计算（x 或 f(x) 可能为负） – 是

$V = \left| 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x)\, dx \right|$ 绕 y 轴的旋转体积

如图所示，旋转体积看起来就像体育场看台下方的空间。

我们还可以看到面积 A 绕 y 轴旋转时的旋转体积。

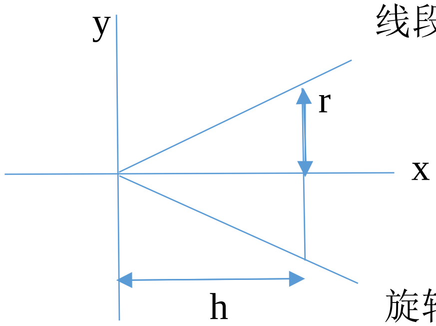
如果 a = 0，则中间不会有洞。

例子

1.

我们将找到圆锥体体积的公式。

我们将一条线段绕 x 轴旋转一次，得到一个向下的圆锥体。



线段：$f(x) = a \cdot x = \frac{r}{h} \cdot x$

旋转线段

$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$ =>

$V = \pi \cdot \int_0^h (\frac{r}{h} \cdot x)^2 \, dx$ r 和 h 是常数 ⇔

$V = \pi \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \int_0^h x^2 \, dx$ ⇔

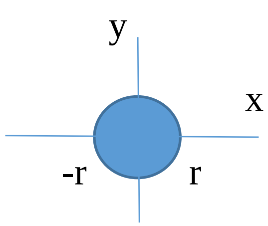
$V = \pi \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$ ⇔

$V = \pi \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \left(\frac{h^3}{3} - 0\right)$ ⇔

$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ 这是圆锥体体积的公式

2.

另外，让我们求出球体的体积：



中心有一个圆

坐标系的

有方程

$x^2 + y^2 = r^2$

整个圆只能描述为参数函数（参见向量函数章节）。作为“普通”函数，我们必须为 x 轴上方的半圆建立方程

$r^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y = (r^2 - x^2)^{½} \Leftrightarrow f(x) = (r^2 - x^2)^{½} \Rightarrow$

这个半圆绕 x 轴旋转一次，限制是 -r 和 r

$$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} f(x)^2 \, dx \Rightarrow$$

$$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} ((r^2 - x^2)^{½})^2 \, dx \Leftrightarrow$$

$$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \, dx \quad \text{分成两半} \quad \Leftrightarrow$$

$$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} r^2 \, dx - \pi \cdot \int_{-r}^{r} x^2 \, dx \quad r^2 \text{是一个常数} \quad \Leftrightarrow$$

$$V = (\pi \cdot r^2 [x]^{r}_{-r}) - \left(\pi \cdot \left[\frac{1}{3} x^3\right]^{r}_{-r}\right) \Leftrightarrow$$

$$V = (\pi \cdot r^3 - (-\pi \cdot r^3)) - \left(\pi \cdot \left(\frac{1}{3} r^3 - \left(-\frac{1}{3} r^3\right)\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$V = 2\pi \cdot r^3 - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \Leftrightarrow$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad \text{这是球体的体积}$$

3.

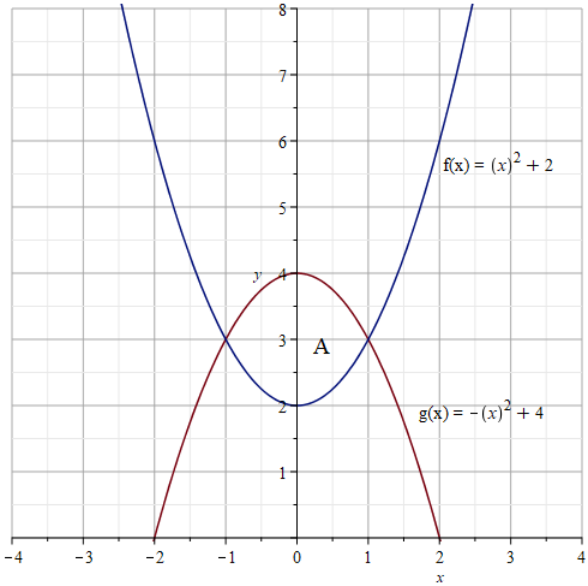
我们还可以找到两条曲线之间的旋转体积。这里我们将对前一章最近的示例 3 中的两条抛物线进行处理。我们绕 y 轴旋转：

这里的函数 f(x) 变成“上减下”：

$(-x^2 + 4) - (x^2 + 2) \Rightarrow$

限制范围为 0 到 1， - 因为它是要旋转一次的公共区域的一半。

$$V = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x)\, dx \qquad =>$$



$$V = 2\pi \cdot \int_{-0}^{1} x \cdot ((-x^2 + 4) - (x^2 + 2))\, dx \qquad \Leftrightarrow$$

$$V = 2\pi \cdot \int_0^1 (-2x^3 + 2x)\, dx \qquad \Leftrightarrow$$

$$V = 2\pi \left[-\frac{1}{2}x^4 + x^2\right]_0^1 \qquad \Leftrightarrow$$

$$V = 2\pi \left(\left(-\frac{1}{2} + 1\right) - (0)\right) \qquad \Leftrightarrow$$

$$V = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow$$

$V = \pi \approx 3.14$ 这是体积

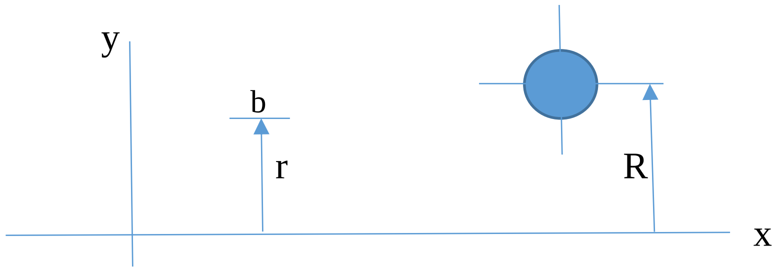
古尔丁的规则

古尔丁的规则还基于围绕不相交的轴旋转图形。有两条规则：

1. 曲线段的旋转，将渲染一个区域。
2. 旋转一个区域，这将渲染一个体积。

例子

1.



左侧显示一条线段。宽度为 b。绕 x 轴旋转呈现平带。带的面积为

A = b · 圆周 =>

$A = b \cdot 2\pi r$

这是古尔丁的第一条规则。它对于曲线段也有效，其中 r **是曲**线重心的旋转半径。然而，重心的确定不是本书的主题。

如果我们生产一条 b = 20 mm、$r_{中间}$ = 300 mm **的平皮**带，则皮带的平均面积（沿中性线）变为：

$A_{平均的} = 20 \cdot 2\pi \cdot 300 \approx 37\ 700$ mm

右侧显示了一个半径为 r 的圆，它绕 x 轴旋转时变成一个名为环形线圈（“甜甜圈”）的环。环形线圈的体积变为

V = A · 圆周 =>

V = A $_{圆圈}$ · $2\pi R$ =>

V = $\pi r^2 \cdot 2\pi R$

这是古尔丁的第二条规则。它对于不对称区域也有效，其中 A 相应计算，其中 R 是该区域重心的旋转半径。然而，重心的确定不是本书的主题。

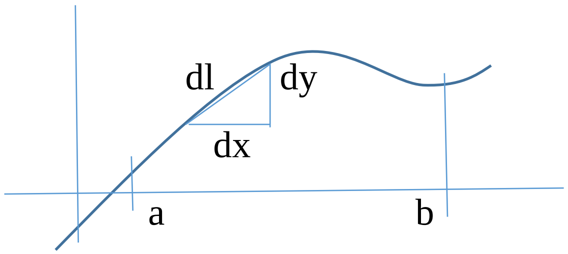
如果我们生产半径为 r = 3 mm 且中心线半径为 R = 25 mm 的橡胶 O 形圈，则 O 形圈的体积为

V = $(\pi \cdot 3^2) \cdot (2\pi \cdot 25)$

V ≈ 4 441 mm^3

例如，该信息可用于计算生产需要多少生橡胶粉

曲线长度



我们在无穷小的小直角三角形上使用毕达哥拉斯，其中 dl 是曲线的割线：

$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ 和 $dy = f'(x) \cdot dx$

被插入的 =>

$(dl)^2 = (dx)^2 + (f'(x) \cdot dx)^2$ ⇔

$dl = \sqrt{(dx)^2 + (f'(x) \cdot dx)^2)}$ ⇔

$dl = \sqrt{(1 + f'(x)^2) \cdot (dx)^2}$ ⇔

$dl = \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$ =>

$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ or

$l = \int_a^b (1 + f'(x)^2)^{½}\, dx$ 这是从 a 到 b 的曲线长度

因此，在这里，就像面积和体积一样，只要将曲线/图形写成函数，我们就可以精确计算。

例子

我们将找到函数 f(x) = $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 从 x = 0 到 x = 2 的曲线长度：

$l = \int_a^b (1+f'(x)^2)^{½}\,dx$ 在哪里

$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}$ =>

$\int_0^2 (1+(\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}})^2)^{½}\,dx$ ⇔

$\int_0^2 (1+\frac{x}{4})^{½}\,dx$ 选择： $t = 1+\frac{x}{4}$

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{4}$

$dx = 4\cdot dt$

$4\int_a^b t^{½}\,dt = 4\left[\frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}}\right]_a^b = 4\left[\frac{2}{3}(1+\frac{x}{4})^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = 4\,[(\frac{2}{3}\cdot(\frac{3}{2})^{\frac{3}{2}}) - (\frac{2}{3})]$

≈ 2.24 这是曲线长度

通常计算曲线长度非常困难，因此通常采用 CAS。

微分方程

同时具有量（y）及其微分系数（y´）的方程称为微分方程。
它描述了一个数量，以及它如何变化——通常与时间有关。
我们现在讨论用于解决复杂问题的高等数学。

一些技术术语：

微分方程通过积分微积分求解。因此，就像其他积分一样，我们有一个不定解 = 完全解 = 具有未知积分常数的通解 – 或一个特殊解 = 积分常数被缩短的特定解。

具有 y´（一阶导数）的微分方程称为一阶微分方程。具有 y´´（二阶导数）的微分方程称为二阶微分方程。

仅包含 y 部分（即包含 y、y´、y´´...）的微分方程称为齐次 – 否则为非齐次。

典型微分方程

我们将推导并证明求解一个基本微分方程和四个典型微分方程的公式。第四个公式求解许多微分方程。此外，我们将推导并证明求解一种特殊类型逻辑微分方程的公式。

基本微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = k \cdot y \qquad\qquad =>$$

通过分离变量来解决

$$\frac{dy}{y} = k \cdot dx$$

这里我们称其为定理 0，并在示例 0 中使用它：

示例 0

我们如何预测放射性物质随时间的衰变？

我们通过观察当前发生的微小变化，然后整合过去和未来的全貌来做到这一点。当然，存在不确定性，但这里我们介绍一些基础知识：

放射性物质的活度 A 等于衰变常数 k 乘以样品中放射性原子的数量 N

$A = k \cdot N$

活度也等于无穷小时间 dt 内放射性原子数量 dN 的变化

$A = -\frac{dN}{dt}$ 负，因为活性减少 =>

右边是一样的

$-\frac{dN}{dt} = k \cdot N$ $\Leftrightarrow$

这里我们将变量分开，即我们将 N 收集到左侧，将 t 收集到右侧

$\frac{dN}{N} = -k \cdot dt$ $\Leftrightarrow$

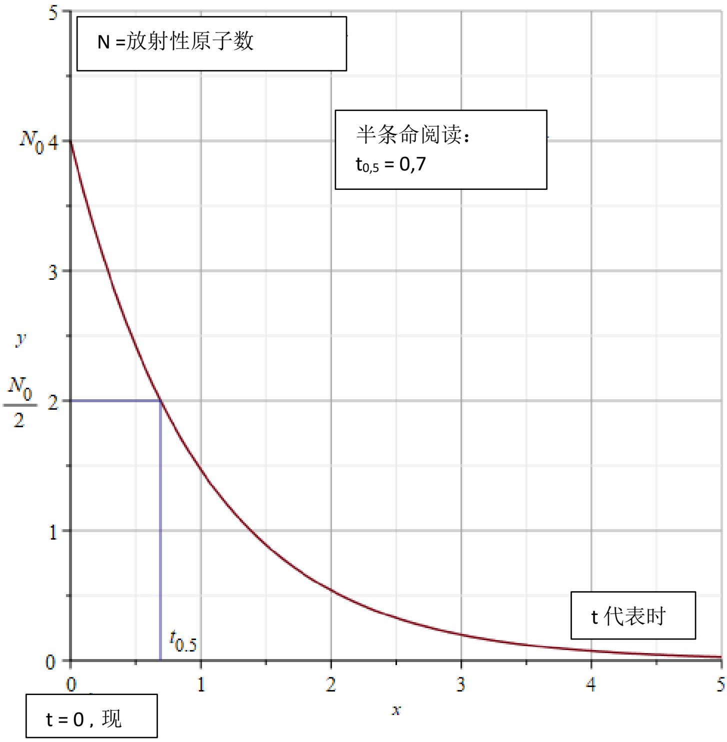
如果 N_0 是时间 0（现在）的放射性原子数，t 是未来时间，我们有

$\int_{No}^{N} \frac{1}{N}\, dN = -k \int_{o}^{t} dt$ $\Leftrightarrow$ $\ln N - \ln N_0 = -k \cdot t$ $\Leftrightarrow$

$\ln \frac{N}{No} = -k \cdot t$ $\Leftrightarrow$ $\frac{N}{No} = e^{-k \cdot t}$ $\Leftrightarrow$

$N = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ 这就是答案。

在图表中，曲线原则上看起来是这样的。当/如果我们知道 k 时，曲线就会被量化。



该曲线呈指数递减且渐近于第一轴。放射性永远不会变为零。因此，很高兴知道我们何时达到放射性原子数量 $\frac{No}{2}$ 的一半。相应的时间量称为半衰期，如图所示。这样，我们就可以比较各种放射性物质的半衰期。对于某些放射性材料（如铂178），衰变速度很快，只需几秒即可测量，而其他材料（例如某些类型的铀）则需要数百万年的时间才能衰变。

更多理论

四个典型的微分方程是：

（请注意省略了一些乘号（点））

方程		溶液公式
$y' + ay = 0$	=>	$y = c \cdot e^{-ax}$
$y' + ay = b$	=>	$y = \frac{b}{a} \cdot c \cdot e^{-ax}$
$y' + ay = h(x)$	=>	$y = e^{-ax} \int h(x) \cdot e^{ax}\, dx + c \cdot e^{-ax}$
$y' + g(x) \cdot y = h(x)$	=>	$y = e^{-G(x)} \int h(x) \cdot e^{G(x)}\, dx + c \cdot e^{-G(x)}$

定理 3 和定理 4 所包含的函数本身可能很全面。因此，我们能够对非常复杂的系统/模型进行计算，例如经济模型、气候模型等。

以相反的顺序表示解公式会更容易。

定理 4

$y' + g(x) \cdot y = h(x)$ 并乘以 $e^{G(x)}$ 两侧 =>

$$y' \cdot e^{G(x)} + g(x) \cdot y \cdot e^{G(x)} = h(x) \cdot e^{G(x)}$$

在这里，我们利用一个已知的公式来区分产品：

$$(y \cdot e^{G(x)})' = y' \cdot e^{G(x)} + y \cdot g(x) \cdot e^{G(x)}$$

其中右侧等于上面的左侧。因此，上面的右侧也必须等于下面的左侧。我们继续后者：

$$(y \cdot e^{G(x)})' = h(x) \cdot e^{G(x)}$$

并在任一侧积分（记住积分常数 c）

$$(y \cdot e^{G(x)})' = h(x) \cdot e^{G(x)} \quad \Leftrightarrow$$

$$y \cdot e^{G(x)} = \int h(x) \cdot e^{G(x)}\, dx + c \quad \Leftrightarrow$$

$y \;=\; e^{-G(x)} \int h(x)\cdot e^{G(x)}\, dx + c\cdot e^{-G(x)}$ 定理 4

定理 3

$y' + ay \;=\; h(x)$

现在 g(x) 是常数 a，因此，G(x) = ax 直接插入定理 4

$y \;=\; e^{-ax} \int h(x)\cdot e^{ax}\, dx + c\cdot e^{-ax}$ 定理 3

定理 2

$y' + ay \;=\; b$

现在 h(x)也等于常数 b，将其直接插入到定理 3 中

$y \;=\; e^{-ax} \int b\cdot e^{ax}\, dx + c\cdot e^{-ax} \quad \Leftrightarrow$

$y \;=\; e^{-ax} \cdot b \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + c\cdot e^{-ax}$

$y \;=\; \frac{b}{a} + c\cdot e^{-ax}$ 定理 2

定理 1

$y' + ay \;=\; 0$

b = 0 代入定理 2

$y \;=\; c\cdot e^{-ax}$ 定理 1

在一些表中，ay 被移到右侧，-a 被称为 k，它呈现：

$y' = ky \quad \Rightarrow \quad y \;=\; c \cdot e^{kx}$ 定理 1

请注意，这样写，定理 1 中的微分方程等于基本微分方程定理 0，它是通过分离变量来求解的（并且在示例 0 中使用）。于是，解决方法有两种：

1.

现在我们将使用定理 1 求解示例 0 中的微分方程

$-\frac{dN}{dt} = k \cdot N \quad \Leftrightarrow \quad N' = -k \cdot N \quad =>$

$N = c \cdot e^{-kt}$

这是不定积分的解。

在示例 1 中，我们有

$N = N_0 \cdot e^{-kt}$

通过求解特定积分。

不同之处在于我们知道 N 的初始值，N_0 ，我们在具体积分中使用它。对于不定积分，我们没有这些信息，因此这里我们只能继续使用新信息。然而，我们发现解决方案在原理上是相同的。

另外，在这里我们得到了对不定积分产生完整解，而特定积分产生特定解这一事实的解释。

我们通过在 t = 0 时插入 N 的初始值 N_0 来继续不确定解

$t = 0 \; => \; N = N_0$ 插入 =>

$N_0 = c \cdot e^{-k0} = c \cdot 1$ => $c = N_0$ =>

$N = N_0 \cdot e^{-kt}$ 相同的答案

2.

一大杯温度为 83° C 的咖啡，放在恒温 22° C 的房间里，遵循微分方程

$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - 22)$

其中 T 是以 ° C 为单位的温度，t 是以分钟为单位的时间，k 是常数。

经测量，20 分钟后咖啡温度为 65° 。

T 作为时间函数的方程是什么？

咖啡什么时候是 45° ？

我们重新排列方程

$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T-22) \quad \Leftrightarrow$

$\frac{dT}{dt} + k \cdot T = k \cdot 22$

发现与定理 2 相符

$y' + ay = b \quad => \quad y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$

在我们的例子中变成

$\frac{dT}{dt} + k \cdot T = k \cdot 22 \quad => \quad T = \frac{k \cdot 22}{k} + c \cdot e^{-kt} = 22 + c \cdot e^{-kt}$

我们从信息中找到 c： $T = 83$ 什么时候 $t = 0$ =>

$T = 22 + c \cdot e^{-kt} \quad => \quad 83 = 22 + c \cdot e^{0} \quad =>$

$c = 61 \quad => \quad T = 22 + 61 \cdot e^{-kt}$

我们从信息中找到 k：　　$T = 65$ 什么时候　$t = 20$

$T = 22 + 61 \cdot e^{-kt}$ $\Rightarrow$ $65 = 22 + 61 \cdot e^{-k \cdot 20}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{65-22}{61} = e^{-20k}$

$\Leftrightarrow$ $\ln 0.7049 = -20k$

$\Leftrightarrow$ $k = \frac{-0.3497}{-20} = 0.0175 \Rightarrow$

$T = 22 + 61 \cdot e^{-0.0175 \cdot t}$　这是冷却功能。

并为 $T = 45°$

$45 = 22 + 61 \cdot e^{-0.0175 \cdot t}$ $\Leftrightarrow$ $\ln \frac{45-22}{61} = -0.0175 \cdot t$ $\Leftrightarrow$

$t = \frac{-0.9754}{-0.0175} = 55.7$ 分钟　　这就是答案

3.

啤酒厂生产矿泉水。在压力容器中，CO_2 溶解在水中，如该微分方程所述

$$\frac{dC}{dt} = k \cdot (C_s - C)$$

其中 $\frac{dC}{dt}$ 是单位时间浓度的增长，k 是常数，C_s 是饱和浓度，C 是变量浓度。

通过求解微分方程，我们将找到浓度 C 作为时间函数的表达式（即不定解）。

我们重新排列，以便我们可以与公式相对应

$\frac{dC}{dt} = k \cdot (C_s - C)$ $\Leftrightarrow$ $\frac{dC}{dt} = k \cdot C_s - k \cdot C$ $\Leftrightarrow$

$$\frac{dC}{dt} + k \cdot C = k \cdot C_s$$

我们找到与定理 2 的对应关系

$y' + ay = b \quad => \quad y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$

在我们的例子中变成

$\frac{dC}{dt} + k \cdot C = k \cdot C_s \quad => \quad C = \frac{k \cdot C_s}{k} + c \cdot e^{-kt} = C_s + c \cdot e^{-kt}$

我们从信息中找到 c： $C = 0$ 什么时候 $t = 0$ =>

$0 = C_s + c \cdot e^{-k \cdot 0} \quad \Leftrightarrow \quad c = -C_s \quad =>$

$C = C_s - C_s \cdot e^{-kt}$

这是浓度增长的方程。

4.

现在我们来解决一个难题：

火箭发射时测量的数据符合以下微分方程，将速度描述为时间函数 $(v = f(t))$，在前 14 秒内有效：

$\frac{dv}{dt} - \frac{1}{15-t} \cdot v = \frac{300}{15-t} - 9.81$ （方程来自：www.studieportalen.dk）

v 是火箭的速度，单位为米每秒，t 是时间，单位为秒。开始时：$t = 0$ 且 $v = 0$

我们将找到速度 v 作为时间函数的表达式，即我们将求解微分方程。

我们与定理 4 进行比较

$y' + g(x) \cdot y = h(x)$ => 在我们的例子中：

$v' + g(t) \cdot v = h(t)$ 与

$v' - \frac{1}{15-t} \cdot v = \frac{300}{15-t} - 9.81$ 这对应于当

$g(t) = -\frac{1}{15-t}$ 和 $h(t) = \frac{300}{15-t} - 9.81$ =>

因此解方程为

$v = e^{-G(t)} \int h(t) \cdot e^{G(t)} \, dt + c \cdot e^{-G(t)}$

要继续，我们必须计算 G(t)，它是 g(t)（的基函数）的积分

$G(t) = \int (-\frac{1}{15-t}) \, dt$ 替代、选择 $s = 15 - t$

=> $\frac{ds}{dt} = -1$

⇔ $dt = -ds$

$G(t) = \int (-\frac{1}{s})(-ds)$

$G(t) = \ln|s|$ =>

未添加积分常数，因为在导出定理 4 时已将其考虑在内。

替补后卫

$G(t) = \ln|15 - t|$

因为我们知道 t max。是 14, 15 - t 必须是正数，因此数字括号变成普通括号。

$G(t) = \ln(15 - t)$

我们插入

$$v = e^{-G(t)} \int h(t)\cdot e^{G(t)}\,dt + c\cdot e^{-G(t)} \qquad \Rightarrow$$

$$v = e^{-\ln(15-t)} \int\left(\frac{300}{15-t} - 9.81\right) \cdot e^{\ln(15-t)}\,dt + c\cdot e^{-\ln(15-t)} \qquad \Leftrightarrow$$

减少

$$v = \frac{1}{15-t} \int (\,300 - 9.81(15 - t))\,dt \;+\; c\cdot\frac{1}{15-t} \qquad \Rightarrow$$

整合

$$v = \frac{1}{15-t}\left(\,300\cdot t - 147.15\cdot t + \frac{9.81}{2}\cdot t^2\,\right) \;+\; c\cdot\frac{1}{15-t}$$

$t = 0 \;\Rightarrow\; v = 0 \;\Rightarrow\; c = 0 \qquad \Rightarrow$

$$v = \frac{152.85\cdot t + 4.905\cdot t^2}{15-t}$$

这是速度的方程/表达式

----

14 秒后的速度为：

$$v = \frac{152.85\cdot 14 + 4.905\cdot 14^2}{15-14}$$

$v \approx$ 3101 米每秒或约。 每小时 11, 165 公里

逻辑微分方程

逻辑微分方程描述了有限的增长。变量（此处为 y）只能达到最大值，仅此而已。方程是

$\frac{dy}{dx} = ay(m - y)$ 或者 $y' = ay(m - y)$

其中 m 是最大值。我们观察到，增长 $\frac{dy}{dx}$ 与 y 以及 y 距最大值的距离成正比。

解决办法是 $y = \frac{m}{1+c\cdot e^{-amx}}$

这是以一种特殊的方式证明的：我们猜测提到的解决方案并控制它是否为真：

我们区分解决方案 $y = \frac{m}{1+c\cdot e^{-amx}}$ =>

$$y' = \frac{0 - m(c\cdot e^{-amx}(-am))}{(1 + c\cdot e^{-amx})^2} = \frac{am^2(c\cdot e^{-amx})}{(1 + c\cdot e^{-amx})^2}$$

我们将其与猜测的解一起插入到原始微分方程中

$y' = ay(m - y)$ =>

$$\frac{am^2(c\cdot e^{-amx})}{(1 + c\cdot e^{-amx})^2} = a \cdot \frac{m}{1+c\cdot e^{-amx}} \cdot (m - \frac{m}{1+c\cdot e^{-amx}}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{am^2(c\cdot e^{-amx})}{(1 + c\cdot e^{-amx})^2} = \frac{am^2}{1+c\cdot e^{-amx}} - \frac{am^2}{(1+c\cdot e^{-kmx})^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{am^2(c\cdot e^{-amx})}{(1 + c\cdot e^{-mx})^2} = \frac{am^2 + am^2ec^{-amx} - am^2}{(1+c\cdot e^{-amx})^2} \quad \Leftrightarrow$$

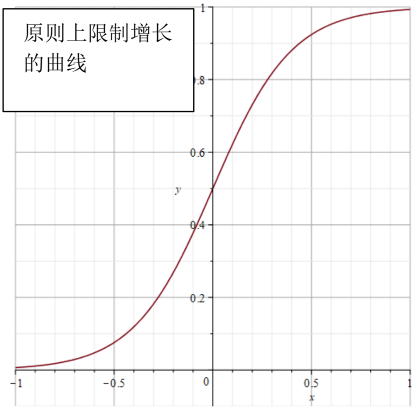
$$\frac{am^2(c\cdot e^{-amx})}{(1 + c\cdot e^{-amx})^2} = \frac{am^2ec^{-amx}}{(1+c\cdot e^{-amx})^2} \quad \Leftrightarrow$$

这是真的。

为简单起见，我们在方程中选择 c = 1、a = 5 和 m = 1

$$y = \frac{m}{1+c \cdot e^{-amx}}$$

并可以画出这条曲线



上半年是逐步增长，下半年是放缓增长。函数值 1 （= 100%）是函数的水平渐近线 – 我们永远不会达到 1。

实施例 5

生物学家将 50 只鹦鹉引入了一座岛屿，而该岛上以前没有鹦鹉。生物学家估计，岛上可能生活着多达 2000 只鹦鹉，24 个月后，鹦鹉数量达到了 100 只。

增长函数是什么？需要多长时间才能岛上有 1500 只鹦鹉？

$y' = ay(m - y) \quad => \quad y = \frac{m}{1+c \cdot e^{-amt}}$

这里 y = 鹦鹉的数量，x 现在称为 t，表示时间（以月为单位），m 为 2000，而 c 和 k 必须从信息中找到

$t = 0$ 和 $y = 50 \quad => \quad 50 = \frac{2000}{1+c \cdot e^{0}} \quad => \quad c = 39$

t = 24 和 y = 100 =>

$100 = \frac{2000}{1+39 \cdot e^{-a \cdot 2000 \cdot 24}}$ =>

$1 + 39 \cdot e^{-a \cdot 2000 \cdot 24} = 20$ ⇔

$e^{-a \cdot 2000 \cdot 24} = \frac{19}{39}$ ⇔

$-a \cdot 2000 \cdot 24 = \ln \frac{19}{39}$ ⇔

$a = \frac{-0.7191}{-48\,000} = 0.000014981$

代入我们求出鹦鹉的生长函数

$y = \frac{2000}{1+39 \cdot e^{-0.00001498 \cdot 2000 \cdot t}}$

我们预计之后会有 1500 只鹦鹉

$1500 = \frac{2000}{1+39 \cdot e^{-0.00001498 \cdot 2000 \cdot t}}$ ⇔

$39 \cdot e^{-0.00001498 \cdot 2000 \cdot t} = \frac{2000}{1500} - 1$ ⇔

$e^{-0.00001498 \cdot 2000 \cdot t} = \frac{1}{3 \cdot 39}$

$-0.00001498 \cdot 2000 \cdot t = \ln 0{,}0085$ ⇔

$t = \frac{-4.7677}{-0.03} \approx 158$ 个月或大约 13 年。

坡地

这是微分方程中一个非常罕见的概念的简要描述，即斜率场。

斜率场是一个对微分方程的可能解进行调查的图表。

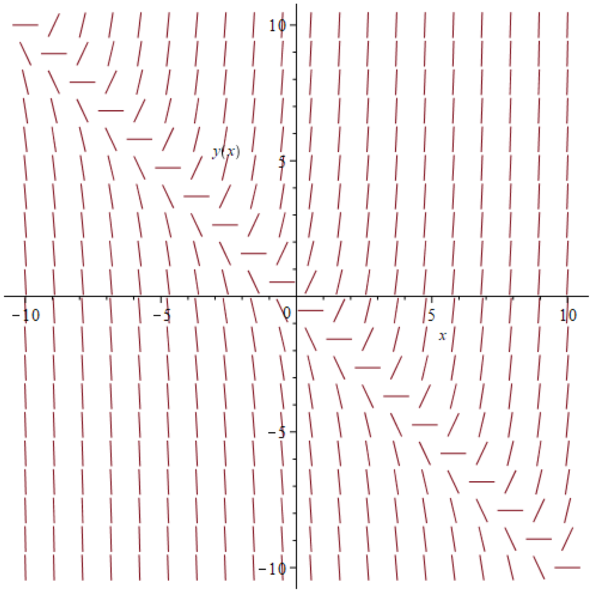
让我们考虑一个没有任何函数常量（例如 c、k、t...）的简单示例：

$y' = 2y + 2x$

在这里，我们可以插入点 (x, y) 的坐标，它会在该点处呈现曲线的斜率，例如：

$(x, y) = (0, 0) \Rightarrow y' = 0$ 或者 $(1, 1) \Rightarrow y' = 4$ 等等。

然后我们可以在很多点上画一条小切线（=线元素），因此，我们有一个斜率场。适合 CAS 的累人工作。这里显示的是 $y' = 2y + 2x$



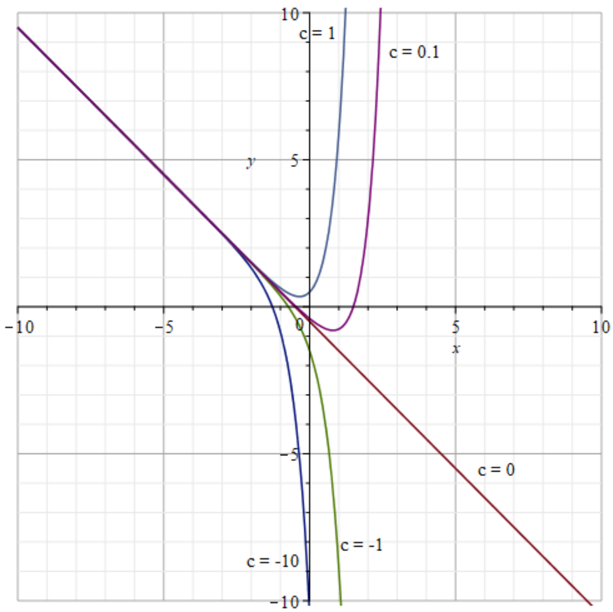
如果我们遵循一系列小线元素，我们就会得到一定的解曲线。存在无数条解曲线。因此，斜率场显示了无限多个可能的完整解。

我们还可以求解微分方程

$y' - 2y = 2x$ 与定理 3 相对应，有解 =>

$y = -x - \frac{1}{2} + c \cdot e^{2x}$ 计算未聚焦且未显示

并显示带有一些 c 值的图表（各种具体解决方案）：



两张图的原理是一样的：

第一个图基于微分方程并显示斜率场，它给出了可能的解曲线的调查（有点粗略）。

另一个图基于完整的解，并显示一些 c 值的精确解曲线（特定解）。有人可能会说我们从斜率场中提取了五条曲线。

通常，我们求解微分方程来找到完全解，然后插入已知值来找到 c，然后我们就得到了具体的解（就像我们在前一章中所做的那样）。

然而，我们可能希望某个解曲线经过某个点，例如(0, 0)。然后

- 我们观察斜率场并发现这似乎是可能的
- 在解中插入 (0, 0) 并找到 c = 1
- 返回并更改数据（如果可能），使 c 变为 1。

从整体上看，也许可以回去改变条件，得到一定的解决方案。

我们还从斜率场了解到拥有正确的兰特条件有多么重要。否则，我们最终可能会得到错误/不确定的解决方案。

两个变量的函数

到目前为止，我们已经看到了一个变量的函数（y 取决于 x 或 t 或…）。因此，我们已经描述了大多数情况。然而，有时一个量 z 取决于两个变量 x 和 y（是两个变量的函数）。是的，可能还有更多的变量，但正如我们将看到的，它们的处理方式是相同的。

函数表达式

如果我们有一个函数 $z = f(x, y)$ 并且当只有 x 变化时，将看到 z 如何变化，即 $\frac{dz}{dx}$ ，我们将符号更改为 $\frac{\partial z}{\partial x}$ ，称为偏导数。

这样，我们声明还有其他变量，但现在我们只关注与 x 相关的 z。

我们像以前一样将 y （和/或其他变量）视为常数进行区分。所有微分的计算规则都是相同的。

实施例 1

$z = 2x + 3y \qquad =>$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 + 0 = 2 \qquad$ 和 $\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 3 = 3$

2.

$z = x^2 + y^3 \qquad =>$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \qquad 和 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$$

这样我们就只考虑一个变量。

3D 人物

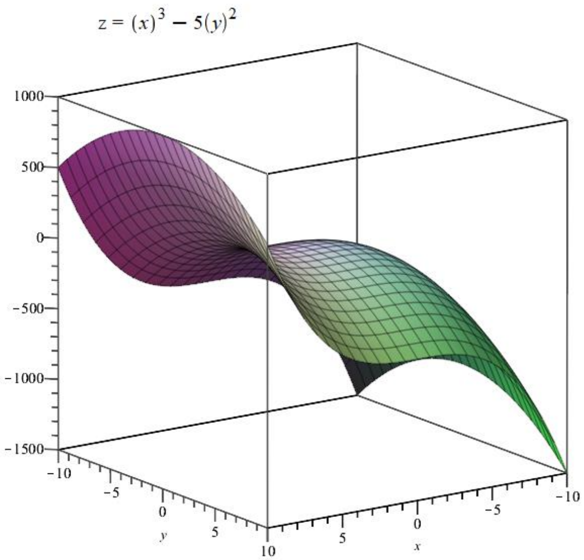
空间图形具有以下类型的方程

$z = f(x, y)$

所以，如果我们知道图形的方程和一个点的（x，y）坐标，我们就可以计算出该点的 z 坐标。

示例 3.

$z = f(x,y) = x^3 - 5y^2$

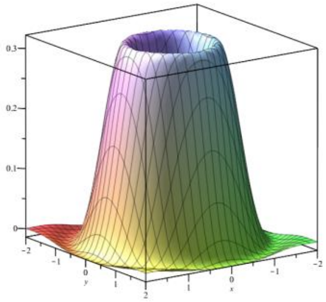


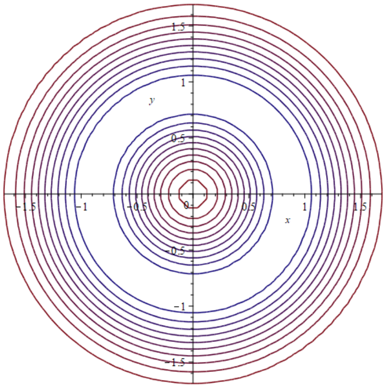
像这样复杂的数字，实际上是由 CAS 显示的。只能手绘简单的图形。

4.

自然界中形状的几何形状很复杂，可能无法找到有用的方程，因此景观的水平曲线通常被绘制为通过相同高度的测量点的小直线/曲线，例如平均海平面以上 41 米等级。

这里我们显示一个 3D 图形，其中包含从上方观察的水平曲线：





据观察，该图形内部陡峭，由水平曲线之间的小距离显示，- 顶部不陡峭， - 外部又陡峭。

显示此图的主要原因是我们现在要考虑梯度。接近水平曲线处梯度最大。

梯度

这个词实际上意味着坡度，但在 3D 中，其含义有所扩展。梯度描述了斜率的方向和大小（因此，它是一个向量 - 第 4 部分中有更多相关内容）。

$\frac{\partial z}{\partial x}$ 显示空间图形在 x 方向的斜率

$\frac{\partial z}{\partial y}$ 显示空间图形在 y 方向的斜率

就像从前一样。

但是介于两者之间的斜坡又如何呢？

这就是梯度。

我们将 x 中的斜率和 y 中的斜率结合起来并写出

$$\text{梯度}(z) = \text{梯度}(f(x,y)) = \begin{pmatrix} x\text{ 方向的斜率} \\ y\text{方向的斜率} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}$$

这就是梯度的定义。

梯度的大小由毕达哥拉斯找到：

$$|\text{梯度}| = \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)^{½}$$

因此，大小本身就是斜率，不知道方向。

我们使用毕达哥拉斯是因为 x 方向的斜率与 y 方向的斜率正交。

这对应于一个向量（其中组合方向由两个微分系数的“强度比”决定）及其长度。梯度是一个向量。有关向量的更多信息，请参阅第 4 部分。

实施例 1

我们显示功能

$z = f(x,y) = x^2 + y^2$ 其中有

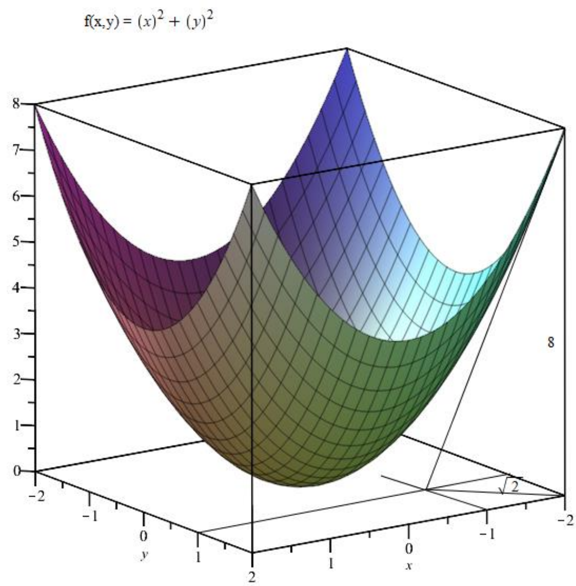
x 方向的斜率 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$

y 方向的斜率 $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$ =>

梯度 = $\binom{2x}{2y}$ 例如 x = |2| 和 y = |2| 给出

梯度 = $\binom{4}{4}$ 与尺寸

|梯度| = $\sqrt{4^2 + 4^2} \approx 5.66$



如果我们爬到右边角落的内侧 x = |2| 和 y = |2| 因此斜率是 5.66.

我们也可以这样看待：

在图中画出了图形在“角”处的切线，其中 x = |2| 和 y = |2|

帮助行显示 x 中的一步：$\Delta x = 1$

y 中的一步：$\Delta y = 1$

毕达哥拉斯给出了“公共”步骤$\sqrt{2}$。

在高度、z 方向上，我们读到 $\Delta z = 8$

我们计算“常见”斜率（= 梯度长度）：

|梯度| $= \frac{8}{\sqrt{2}} \approx 5.66$ 相同的答案。

我们来比较一下爬“角落”时的坡度（计算结果为 5.66）和“中间”爬 8 米的坡度：

中间我们会说到重点：

$z = 8, x = 0, y = ?$

$z = x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = 8^{½} \approx 2.83$

which is not visible on the figure. The point lies outside of the box shown.

梯度 $= \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ 这对于 x = |0| 和 y = |2.83| 给出

梯度 $= \begin{pmatrix} 0 \\ 5.66 \end{pmatrix}$ 与尺寸

$|梯度| = \sqrt{0^2 + 5.66^2} \approx 5.66$

因此，与该旋转对称图形所预期的斜率相同。

梯度也可以用符号∇来写

第 4 部分：向量

平面中的 2D 向量

矢量描述大小和方向，并被绘制为箭头（长或短）。

例如，它可能是物理力的大小和方向，例如风的强度和方向、海流的强度和方向等等，-不仅仅是大小的东西（例如质量或金钱），但也是一个方向。

向量数学是一种计算工具。因此，在计算中允许移动矢量，只要它保持长度和方向即可。在数学上！

在物理学和其他领域，你不能移动矢量！不得将其移离表演地点。

矢量是一种具有相应计算规则的工具，旨在启用和/或促进某些计算 - 特别是 3D 计算。有些方法乍一看可能很奇怪，但确实很有用。如果我们想使用矢量工具，我们自己制作它们，并按照我们将要解释的方式用它们进行计算。

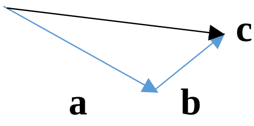
二维 (2D) 向量无法让我们进行我们已经无法进行的计算，但它们在 3D 几何中是必需的。因此，我们以 2D 形式构建系统并以 3D 形式获得奖励。

通常我们将向量称为三角形的边，例如 a 或 AB - 只是顶部有一个小箭头。在其他书中可能会写成 $\vec{a}$ 或 $\overrightarrow{AB}$，最后用 **a** 或 **AB**。我们选择后者。

我们可以将向量相加，然后将它们相减。我们可以将它们与一个常数相乘和相除，但我们不能将它们相互相乘和相除。然而在这里，点积和行列式将应用特殊的工具——稍后会详细介绍。

基本

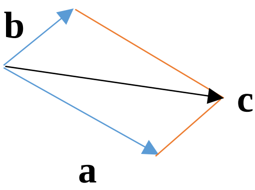
我们可以通过两种方式添加向量。一种方法是将它们相互扩展：



黑色是“结果”，这里：

向量和 **c**.

另一种是让它们从同一点开始，形成一个平行四边形：



黑色是“结果”，这里：

向量和 **c** （与之前相同）。

为了与（在行中）写入点的坐标不同，矢量坐标被写入在列中。我们想象所有向量都从 Origo 开始，(x, y) = (0, 0)，因此向量坐标，就是终点，即箭头。显示的向量可以是：

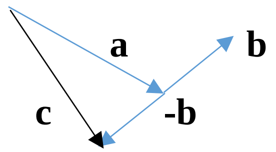
a + **b** = **c** => $\binom{5}{-3} + \binom{2}{2} = \binom{7}{-1}$

还可以看出，我们分别添加 x 坐标，并且分别添加 y 坐标。

或者用字母表示未知坐标：

a + **b** = **c** => $\binom{a_1}{a_2} + \binom{b_1}{b_2} = \binom{a_1+b_1}{a_2+b_2} = \binom{c_1}{c_2}$

我们通过添加负/相反向量来减去向量：



黑色是所得的 c

a - b = **c** => $\binom{5}{-3} - \binom{2}{2} = \binom{3}{-5}$

或者用字母表示未知坐标：

a - b = **c** => $\binom{a_1}{a_2}$ - $\binom{b_1}{b_2} = \binom{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} = \binom{c_1}{c_2}$

我们可以将向量乘以常数（数字或字母）：

$k \cdot \binom{a_1}{a_2} = \binom{k \cdot a_1}{k \cdot a_2}$ 或放出 $\binom{k \cdot a_1}{k \cdot a_2} = k \cdot \binom{a_1}{a_2}$

k 可以是除 0 之外的所有值（大、小、正、负）。如果 k > 1，向量就会变长。如果 k < 1，向量会变短， - 实际上这与向量除以数字相同。如果 k 为负（k < 0），则方向相反。

不是乘/除向量，而是创建/定义标量积。它通常被称为点积，因为使用了一个点（类似于乘法点）。该技术是将 x 乘以 x，将 y 乘以 y，最后将两个结果相加：

$\binom{5}{-3} \cdot \binom{2}{2} = 10 + (-6) = 4$

所以我们从向量开始并产生一个数字。

或者用字母作为未知坐标：

点积：　　$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2$ = 一个号码

事实证明它很有用。

现在来看看更特别的东西：两个向量的行列式。行列式为我们决定了一些事情，但首先让我们看看计算技巧（det 代表行列式）：

行列式：　$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ = 一个号码

我们将向量 a 的坐标放在第一列中，将向量 b 的坐标放在第二列中。然后我们进行“交叉”相乘：a1 • b2 减去 a2 • b1 并得出一个数字作为答案。

所以在这里，我们也从向量开始并产生一个数字。

为了好玩，我们计算点积（â 在下一页进行解释）

$\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = -a_2b_1 + a_1b_2 = a_1b_2 - a_2b_1 = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

事实证明这也是有用的。

我们在这个计算中发现了一些更有用的乐趣：

$-\det(\mathbf{b},\mathbf{a}) = -\begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = -(b_1a_2 - b_2a_1) = a_1b_2 - a_2b_1 = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

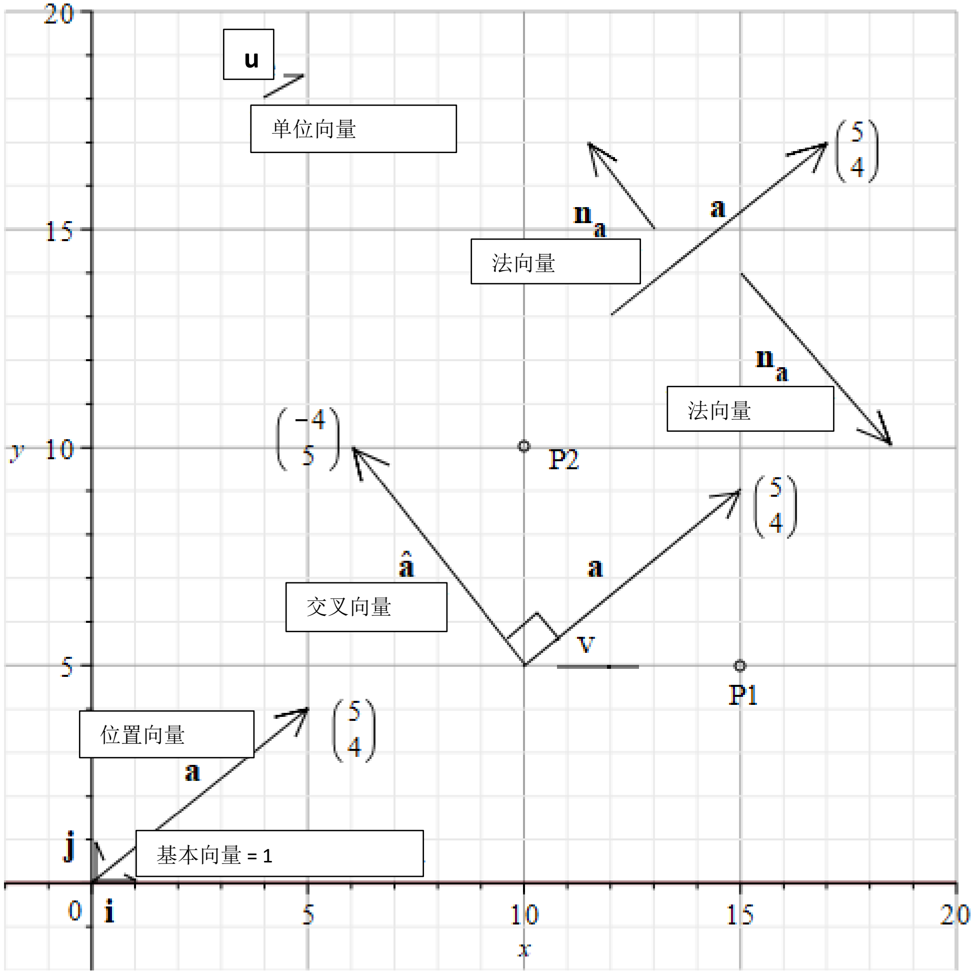
现在，一位老朋友：我们通过毕达哥拉斯求出向量的长度：

$|\mathbf{a}|^2 = x^2 + y^2$　　　或者　　　$|\mathbf{a}|^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2$　　　=>

这里：$|\mathbf{a}| = [5^2 + (-3)^2]^{½} = 34^{½}$

特殊载体

一些特殊的向量如下图所示：



在数学中，如前所述，我们想象所有向量都从 Origo = (0, 0) 开始，因此向量坐标就是终点 - 箭头。这里 a 在三个地方显示，但这三个都是相同的向量，并且它的坐标为 $\binom{5}{4}$ 。对于那些不以 Origo (0, 0) 开始的坐标，可以通过以下方式找到坐标：end 减去 start。为一个(a)：

$\binom{15-10}{9-5} = \binom{5}{4}$ 和 $\binom{17-12}{17-13} = \binom{5}{4}$

矢量与 x 轴的角度为

$v = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ 为了 **a**: $v = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 38{,}7°$

如果我们将矢量正向旋转 90°（逆时针方向），我们会得到它的交叉矢量，并用小帽子显示。它的坐标与 x 坐标上的负号相反。 a 的交叉向量是

$\hat{\mathbf{a}} = \binom{-4}{5}$

从辅助点 P1 可以看出，该点也转了 90°，变成了 P2。 P1 的 x 值 5 变成 P2 的 y 值 5，从 P1 到向量的 y 距离（4）变成从 P2 到交叉向量的 x 距离（-4）。

与 a 正交的其他向量称为法向量。这里的法线是指正交。法线向量的位置、方向和长度并不重要，只要该向量与我们的向量正交，它就是法线向量。法向量有无数个，但交叉向量只有一个。

左边是一个长度为 1 的向量。所有长度为 1 的向量都称为单位向量，我们写 |u| = 1

最后显示两个特殊单位向量：x 轴上的 **i** 和 y 轴上的 **j**。它们被绘制在轴旁边，以便我们可以看到它们。它们被称为基向量。

在所有数学中我们都需要零。在向量数学中，我们需要一个零向量：**0**。例如，如果我们从 **a** 中减去 **a**，我们就得到零向量：

$\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}$

例子

1.

两倍长且方向相反（-）的向量的坐标为：

$-2 \cdot \binom{5}{4} = \binom{-10}{-8}$

2.

让我们计算两个正交向量的点积，例如一个向量及其交叉向量，这里是 a 和 â ：

$\binom{5}{4} \cdot \binom{-4}{5}$ = -20 + 20 = 0

用字母表示并乘以常数 k，它对所有向量都有效：

$\binom{h}{i} \cdot k\binom{-i}{h} = \binom{h}{i} \cdot \binom{k(-i)}{kh}$ = -hki + ikh = 0

这证明了一个向量与其法向量之一相点缀为 0。

3.

我们将检查两堵墙是否正交。我们在某些逻辑位置沿墙壁方向形成两个向量：一个向量从墙角引向 3 米外的窗户，坐标以毫米为单位

$\binom{0}{3000}$

另一个从墙角向另一个方向通向 1.76 米外的门，坐标以毫米为单位

$\binom{1760}{10}$

我们检查点积是否为 0：

$\binom{0}{3000} \cdot \binom{1760}{10} = 0 + 30000 = 30000$ 这是 $\neq 0$

不，墙壁不是正交的。很容易看出误差是 10 毫米。

我们形成的两个向量也称为方向向量。它们可以有其他长度，只要方向正确即可。

4.

a 可以分为两个分量，一个在 x 方向，另一个在 y 方向。它是这样写的：

$\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} = \binom{5}{4}$

因此，如果我们站在 Origo，沿 x 方向走 5 步，沿 y 方向走 4 步，我们将到达矢量终点（箭头处）。

实际上，我们可以按照我们想要的方向分割向量，例如：

$\binom{5}{4} = \binom{4}{2} + \binom{1}{2}$

这是存款规则。

如果 **a** 称为 OP（因为它从 O 点到 P 点）并且我们在（4, 2）中引入点 Q，我们有：

$\mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QP} = \binom{4}{2} + \binom{1}{2} = \binom{5}{4}$

或者如果我们找到 **QP**:

$\mathbf{QP} = \mathbf{OP} - \mathbf{OQ} = \binom{5}{4} - \binom{4}{2} = \binom{1}{2}$

从 O（0, 0）开始并通向已知点（例如 P 或 Q）的向量也称为位置向量，因为它从一个位置通向另一个位置。

计算规则

向量有四种计算规则。它们类似于数学的标准规则，只是，我们必须记住，两个向量之间的点并不意味着乘法，它意味着点。

1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$
2. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$
3. $(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot(k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$
4. $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

定理 4 看起来并不像其他任何东西，所以我们将证明它。右侧

$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2$ 和左侧

$|\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$ 给出相同的

角度

使用点积或行列式可以找到两个向量之间的角度 v 的公式。
使用点积的公式是通过余弦规则导出的：

$a^2 + b^2 - 2a\cdot b\cdot\cos C = c^2$ => 这里：

$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos v = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2$ 其中 |a| = a、|b| = b 等

规则 4 给出 $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}^2$

规则 4 给出 $|\mathbf{b}|^2 = \mathbf{b}^2$

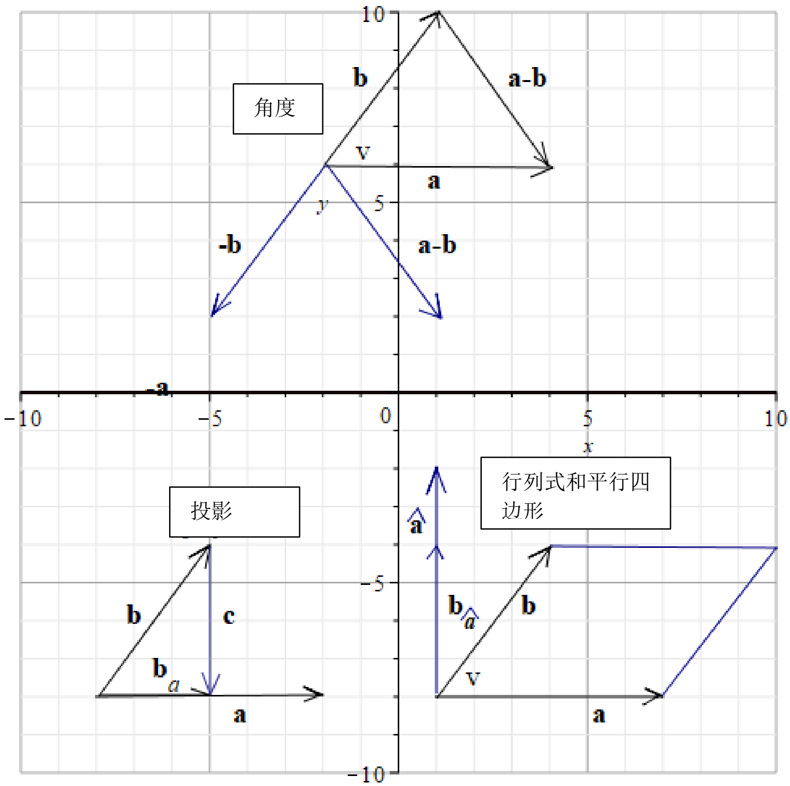
规则 4 和 2 给出 $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$

已插入 $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos v = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$

减少 $\cos v = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\mathbf{b}|}$

这是两个向量之间的角度的公式。另请观察图表（下页）中最上面的图，其中显示角度 v 的对边是 a-b。

稍后我们将提出另一个使用行列式来计算两个向量之间的角度的公式。



投影

此外，在该图中，我们显示向量 b 以直角投影到向量 a 上。结果是 b_a，它的坐标取决于已知的 b 和 a。

我们通过形成蓝色辅助向量 c 来找到向量 b_a 的坐标，然后观察：

$\mathbf{b_a} = k \cdot \mathbf{a}$ *(I)* $\mathbf{b_a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ 和

$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$ 因为它们是正交的

然后，我们将找到 k，然后找到 b_a：

$$0 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{b_a} - \mathbf{b})\cdot\mathbf{a} = (k\mathbf{a} - \mathbf{b})\cdot\mathbf{a} = k\mathbf{a}^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = k|\mathbf{a}|^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad k|\mathbf{a}|^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \quad =>$$

k 代入 (I) 并得出：

$$\mathbf{b_a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \cdot \mathbf{a}$$

这是投影矢量坐标的公式。

它的长度由向量的数值确定：

$$|\mathbf{b_a}| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|^2} \cdot |\mathbf{a}| \quad \Leftrightarrow$$

$$|\mathbf{b_a}| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$$

这是投影长度公式。

行列式、面积和角度

现在我们将了解如何使用行列式：

在图的下部右侧，显示了由向量 a 和 b 展开的平行四边形。在通常的计算中，面积是

区域 = $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b_{\hat{a}}}|$

我们现在有两种方法可以继续：

区域 $= |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b_{\hat{a}}}| = |\mathbf{a}| \cdot \frac{|\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{b}|}{|\hat{\mathbf{a}}|}$ 因为 a 和 â 一样长

区域 $= |\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{b}|$ 这等于行列式

$区域_{平行四边形} = |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})|$

因此，我们不需要知道 $|\mathbf{b}_{\hat{a}}|$ 即可找到该区域。我们可以直接从展开平行四边形的向量（a 和 b）中找到它。 。

我们还可以通过以下方式找到该区域：

$|\mathbf{b}_{\hat{a}}| = |\mathbf{b}| \cdot \sin v \quad =>$

$区域 = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}_{\hat{a}}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin v$

或简短地

$区域_{平行四边形} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin v$

由于这两种方法都会渲染该区域，因此我们推断

$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin v \quad \Leftrightarrow$

$\sin v = \frac{\det(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$ 这为我们提供了另一种求两个向量之间角度的方法。

第一种方法是通过点积

$\cos v = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$ 我们之前发现的。

还有更多。我们再次考虑表达式

$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin v$

如果 v 为 0，则为 0。这意味着，如果行列式为 0，则 a 和 b 平行：

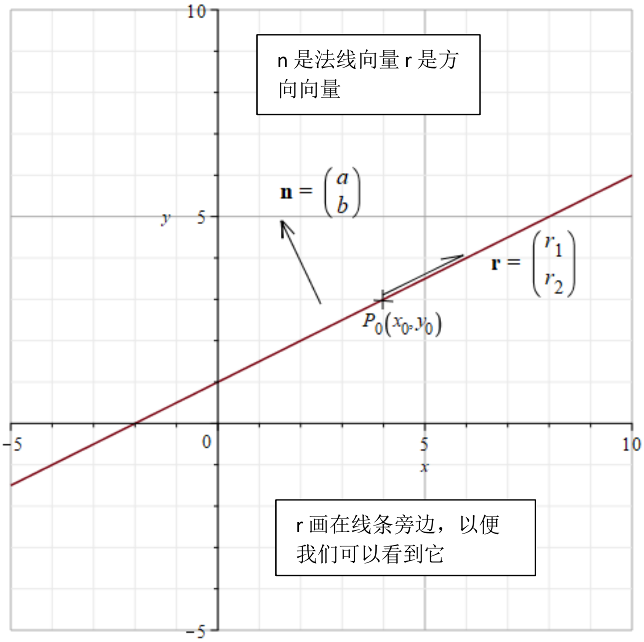
$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

还有更多。我们还可以求出由向量 a 和 b 展开的三角形的面积：

$$\text{区域}_{\text{三角形}} = \frac{1}{2} \cdot \text{区域}_{\text{平行四边形}} = \frac{1}{2} \cdot \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin v$$

向量形式的直线

直线方程也可以写成两种向量形式。和以前一样，我们需要两条有关线路的信息。我们必须知道一个点和一个方向向量



线上的每个已知点都可以。这里我们将点 P_0 的坐标称为 (x_0, y_0)，如果我们也知道方向，则该点将确定直线。

方向用方向向量来描述。任何方向向量都可以（短、长、指向前方或后方、是否在线上），只要它与线平行即可。

该方向实际上也可以由法向量（与线正交）确定。任何法向量都可以。

如果我们想象转动这条线，法线向量就会跟随。因此，每条直线都有自己的法向量。

使用方向向量，直线可以写成向量函数，这在 2D 中很少应用，但在 3D 中是唯一的可能（稍后会详细介绍）。从图中可以直接看到这个向量函数：从 P_0 开始，方向向量可以通过乘以一个名为 t 的参数（可以是任意数字）沿线上下移动一个点（箭头）。 “参数”是希腊语，这里的意思是“沿着测量的”。

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r1 \\ r2 \end{pmatrix}$ 这是直线的二维向量函数

通过使用法向量，推导更复杂，但结果更有用：

我们从图中观察

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

如果我们形成 n 的交叉向量，我们就得到直线的方向向量：

$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

我们将其插入直线的向量函数中：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

这里我们分成 x 坐标的方程和 y 坐标的方程：

$x = x_0 + t(-b)$ 和 $y = y_0 + ta$

这是有两个未知数的两个方程。我们在 y 方程中分离：

$t = \frac{y - y_0}{a}$ 并代入 x 方程：

$$x = x_0 + \frac{y-y_0}{a} \cdot (-b) \quad \Leftrightarrow$$

$$x - x_0 = \frac{y-y_0}{a} \cdot (-b) \quad \Leftrightarrow$$

$$a(x - x_0) = -b(y - y_0) \quad \Leftrightarrow$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

这是直线矢量形式的方程。 a 和 b 是法线向量的坐标，(x0, y0) 是线上的点。

我们可以继续在括号中进行乘法：

$$ax - ax_0 + by - by_0 = 0$$

如果我们用 c 替换 – ax0 – by0 ，我们有：

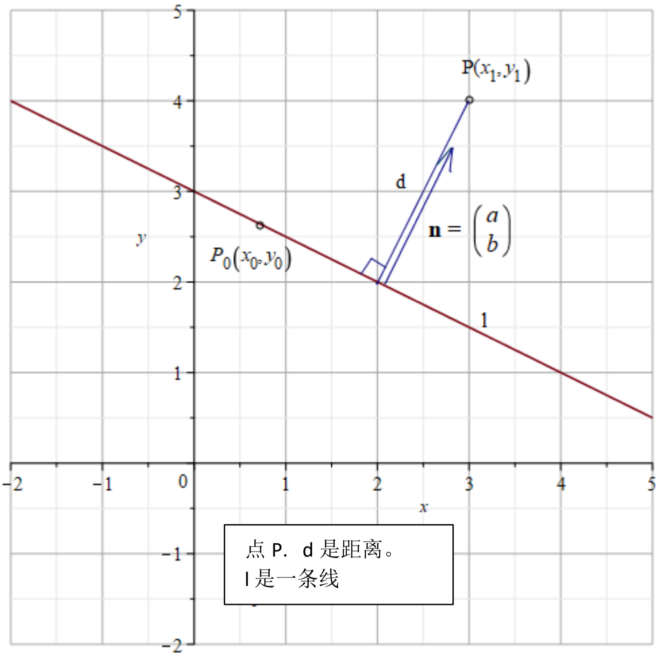
$$ax + by + c = 0$$

在某些情况下这更容易，并且通常在表格中列出。我们很快就会在距离公式中以这种形式使用它。

因此，我们在“普通”数学中有两个直线方程，在向量数学中有两个（或三个）方程。请注意，a 和 b 在两个系统中的含义并不相同。

点线距离

向量数学也可用于找到从点 P 到直线 l 的最短距离（垂直）d。



为了推导，我们需要直线上的任意点，我们称之为 $P_0(x_0, y_0)$，以及直线的法向量

$\mathbf{n} = \binom{a}{b}$

为简单起见，我们绘制从 l 到 P 的法线向量，但可以使用任何法线向量。

我们想象一个从 P_0 到 P 的向量（未绘制）。如果我们将 P_0P 投影到 **n** 上，我们会得到一个向量 d 长。然后，应用之前导出的投影公式：

$|\mathbf{b_a}| = \dfrac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$ 这里

$d = \dfrac{|\mathbf{P_oP}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$

分子： $\binom{x_1-x_0}{y_1-y_0}\cdot\binom{a}{b} = ax_1 - ax_0 + by_1 - by_0$

P_0 在 l 上，因此 − ax_0 − by_0 被 c 替换，如前所述。

和分母： $\sqrt{a^2 + b^2}$

代入 d 的表达式，得出点与线之间距离的公式（d 代表距离）

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

x_1 和 y_1 是点的坐标，a、b 和 c 来自矢量形式的直线方程。

例子

1.

让我们找到前面示例中两堵墙之间的角度，其中方向向量为

$\binom{0}{3000}$ 和 $\binom{1760}{10}$ 以毫米为单位

首先，我们有

$\cos v = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\mathbf{b}|}$ 在哪里

分子 $\binom{0}{3000} \cdot \binom{1760}{10} = 0 + 30{,}000 = 30{,}000$

分母 $(0^2 + 3000^2)^{½} \cdot (1760^2 + 10^2)^{½} = 5{,}280{,}085$

合并的 $v = \cos^{-1}\left(\frac{30{,}000}{5{,}280{,}085}\right) = 89.67°$

这显示出一个小的偏度。

然后以米为单位

$\binom{0}{3}$ 和 $\binom{1.760}{0.01}$

现在使用

$\sin v = \frac{\det(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$ 在哪里

分子 $\begin{pmatrix} 0 & 1.76 \\ 3 & 0.01 \end{pmatrix} = 0 - 3 \cdot 1.76 = -5.28$

分母 $(0^2 + 3^2)^{½} \cdot (1.760^2 + 0.01^2)^{½} = 5.280085$

合并的 $v = \sin^{-1}\left(\frac{-5.28}{5.280085}\right) = (-)\ 89.67°$

和之前一样的角度。自然。负数的原因是计算行列式时 a 和 b 的顺序。在 a 之前的 b 处，它会是加号。因此，我们需要干扰并解释答案：两个公式得出相同的答案。如果不是这样，我们就犯了一个错误。

2.

我们将投影一个向量 $\mathbf{b} = \binom{1}{5}$ 与方程在一条直线上

$y = x + 3$

投影矢量的坐标是多少？它有多长？

我们使用投影公式，将 b 投影到 a 上：

$\mathbf{b_a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \cdot \mathbf{a}$

我们的 b 是 $\binom{1}{5}$

我们的 a 必须由直线的方向向量形成。斜率为 1，因此 $\binom{1}{1}$ 是方向向量，现在是我们的 a：

分子 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \binom{1}{1} \cdot \binom{1}{5} = 1 + 5 = 6$

分母 $|\mathbf{a}|^2 = ((1^2 + 1^2)^{½})^2 = 2$

结合 **a** 产量

$\mathbf{b_a} = \frac{6}{2}\binom{1}{1} = 3\binom{1}{1} = \binom{3}{3}$

长度

$|\mathbf{b_a}| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$

分子 $|6| = 6$

分母 $(1^2 + 1^2)^{½} = \sqrt{2}$

合并的 $|\mathbf{b_a}| = \frac{6}{\sqrt{2}} \approx 4.24$

控制上，我们可以使用毕达哥拉斯来表示 b_a 的坐标：

$|\mathbf{b_a}| = (3^2 + 3^2)^{½} = \sqrt{18} \approx 4.24$ 相同的答案

3.

平行四边形由向量 $\binom{5}{3}$ 和 $\binom{3}{4}$ 展开，其面积是多少?

区域$_{平行四边形}$ = det(**a, b**) =>

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 5\cdot4 - 3\cdot3 = 20 - 9 = 11$

如果我们改变向量的顺序：

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 3\cdot3 - 4\cdot5 = 9 - 20 = -11$

这里我们必须干预，因为一个区域只能是积极的

$|A| = 11$

那么我们的答案是一样的。

4.

三角形由向量 $\binom{5}{3}$ 和 $\binom{3}{4}$ 展开，其面积是多少？

区域$_{三角形}$ $= \frac{1}{2} \cdot \det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ =>

$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 4 - 3 \cdot 3) = \frac{11}{2} = 5{,}5$

5.

一条直线穿过点（6, 8）并具有法向量 $\binom{3}{4}$ 线方程是什么？

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ =>

$3(x - 6) + 4(y - 8) = 0$ ⇔

$3x - 18 + 4y - 32 = 0$ ⇔

$3x + 4y - 50 = 0$ 这就是答案

“普通”数学中的方程为：

$y = ax + b$

其中 a 现在是斜率，b 现在是直线与 y 轴相交处的 y 值！

$3x + 4y - 50 = 0$ ⇔

$4y = -3x + 50$ ⇔

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{2}$

因此，一条斜率为 $-\frac{3}{4}$ 且与 y 轴相交于点 $(0, \frac{25}{2})$ 的线。

6.

点（2, 1）与直线之间的距离是多少 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{2}$?

我们需要矢量形式的线，所以我们改变它

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$4y = -3x + 50 \quad \Leftrightarrow$$

$$3x + 4y - 50 = 0$$

并使用距离公式

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \Rightarrow$$

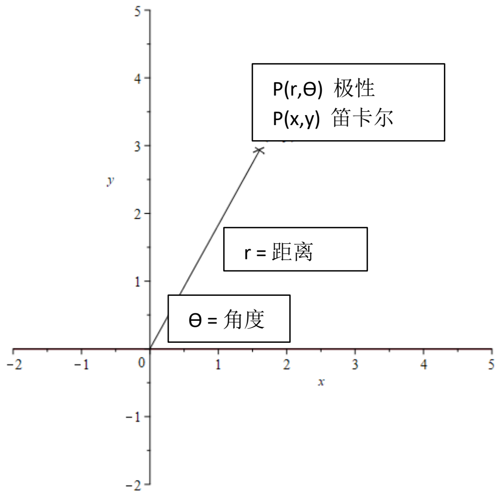
$$d = \frac{|3\cdot 2 + 4\cdot 1 - 50|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$d = \frac{|-40|}{\sqrt{25}} \quad \Leftrightarrow$$

$$d = 8$$

二维极坐标

坐标也可以指定为极坐标，即：（距 Origo 的距离，与 +x 轴的角度），见图



这可能是航空技术等方面的进步，特别是当我们扩展到 3D 时。

笛卡尔（普通）坐标、位置矢量坐标和极坐标之间的转换如下表所示：

	坐标	长度/距离
笛卡尔	P(x,y)	$r = (x^2 + y^2)^{½}$
位置向量	$\mathbf{OP} = \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos\theta \\ r\cdot\sin\theta \end{pmatrix}$	$\lvert\mathbf{r}\rvert = \lvert\mathbf{OP}\rvert = (x^2 + y^2)^{½}$
极性	P(r,Θ)	$r = [(r\cdot\cos\Theta)^2 + (r\cdot\sin\Theta)^2]^{½}$

在这三种情况下，长度/**距离似乎都是**毕达哥拉斯。

其他文献中也提到了极坐标，但在本书末尾处理复数时，将更多地考虑极坐标。

二维向量函数（参数曲线）

如果我们考虑一个在 x 方向上前后移动的函数（例如圆函数），则每个 x 值不再只有一个 y 值。那么我们必须将它描述为一个向量函数，它在坐标系中的曲线称为参数曲线。我们引入一个参数，通常称为 t，因为该参数通常是时间或与时间成比例。因此，该参数定义了我们在曲线上的位置。

我们这样写向量函数

$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ 这是向量函数的定义

2D 中的向量函数可以被视为将 x 描述为 t 的函数的一个方程，以及将 y 描述为 t 的函数的另一个方程。

直线的向量函数

让我们考虑一个我们已经知道的例子，即直线

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ 二维直线的向量函数 $\Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0+t\cdot r_1 \\ y_0+t\cdot r_2 \end{pmatrix}$

或作为两个方程

$x(t) = x_0 + t\cdot r_1$ 和 $y(t) = y_0 + t\cdot r_2$

直线不会在 x 方向上前后移动，因此我们并不真正需要这个向量函数，但它是一个很好的例子。

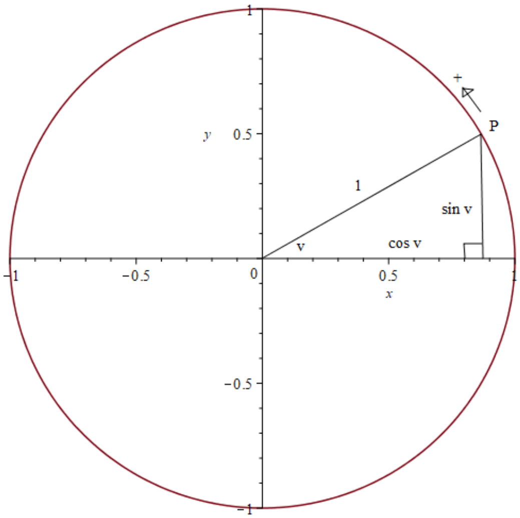
圆的向量函数

圆方程是我们已知的

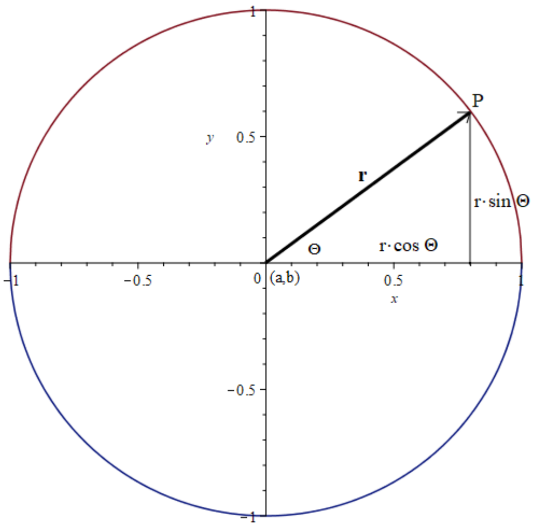
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

这是我们由毕达哥拉斯发现的，它为我们提供了圆上一点的坐标（x, y）的静止图像。但是，例如，如果我们知道 a、b、y 和 r，并且分离 x，我们就有一个带有 x 的两个根的二阶方程。如果我们只想要一个根，我们必须找到圆向量函数：

再次，我们考虑单位圆



并更改符号



现在，Origo 是放置在建筑物中的非旋转（静止）机器的本地中心。相对于建筑物的坐标系，我们的 Origo 的坐标为 O(a, b)。

点 P（转子上的画点）距中心 (O) 的距离为 r（半径），由位置矢量（也称为半径矢量）**r** 描述。

以度为单位的角度 v 现在是以弧度为单位的角度 θ（希腊字母 teta）。

相对于机器自身的局部坐标系，P 有坐标

P(r·cos Θ, r·sin Θ)

位置向量 **r** 的向量函数变为

$$\mathbf{r}(\Theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos\theta \\ r\cdot\sin\theta \end{pmatrix}$$ 现在 θ 是参数

相对于建筑物坐标系，**r** 的坐标为

$$\mathbf{r}(\Theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + r\cdot\cos\theta \\ b + r\cdot\sin\theta \end{pmatrix}$$

这是圆的完全展开的向量函数（或参数函数）。

请注意，现在 θ 是变量。位置 r 取决于角度（参数）θ。

向量函数的微分

矢量函数的参数曲线有切线。切线的斜率是通过微分找到的，因为我们习惯遵循相同的计算规则。新颖之处在于分成 x 的方程和 y 的方程，它们分别相对于 t 进行微分。那么：当 t 改变时 x 如何改变？当 t 改变时 y 如何改变？我们通过微分系数观察这一点

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

矢量函数可能有垂直切线。

直线向量函数的微分

让我们再次看一下我们已经知道的例子，直线。我们知道微分系数应呈现恒定的斜率 a。让我们来看看：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \qquad =>$$

$x(t) = x_0 + t\cdot r_1$ 和 $y(t) = y_0 + t\cdot r_2$ =>

$x'(t) = 0 + r_1$ 和 $y'(t) = 0 + r_2$ =>

$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ 这是给出斜率的方向向量：

$$坡 = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{r_2}{r_1} = a$$

这样，当我们对直线的向量函数求导时，就可以得到斜率，我们通常称之为 a。因此，它与我们已知的情况相符。

圆的向量函数的微分

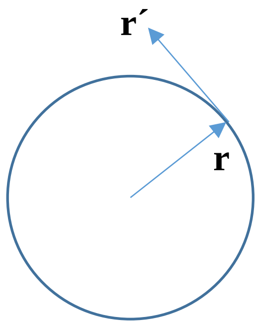
$\mathbf{r}(\Theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + r \cdot \cos\theta \\ b + r \cdot \sin\theta \end{pmatrix}$ θ 是参数 =>

我们对 θ 进行微分并得到

$\mathbf{r}'(\Theta) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin\theta \\ r \cdot \cos\theta \end{pmatrix}$

我们看到(a, b)消失了（这对应于圆在建筑物中的位置肯定对圆的切线斜率没有影响的事实）。此外，我们还看到 **r**´ 的 x 坐标与 **r** 的 y 坐标相似，只是相反（负），并且 **r**´ 的 y 坐标与 **r** 的 x 坐标相似。因此，**r**´ 相对于 **r**（对应于切线方向）旋转 90° 。

以简化图显示：

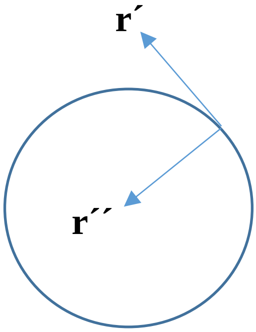


如果我们再次微分（二阶微分系数，二阶导数），我们得到

$\mathbf{r}''(\Theta) = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cdot \cos\theta \\ -r \cdot \sin\theta \end{pmatrix}$

这是一个与 **r** 相反的向量 **r**´´（由于 x 和 y 都是负值）。

用简单的图展示一下：



正如预期的那样，一阶导数与圆相切。

二阶导数在数学中没有直接意义，但在物理学中却有直接意义，如以下示例所示。

实施例 1

现在机器以恒定速度（恒定角速度）旋转，我们观察点 P（画点）。

此外，我们定义恒定角速度：

$$\text{恒定角速度} = \frac{\text{以弧度表示的角度}}{\text{时间以秒为单位}} \quad =>$$

$$\omega = \frac{\theta}{t} \quad \Leftrightarrow \quad \Theta = \omega t$$

由于 ω 是常数，变量从 θ 变化到 t，三个方程为

$$\mathbf{r}(t) = \binom{x}{y} = \binom{a + r\cdot\cos\omega t}{b + r\cdot\sin\omega t} \quad =>$$

$$\mathbf{r}'(t) = \binom{x'}{y'} = \binom{-r\omega\cdot\sin\omega t}{r\omega\cdot\cos\omega t} \quad \text{区分“外、内”} \quad =>$$

$$\mathbf{r}''(t) = \binom{x''}{y''} = \binom{-r\omega^2\cdot\cos\omega t}{-r\omega^2\cdot\sin\omega t} \quad \text{区分“外、内”}$$

r 是位置

r´ 称为切向速度 **v** 切向的

r´´ 称为向心加速度 **a** **向心的**

正如所观察到的，向心加速度指向圆心，这是所有匀速圆周运动的情况。

变速圆周运动还具有指向中心的向心加速度（否则不会有圆周运动），– 其与切向加速度一起构成整个加速度（两个分量）。

2.

让我们尝试找出大小的公式 **v** 切向的 和 **a** **向心的**:

毕达哥拉斯对于 **v** 切向的

v 切向的 $= [(- r\omega\cdot\sin \omega t)^2 + (r\omega\cdot\cos \omega t)^2]^{½}$ ⇔

v 切向的 $= [(r^2\omega^2((\sin \omega t)^2 + (\cos \omega t)^2)]^{½}$ ⇔

并通过基本关系: $(\sin v)^2 + (\cos v)^2 = 1^2$

一切都变得更短: =>

v 切向的 $= \omega r$ 这是切向速度大小的公式

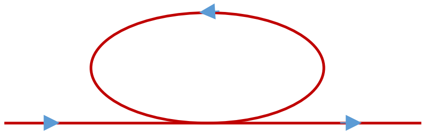
毕达哥拉斯对于 a **向心的**

a **向心的** $= [(- r\omega^2\cdot\cos \omega t)^2 + (- r\omega^2\cdot\sin \omega t)^2]^{½}$ ⇔

a **向心的** $= [(r^2\omega^4((\sin \omega t)^2 + (\cos \omega t)^2)]^{½}$ ⇔ 基础关系

a **向心的** $= r\omega^2$ 这是向心加速度大小的公式

双倍积分



如果向量函数的曲线与自身相交，我们就有一个双点。通过在图中绘制曲线并读取坐标，即图形解，可以更容易地找到双点。 CAS 的任务。

双点的定义是

$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$ => $\begin{pmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_2) \\ y(t_2) \end{pmatrix}$

双点具有相同的 x 值和相同的 y 值。差别是 t。

例子

我们将调查向量函数中是否存在双点，并找到坐标

$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$ =>

$\mathbf{r}(t_1) = \begin{pmatrix} {t_1}^3 - t_1 \\ {t_1}^2 - 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{r}(t_2) = \begin{pmatrix} {t_2}^3 - t_2 \\ {t_2}^2 - 1 \end{pmatrix}$

在双点中我们有

$x_1 = x_2$ => $t_1^3 - t_1 = t_2^3 - t_2$ 方程 1 和

$y_1 = y_2$ => $t_1^2 - 1 = t_2^2 - 1$ 方程 2

因此，两个方程有两个未知数。如果我们通过 CAS 求解，则 $t_1 = \pm 1$ 且 $t_2 = \pm 1$

所以我们在 t = −1 处达到双点，并在 t = 1 处再次达到双点

这些方程很难手动求解，但我们会尝试：

2. $t_1^2 - 1 = t_2^2 - 1$ ⇔ $t_1^2 = t_2^2$

起初 $t_1 = t_2$ **但**这是错误的，因为根必须不同。唯一正确的答案是：

$t_1 = -t_2$

我们将其代入等式 1：

1. $t_1^3 - t_1 = t_2^3 - t_2$ => $(-t_2)^3 + t_2 = t_2^3 - t_2$ ⇔

$-t_2^3 - t_2^3 = -t_2 - t_2$ => $-2t_2^3 = -2t_2$ ⇔

$t_2^3 = t_2$

这是一个最多有三个根的三次方程，通过猜测找到：0 **可以**，1 **可以**，-1 **可以。代入等式** 2：

2. $t_2 = 0$ => $t_1 = 0$ $t_2 = 1$ => $t_1 = -1$ $t_2 = -1$ => $t_1 = 1$

由于 t_1 和 t_2 一定不同，因此 0 不是根。左边是根：$t_1 = \pm 1$ 和 $t_2 = \pm 1$。

与使用 CAS 的答案相同。

因此，我们在 t = −1 处达到双点，并在 t = 1 处再次达到双点

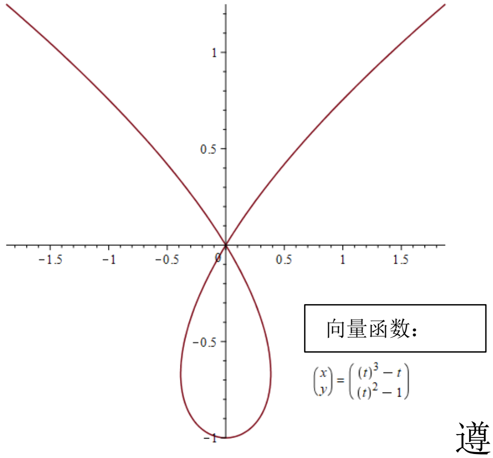
然后我们找到双点的 x 和 y 坐标：

我们插入 $t = 1$ => $\mathbf{r}(t_1) = \binom{0}{0}$ 和 $\mathbf{r}(t_2) = \binom{0}{0}$

并插入 $t = -1$ => $\mathbf{r}(t_1) = \binom{0}{0}$ 和 $\mathbf{r}(t_2) = \binom{0}{0}$

因此，一个坐标为（x， y） = （0， 0） 的双点

让我们通过在图表中显示曲线来结束示例：



遵守。

向量函数可能具有水平和/或垂直切线，用于：

水平的： $\frac{dy}{dt} = y'(t) = 0$ 和 垂直的： $\frac{dx}{dt} = x'(t) = 0$

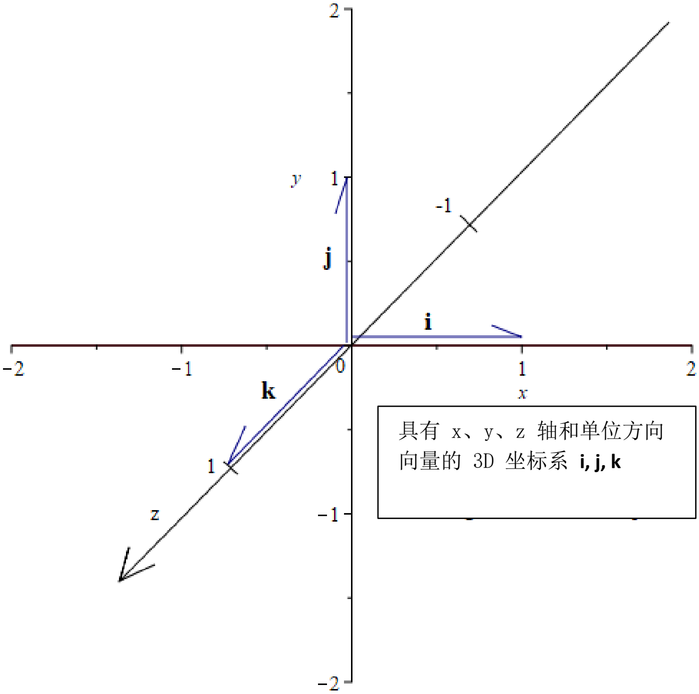
I 在示例中：

点的水平切线： $y'(t) = 2t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,-1)$

垂直的： $x'(t) = 3t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \pm 0.58 \Rightarrow (x,y) = (0.38 ; -0.67)$ 和 $(-0.38 ; -0.67)$

空间中的 3D 向量

矢量工具在 3D 空间中非常有用。这里 z 轴（第三轴）离开纸面：



单位基向量稍微绘制在轴旁边，以便我们可以看到它们。

坐标系可以在其他位置绘制，只要顺序为正方向（逆时针）x、y、z 即可。

大多数公式与 2D 相同。它们只需要扩展第三个坐标，我们称之为 z，那么它就是 3D 的。计算技术也相同。

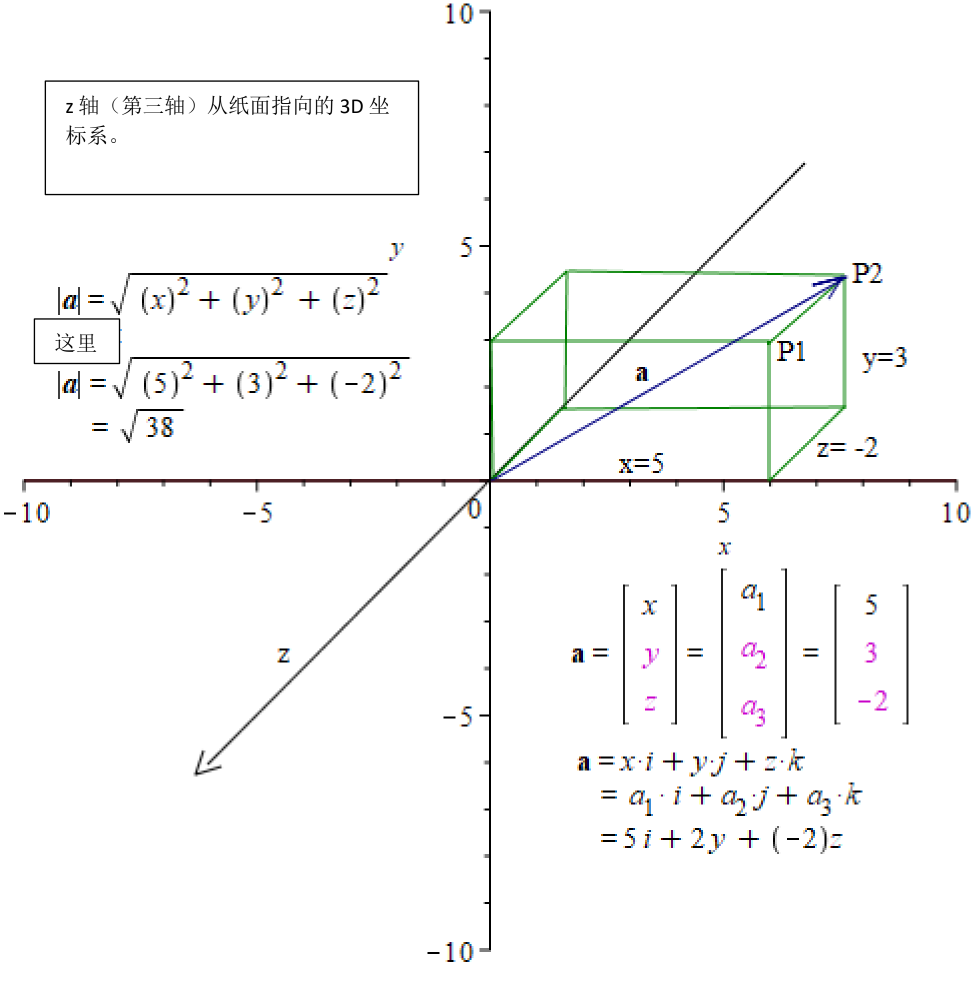
差异是：

- 行列式在 3D 中不存在

• 3D 中不使用交叉矢量。

• 现在可以通过一种新颖的、有点奇怪的工具（称为叉积或向量积）找到法向量。

在图中，我们在坐标系中以 3D 方式显示位置向量 **a**。



我们还看到了 3D 版本的毕达哥拉斯，添加了 z 坐标。它是这样衍生的：

a 可以分割为从 0（Origo）到 P1 的长度为 $(x^2+y^2)^{½}$ 的向量加上 z 方向上从 P1 到 P2 的长度为 z 的向量。这两个向量是正交的，因此毕达哥拉斯适用：

$|\mathbf{a}|^2 = [(x^2+y^2)^{½}]^2 + z^2 \qquad =>$

$|\mathbf{a}|^2 = (x^2+y^2) + z^2 \qquad \Leftrightarrow$

$|\mathbf{a}|^2 = x^2+y^2+z^2 \qquad \Leftrightarrow$

$|\mathbf{a}| = (x^2+y^2+z^2)^{½}$

也可以写成平方根，如图所示。

点对点距离

两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离也可以从毕达哥拉斯找到。

$|P_1P_2| = ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2)^{½}$

例子

1.

我们有两个向量 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ 和 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$

他们的总和是 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

和差异 $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}$

和 **b - a** $= \begin{pmatrix}-1\\-6\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-9\\9\end{pmatrix}$

单独的 x 坐标、单独的 y 坐标和单独的 z 坐标。

2.

图中长度为 a 两倍（2）且方向相反（-）的向量具有坐标

$$-2 \cdot \begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\-6\\4\end{pmatrix} = -2\mathbf{a}$$

3.

让我们计算两个 3D 向量的点积，例如 a 和 -2a

$$\mathbf{a} \cdot (-2)\mathbf{a} = \begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-10\\-6\\4\end{pmatrix} = (-50) + (-18) + (-8) = -76$$

4.

a 可以分为三个分量，一个在 x 方向，一个在 y 方向，一个在 z 方向。我们这样写：

$$\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + (-2)\mathbf{k} = \begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}$$

因此，如果我们站在 Origo 并在 x 方向上行走 5 步，在 y 方向上行走 3 步，在 -z 方向上行走 2 步，我们将到达矢量终点（箭头）。

同样在 3D 中，我们可以将向量分割为您想要的分量，例如：

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

存款规则。

如果我们使用名称 **OP**（因为它从点 O 通向点 P）而不是 a，并在（1, 0, 2）中引入点 Q，我们有：

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

我们从 O 到 Q，再到 P。从 O 到 P 组合。

或者如果我们找到 **QP**：

$$\mathbf{QP} = \mathbf{OP} - \mathbf{OQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

5.

两点 A(1, −1, 8) 和 B(−2, 3, −3) 之间的距离为

$|P_1P_2| = ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2)^{½}$ => 这里

$|AB| = ((-2) - 1)^2 + (3 - (-1))^2 + ((-3) - 8)^2)^{½} \approx 12{,}08$

更多理论

叉积（向量积）

两个向量的叉积可以这样写：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{23} \\ d_{31} \\ d_{12} \end{pmatrix}$$ d 为行列式。

计算方法是将 3 个行列式放在一起并以“十字”形式相乘（就像 2D 中的行列式一样）：

$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ = $a_2b_3 - a_3b_2$ = d_{23} = 新向量 x 值的数字

$\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$ = $a_3b_1 - a_1b_3$ = d_{31} = 新向量 y 值的数字

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ = $a_1b_2 - a_2b_1$ = d_{12} = 新向量 z 值的数字

使用计算出的坐标渲染新向量。

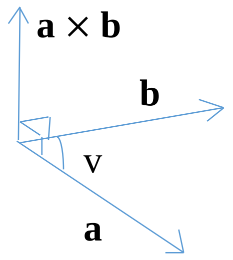
很奇怪，但对于点积和二维行列式来说它是有用的。

也就是说，交叉向量与两个原始向量（此处：a 和 b）正交。我们发现这一点，因为点积为零：

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} =$$

$(a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2) + (a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3) + (a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1) = 0$

点积为零，意味着 a 和交叉向量（a × b）是正交的。类似的计算表明 b 和（a × b）也是正交的。因此，交叉向量是 a 和 b 的法向量。



(b × a 将给出相反的交叉向量)

因此，我们有一个工具可以找到 a 和 b 的法向量，这在接下来的公式中至关重要。

两个向量之间的角度

就像使用点积计算两个向量之间的角度一样

$\cos v = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\mathbf{b}|}$ 在 2D 中得到证明，在 3D 中也有效

和 2D 的行列式

$\sin v = \frac{\det(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$ 已在 2D 中证明，仅在 2D 中有效

我们可以使用 3D 叉积求出角度

$\sin v = \frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$ 以 3D 形式显示数字

看来 2D 中的行列式已变成 3D 中的叉积。这个公式的字母证明很长。相反，我们在下面的示例中用数字来显示它。

区域

我们还可以求出由两个向量 a 和 b 展开的平行四边形的面积。从 2D 我们知道：

$\text{区域}_{\text{平行四边形}} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin v$

如果我们将该方程与上面的公式进行比较，形式为

$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin v$

我们求出向量展开的平行四边形的面积

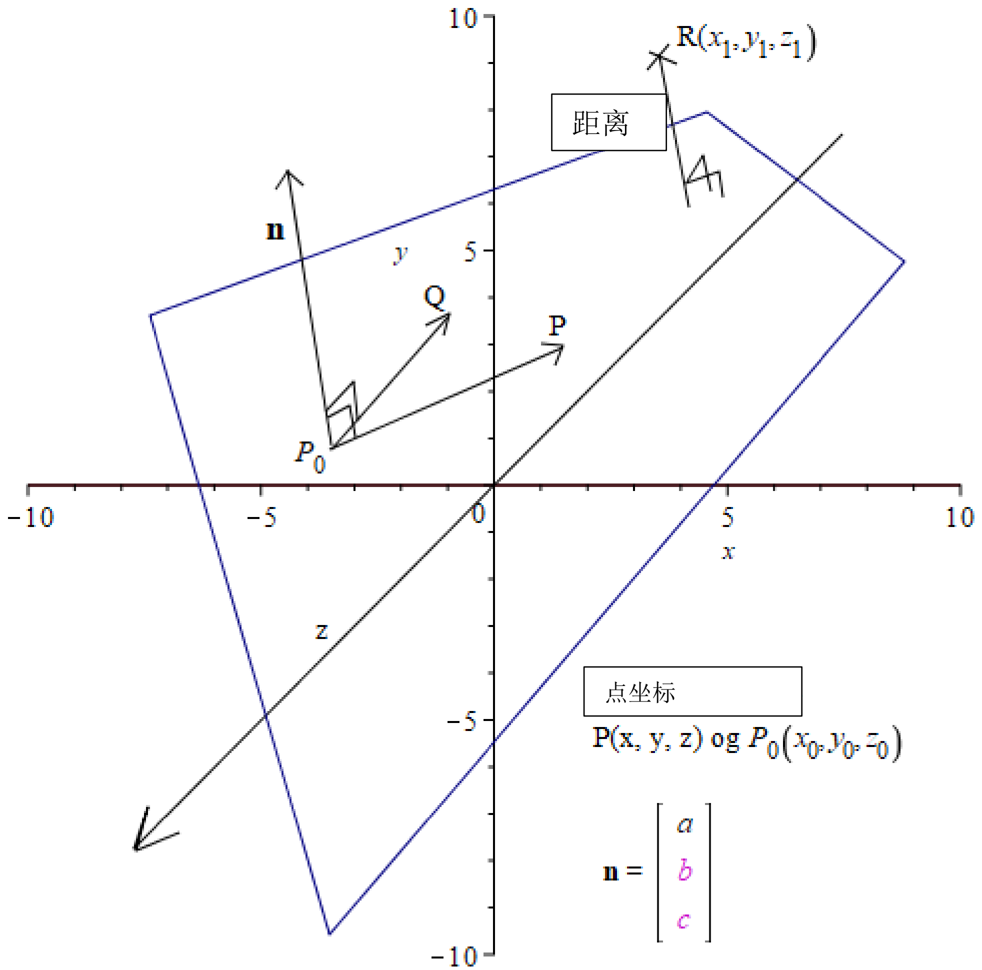
$区域_{平行四边形} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$

对于三角形，向量展开

$区域_{三角形} = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$

平面方程

平面可以是墙（直的或斜的）、地板、屋顶侧面等。我们需要知道平面的方程。平面是 2D 图形，但它在 3D 坐标系中可能具有倾斜位置，因此必须具有 3D 公式。平面在其两个方向上是无限的，但其图像可能是有限的：



我们必须了解关于平面的三件事，通常是三个点。它们用于形成两个向量及其交叉向量，该向量就是平面的法向量。

尝试拿着一本书，并在正面或背面正交地放置一支铅笔（这并不重要）。想象一下铅笔稳稳地坐着。如果书被转动，铅笔也会跟着转动。因此法向量“属于”平面并且可以在平面方程中使用：

图中，利用已知点构成两个向量 P_0P 和 P_0Q。它们的叉积给出法向量 n。我们知道两个正交向量的点积为 0

$\mathbf{P_0Q} \cdot \mathbf{n} = 0$ =>

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

这是平面方程，其中 a、b、c 是平面法向量的坐标，x_0、y_0、z_0 是平面中点的坐标。

如果我们乘入括号

$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$ =>

由于 P_0 是平面上的已知点，因此 P_0 的坐标将满足平面方程。因此我们将 $- ax_0 - by_0 - cz_0$ 视为已知大小，称为 d。因此

$ax + by + cz + d = 0$

是平面方程的简短版本。

点-平面距离

图中还显示了点 R，其垂直距离为 dist。到飞机上。

点-平面距离公式推导如下：

我们从图中的两点形成一个向量 P_0R（该向量没有画出）

$$\mathbf{P_0R} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}$$

我们将其投影到平面的法向量上

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

通过使用投影长度公式

$|\mathbf{b_a}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$

在我们的例子中是

距离 $= \frac{|\mathbf{P_oR} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$

分子是

$\left| \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right| = | ax_1 - ax_0 + by_1 - by_0 + cz_1 - cz_0 |$

和之前一样我们替换 $- ax_0 - by_0 - cz_0 = d$ =>

$| ax_1 + by_1 + cz_1 + d |$

分母是

$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ （毕达哥拉斯）

综合起来我们有

距离 $= \frac{| ax_1 + by_1 + cz_1 + d |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

其中 x_1、y_1、z_1 是点的坐标，– 和 a、b、c、d 来自平面方程的简短版本。

例子

1.

求两个向量之间的角度以及它们展开的平行四边形的面积，当

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 和 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

角度通过点积计算

$$\cos v = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\boldsymbol{a}|\ |\mathbf{b}|}$$

其中分子 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 - 4 + 9 = 4$

和分母 $(1^2 + 2^2 + 3^2)^{½} \cdot ((-1)^2 + (-2)^2 + 3^2)^{½} = 14$

组合 $\cos v = \frac{4}{14} \quad \Leftrightarrow \quad v = \cos^{-1}\left(\frac{4}{14}\right) \approx 73.4°$

让我们使用叉积来看看同样的结果

$$\sin v = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

分子 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

分子 $\left| \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = (12^2 + (-6)^2 + 0^2)^{½} = 180^{½} = \sqrt{180}$

分母 $(1^2 + 2^2 + 3^2)^{½} \cdot ((-1)^2 + (-2)^2 + 3^2)^{½} = 14$

组合 $\sin v = \frac{\sqrt{180}}{14} \Leftrightarrow v = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{180}}{14}\right) \approx 73.4°$

同样的答案。

向量展开的平行四边形的面积，我们选择通过以下方式计算

区域$_{平行四边形}$ = $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ => 这里

区域$_{平行四边形}$ = $\sqrt{180} \approx 13.4$

因为上面计算了叉积。

2.

让我们找到具有法向量的平面方程

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ 和一个点 $P_0(4, 3, -5)$ =>

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ => 这里

$-1(x - 4) + 5(y - 3) + 2(z - (-5)) = 0$ ⇔

$-x + 4 + 5y - 15 + 2z + 10 = 0$ ⇔

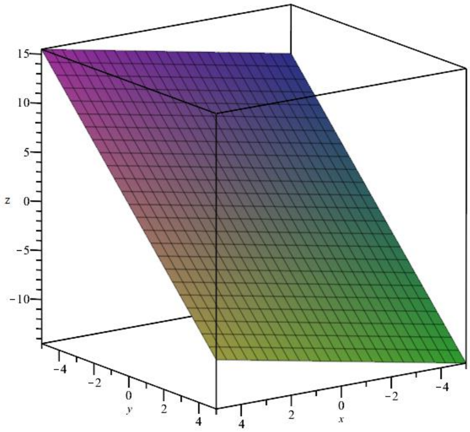
$-x + 5y + 2z - 1 = 0$ ⇔

$x - 5y - 2z + 1 = 0$

这是我们平面的方程。

这里我们以 3D 绘图的形式显示该平面：

ISBN 978-87-975307-4-0



3.

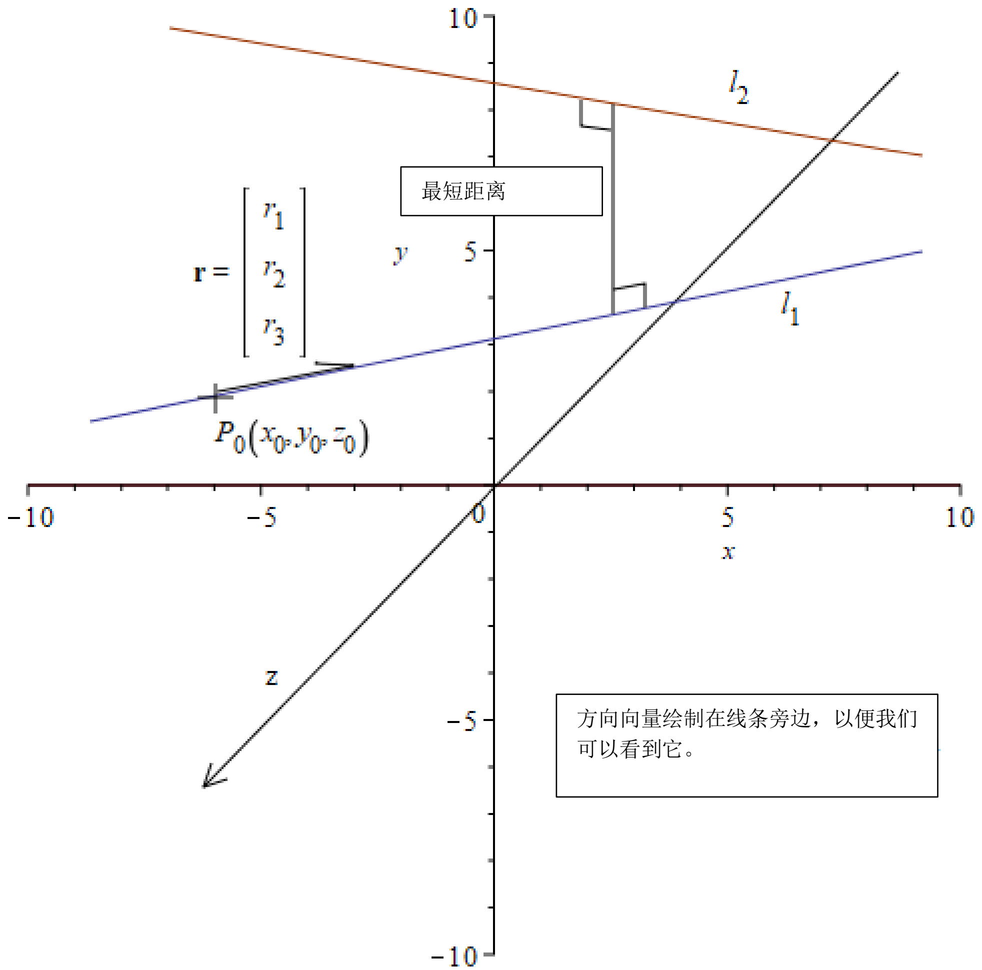
点（2，0，3）到平面 x – 5y – 2z + 1 = 0 的距离为

距离 = $\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1\cdot 2+(-5)\cdot 0+(-2)\cdot 3+1|}{\sqrt{2^2+0^2+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \approx 0.832$

空间中的直线

我们已经看到了直线的五个方程：两个在普通数学中，三个在二维向量数学中，其中第三个是显示参数曲线的向量函数。

当我们考虑 3D 直线方程的可能性时，我们只能使用基于直线上的点 P0 和直线的已知方向向量的向量函数。就像在 2D 中一样，只是现在添加了 z 坐标。



直线的矢量函数直接从图中的线 11 推导出来。从点 P0 开始，方向向量可以通过乘以一个参数（我们称之为 t）沿线上下移动一个点（箭头）（参数是希腊语，这里的意思是“沿着测量的方向”），并且可以是任何实数数字：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

这是 3D 直线的矢量函数（参数函数），其中 x_0、y_0、z_0 是直线上点的坐标，t 是参数。 r_1、r_2、r_3 是方向向量。

线可以是平行的、相交的，或者在大多数情况下：倾斜的线。

如果有多于一行，则每一行的参数必须具有不同的名称，例如 t、s 等。

倾斜线之间的距离（最短）

该图还显示了线 l_2 以及 l_1 和 l_2 之间距离最短的线。只有一条线满足这一点，并且它与 l_1 和 l_2 都正交。

两条线都有一个已知点，我们现在称为 P_1 和 P_2（尽管未显示），并且两条线都有一个已知方向向量，我们称为 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$（尽管未显示）。

如果我们穿过 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$，我们就会得到一个法向量 $\mathbf{n}$，它只能放置在距离线上。

我们现在形成一个向量 P_1P_2 （未显示）并使用投影长度公式将其投影到 $\mathbf{n}$ 上。这将呈现线之间的最短距离：

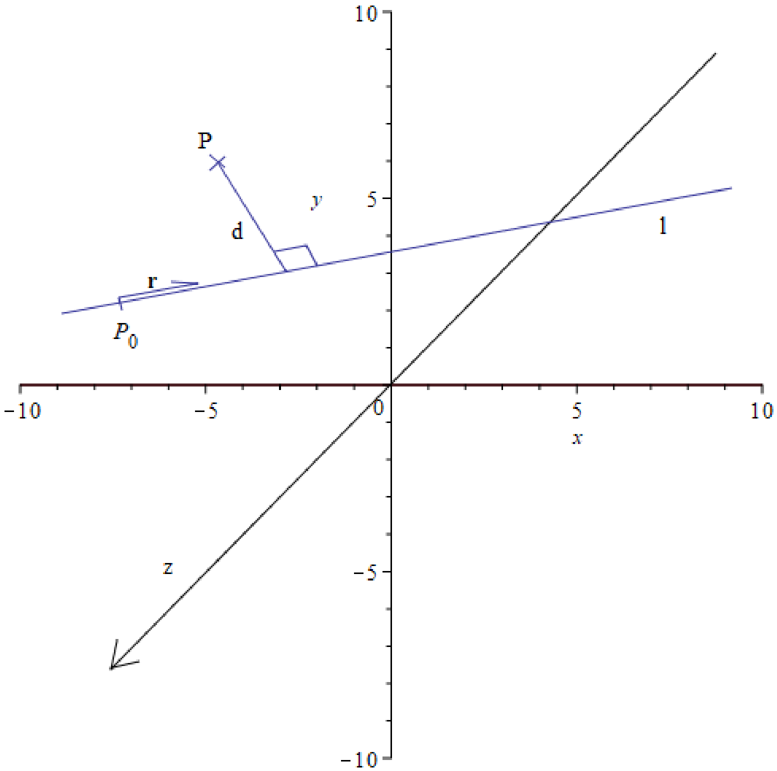
$|\mathbf{b_a}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$ 在我们的例子中 =>

距离 $(l_1,l_2) = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{P_1P_2}|}{|\mathbf{n}|}$

其中 P_1 是直线 l_1 上的点，P_2 是直线 l_2 上的点，而 $\mathbf{n}$ 是直线方向向量的公共法向量。

点线距离（最短）

从点（P）到直线的距离（d）与从点到直线方向向量的距离相同，即从 P 到 **r** 的距离。



P_0 是线上的已知点。我们用 P_0P 和 l 之间的角度 v 形成一个向量 P_0P（未显示）。然后

$d = |\mathbf{P_0P}| \cdot \sin v$ 距离现在称为 d

sin v 可以从我们在示例中所示的公式中找到：

$\sin v = \dfrac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$ 这里

$\sin v = \dfrac{|\mathbf{r} \times \mathbf{P_0P}|}{|\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{P_0P}|}$ => 插入到 d 中

$$d = |\mathbf{P_0P}| \cdot \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{P_0P}|}{|\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{P_0P}|} \quad \Leftrightarrow$$

$$d = \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{P_0P}|}{|\mathbf{r}|}$$

即点-线距离公式，其中 P 为点，r 为线的方向向量，P0 为线上的点。

两个平行平面之间的距离

例如，如果平面的法向量成比例，则平面是平行的

$x - 5y - 2z + 1 = 0$ 和 $-2x + 10y + 4z = 0$

在那里可以看到

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} + (-2)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$ 比例因子为-2

然后，通过在一个平面中选择一个点来找到距离，并使用距离公式点-平面计算到另一平面的距离。

两个平面之间的角度 v

等于它们的法向量之间的角度，可以通过两种方式找到，如前面所示。

通过点积

$$\cos v = \frac{\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2}}{|\mathbf{n_1}| \cdot |\mathbf{n_2}|}$$

或通过叉积

$$\sin v = \frac{|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}$$

然后通过反函数来完成分离角度（这里称为 v）。

法向量可能指向远离平面任一侧的方向，因此根据所选的一侧，我们可以找到平面之间的锐角（< 90°）或钝角（> 90°）。

直线与平面的夹角

通过直线的方向向量与平面的法向量之间的角度 u 求得。如上所述，可以通过点积来完成

$$\cos u = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{n}|}$$

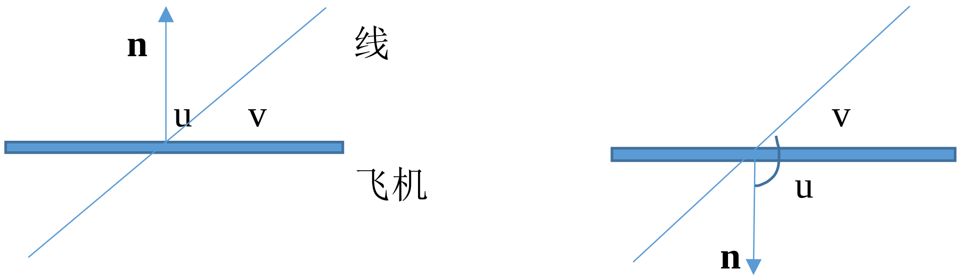
或通过叉积

$$\sin u = \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{n}|}{|\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{n}|}$$

并继续使用反函数来隔离 u。最后，考虑到 **n** 相对于平面旋转 90°，计算直线和平面之间的角度 v。此外，由于 **n** 可能在平面的任一侧，因此我们的 v 必须通过以下方式找到

任何一个 $v = 90° - u$　　　　或者　　　　$v = u - 90°$

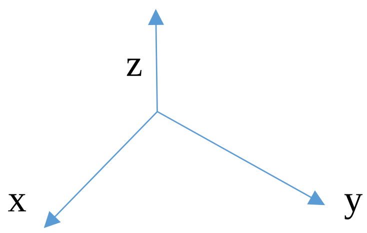
从图中可以看出:



例子

1.

我们现在选择一个局部坐标系，其中 x 和 y 是水平的，z 是垂直的。这通常应用于户外地形。测量员利用全球系统（gps）以及相对于已知固定点（如旧建筑物的基石）的本地系统。



我们将找到两条线之间的距离并以米为单位计算：

铁路立交桥的底面沿着一条穿过点 (10, 10, 7) 的直线，并具有一个方向向量 $\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$，该方向向量呈现此向量函数

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \quad => \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\10\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$$

可以看出，方向向量 z 坐标为 0，因此该线（此处为铁路立交桥）是水平的。

高速公路的顶部沿着通过点 (5, 6, 2) 的直线，并具有呈现此向量函数的方向向量 $\begin{pmatrix}-1\\5\\0.2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad => \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

可以看出，方向向量 z 坐标不为 0，因此该线（此处为高速公路）不是水平的。

据观察，方向向量不同，因此线是倾斜的并且会在某处交叉，其中最短距离可以计算为

$$距离\ (l_1,l_2) = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{P_1P_2}|}{|\mathbf{n}|}$$

我们称铁路立交桥为 l_1，高速公路为 l_2。

P_1 是 l_1 上的已知点： (10, 10, 7)

P_2 是 l_2 上的已知点： (5, 6, 2)

向量 P_1P_2 则为： $\begin{pmatrix} 5-10 \\ 6-10 \\ 2-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

常见的法线向量为：

$$\mathbf{n} = \mathbf{r_1} \times \mathbf{r_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ -0.4 \\ 13 \end{pmatrix}$$

分子 $\left|\begin{pmatrix} 0,6 \\ -0.4 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = |-3 + 1.6 - 65| = 66.4$

分母 $((0,6)^2 + (-0.4)^2 + 13^2)^{½} \approx 13.02$

组合距离 $(l_1,l_2) = \frac{66.4}{13.02} \approx 5.1$ m (米)

2.

高速公路的中心线具有（如示例 1 所示）矢量函数

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

相对于相同的局部坐标系，有人希望在最靠近高速公路的拐角处建造一座坐标为（301， 411， 9）的房屋。让我们计算中心线和角点之间的距离（以米为单位）：

距离 $= d = \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{PoP}|}{|\mathbf{r}|}$ 在哪里

分子 $|\, \mathbf{r} \times \mathbf{P_0P} \,| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0.2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 301-5 \\ 411-6 \\ 9-2 \end{pmatrix} \right| =$

$$\left| \begin{pmatrix} -46 \\ 66.2 \\ -1885 \end{pmatrix} \right| = ((-46)^2 + 66.2^2 + (-1885)^2)^{½} \approx 1887$$

分母 $|\mathbf{r}| = ((-1)^2 + 5^2 + 0.2^2)^{½} \approx 5.103$

组合 $d = \frac{1887}{5.103} \approx 369.8$ meters

3.

我们将找到两个平行平面之间的距离

$x - 5y - 2z + 1 = 0$ 和 $-2x + 10y + 4z = 0$

首先，我们控制平面是平行的，并发现它们的法向量成比例（比例为 -2）。所以，它们是平行的。 （否则继续下去就没有意义了）。

在第一个平面中，我们选择一个 x = 0 且 y = 0 的点，将其插入并得到 $z = \frac{1}{2}$

从点 $(0, 0, \frac{1}{2})$ 到另一个平面 $-2x + 10y + 4z = 0$ 的距离为

$d = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ => 这里

$$d = \frac{|(-2)\cdot 0+10\cdot 0+4\cdot 0{,}5+0|}{\sqrt{(-2)^2+10^2+4^2}} = \frac{|0+0+2+0|}{\sqrt{120}} = \frac{2}{\sqrt{120}} \approx 0.183$$

4.

让我们求示例 3 中两个平面之间的角度。我们知道它们是平行的，因此角度必须为 0° 。这次我们用点积的公式来控制

$\cos v = \frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\cdot|\mathbf{n}_2|}$ => 这里

分子 $\begin{pmatrix}1\\-5\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\10\\4\end{pmatrix} = -2 + (-50) + (-8) = -60$

分母 $(1^2 + (-5)^2 + (-2)^2)^{½} \cdot ((-2)^2 + 10^2 + 4^2)^{½} = 60$

组合 $\cos v = \frac{-60}{60} = -1$ => $v = 180°$

我们得到 0° 还是 180° 取决于法向量的方向。因此，180° 的答案与平行平面很好地对应。

5.

屋顶表面位于一个平面上，方程如下

$x + 0y - z = 0$ 或者 $z = x + 0y$

 ISBN 978-87-975307-4-0

烟囱的中心线有方程

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

烟囱的中心线与屋顶表面在哪一点相交？ （即直线与平面在哪里相交？）。

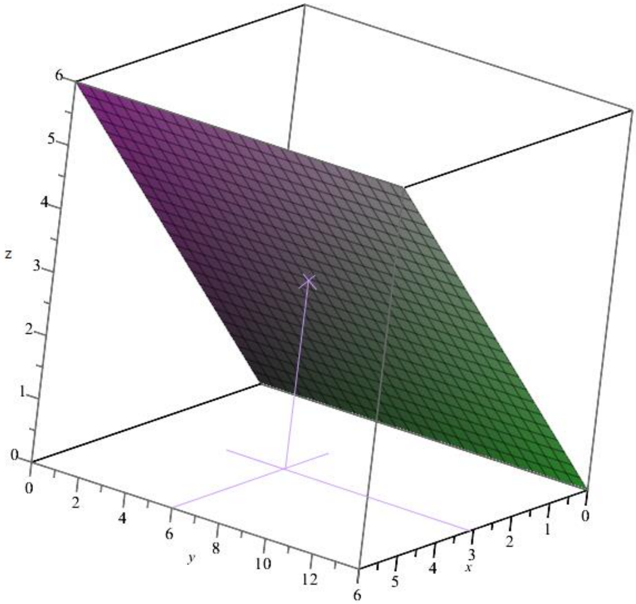
烟囱和屋顶之间的锐角是多少？

屋顶相对于水平面的角度是多少？

我们需要包含 y 坐标（即使它是 0）以表明我们正在处理一个平面。如果我们不这样做，人们就会认为我们考虑的是二维直线。

0y 表示平面相对于 y 轴不弯曲。 y 确定我们在屋顶长度中的位置，而 x 和 z 确定屋顶的坡度。

飞机无限大，而飞机上的屋顶尺寸有限。我们将建造一座长 14 米、宽 12 米的房子。因此，我们显示 x 在区间 [0;6] 中、y 在区间 [0;14] 中的图。z 将成为平面方程所呈现的结果。我们可以不用图来解决这个问题，但图中会显示一个图：



请注意，轴上的划分不是等距的。

回答：

交点是直线和平面的方程具有相同 x、y、z 值的位置。因此，两个方程有两个未知数。

我们将线插入平面：

x + 0y - z = 0 =>

所以	3 + 0t	对于 x
和	没有什么	对于 y
和	2 + 4t	对于 z

合并的 3 - (2 + 4t) = 0 ⇔

$1 - 4t = 0 \quad \Leftrightarrow$

$t = \frac{1}{4}$

因此，当“运行”参数 t 为 $\frac{1}{4}$ 时，我们就处于交叉点。将这个 t 插入直线方程中

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

这会产生交点 (x, y, z) = (3, 6, 3)，图中也显示了一些辅助线。

烟囱与屋顶夹角：

$\cos u = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{n}|} \quad =>$ 这里

分子 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -4$

分母 $(4^2)^{½} \cdot (1^2 + (-1)^2)^{½} = 4\sqrt{2}$

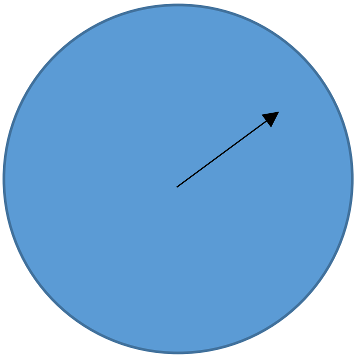
组合 $\cos u = \frac{-4}{4\sqrt{2}} \quad => \quad u = 135°$

根据法向量的方向，我们找到了钝角。烟囱与屋顶之间的锐角为 180 – 135 = 45° 。

屋顶与水平面的夹角为

垂直 - 45 = 90 - 45 = 45°

球体



箭头表示从球壳中心 C 到点 P 的半径。

在 3D 坐标系中，C 具有坐标 (a, b, c)，P 具有坐标 (x, y, z)。

C 和 P 之间的距离是半径 r。

3D 中两点之间的距离先前导出为

$|P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ 3D 毕达哥拉斯

这是

$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$ 球面方程

切面

球体上一点的切平面方程是通过形成从中心到该点的法向量来确定的，并将其用于平面方程中。

实施例 1

领域： $3^2 = (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2$

其中心位于 C(0, 1, 2) 且半径 $r = 3$

求点的切平面方程 P(0,1,5)（ $= (x_0, y_0, z_0)$ 在飞机上）

我们形成平面的法向量 结束减去开始

$\mathbf{n} = \mathbf{CP} = (0 - 0 , 1 - 1 , 5 - 2) = (0,0,3)$

代入平面方程

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ $\Rightarrow$

$0(x - 0) + 0(y - 1) + 3(z - 5) = 0$ $\Leftrightarrow$

$3z - 15 = 0$ $\Leftrightarrow$

$z = 5$ 这是切平面的方程。

第 5 部分. 统计

非常不寻常的是，统计学是不精确的数学。过去，人们讨论过该学科是否应该——或不应该——成为数学中的一个领域。不精确的观点是反对的，但使用数字和计算的观点是赞成的。因此，人们决定统计学是数学中的一个领域。

当我们处理大量数据时，统计是必要的，而在现实世界中，这会意味着例外和缺陷，从而无法做到精确。

因此，我们需要平均值、均值、离散度、标准差等概念和一些工具来估计计算的精度。一个好问题是：我们需要多少观察/信息/数据才能做出估计？

我们将简要讨论这一点，我们首先考虑非分组观察。

观察结果

非分组观察

一个糖果袋包含 30 颗糖果。它们的重量几乎相同，但又不完全相同。信息概览如下表：

观察。 这里每颗糖的重量以克为单位	观察次数	频率，f 满分 1	频率 满分 100， 即 %	累积频率 频率总结
2.1	1	0.0333	3.3	0.0333
2.2	5	0.167	16.7	0.2
2.3	7	0.233	23.3	0.433
2.4	7	0.233	23.3	0.666
2.5	6	0.200	20.0	0.866
2.6	4	0.133	13.3	1
全部的：	*30*	*1*	*100 %*	*1*

测量观测值和观测值数量，同时计算频率和累积频率。

制造商努力使每颗糖果的平均重量达到 2.35 克。我们还观察到，2.35 是 2.1 到 2.6 克值的平均值：

$$\text{平均的} = \frac{2.1+2.2+2.3+2.4+2.5+2.6}{6} = 2.35 \text{ 公克}$$

然而，较重或较淡的糖果之间的糖果分布并不均匀。因此，我们必须更加精确并计算平均值。平均值是所有观察值的平均值，计算方法如下：观察值乘以频率，加上下一个，依此类推 – 所有结果除以糖果总数：

$$\text{平均值} = \frac{2.1\cdot1+2.2\cdot5+2.3\cdot7+2.4\cdot7+2.5\cdot6+2.6\cdot4}{30} = 2.38 \text{ 公克}$$

或者说：观察次数加上下一个频率，等等：

平均值 =

2.1·0.333+2.2·0.167+2.3·0.233+2.4·0.233+2.5·0.2+2.6·0.133 =

2.38 公克

因此，消费者花的钱可以得到更多的东西。

四分位数是将数据点的数量划分为四个部分或四分之一。第一个四分位数等于或大于数据的 25%，可以在“累积频率”列中读取。第二个四分位数（也称为中位数）占数据的 ≥ 50%。第三个四分位数是 ≥ 75% 的数据，最后，第四个四分位数包含整个观测系列的所有数据，即 100%。四分位数也可称为百分位数。

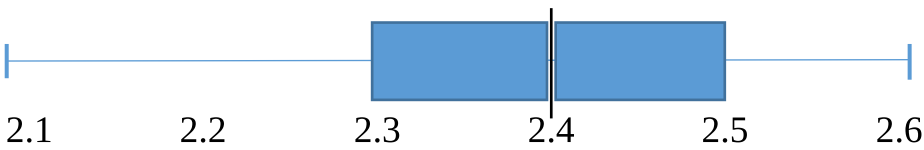
一组四分位数由第一、第二和第三四分位数组成。对于我们的糖果来说是：[2.3 ; 2.4 ； 2.5]。

我们通过制作箱形图得到一个很好的概述：

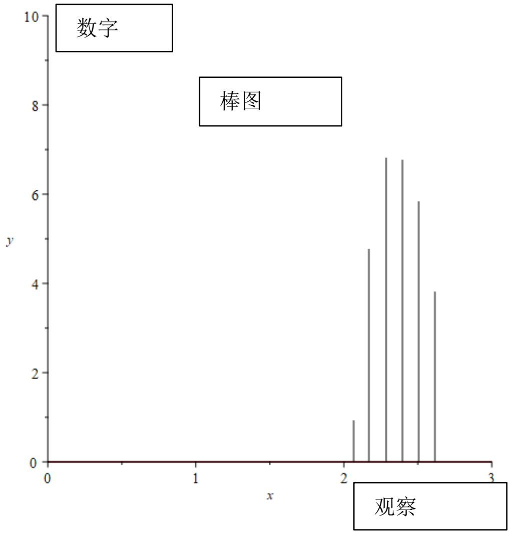
最小观测值 – 1.quartile - 2.quartile - 3.quartile - **最大**观测值

这里：2.1 - 2.3 - 2.4 - 2.5 - 2.6

和箱线图：



或者棒图：



分组观察

在滚珠轴承生产中，生产的球体直径为 5.00 毫米。有的大一点，有的小一点。这可以通过使用带有厚环的小球体和带有较薄环的较大球体来补偿。这样就不会浪费任何东西，并且滚珠轴承将具有所需的尺寸。我们将球体分组如下：

观察。 这里直径	观察次数	频率，f 满分 1	频率 满分 100 分 即以%表示	累积频率 频率总结
[4.80 ; 4.85]	1	0.01	1	0.01
]4.85 ; 4.90]	5	0.05	5	0.06
]4.90 ; 4.95]	21	0.21	21	0.27
]4.95 ; 5.00]	33	0.33	33	0.6
]5.00 ; 5.05]	31	0.31	31	0.91
]5.05 ; 5.10]	9	0.09	9	1
全部的	*100*	*1*	*100 %*	*1*

在计算平均值时，我们使用区间中间的直径，即 4.825 毫米、4.875 毫米等。因此，我们的计算有些不精确，但这是可以接受的：

平均值 =

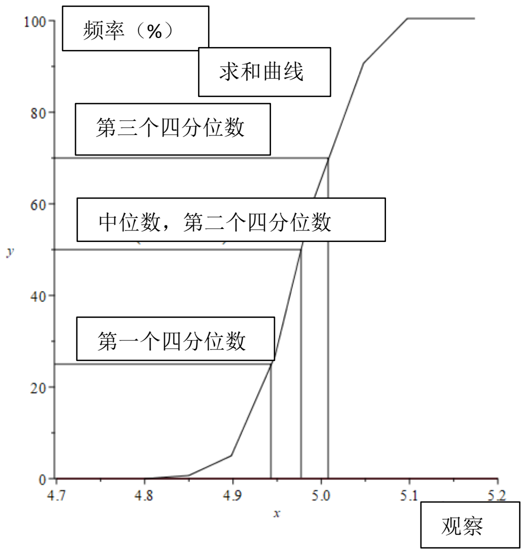
$4.825 \cdot 0.01 + 4.875 \cdot 0.05 + 4.925 \cdot 0.21 + 4.975 \cdot 0.33 + 5.025 \cdot 0.31 + 5.075 \cdot 0.09$ =

4.983 mm.

生产工厂运转良好，但可能需要进行微调。

从表中读取四分位数集太粗略了。

可以绘制箱形图或条形图，但最好在图中绘制总和曲线：



第一个轴是表中的观察结果。

第二轴是表中的累积频率。

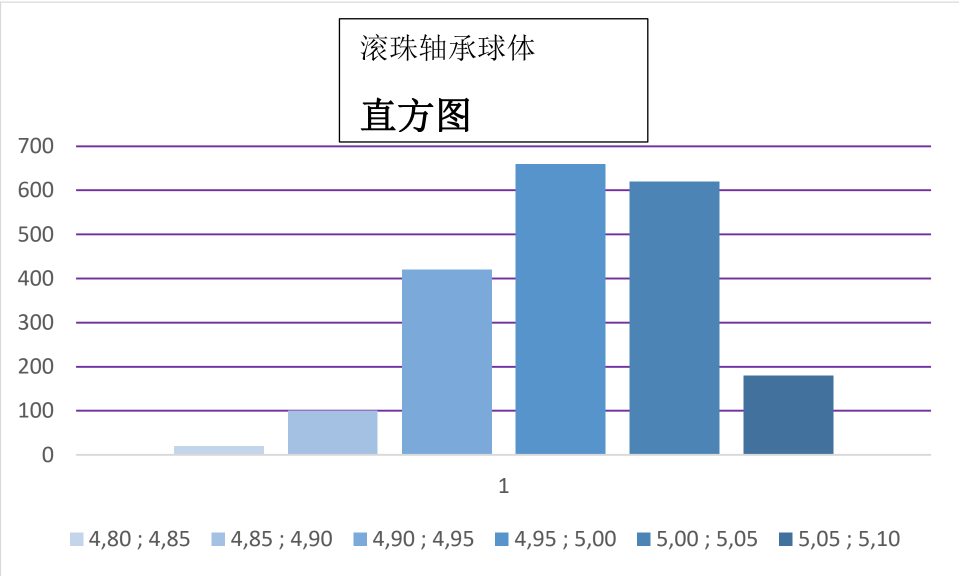
现在我们可以从总和曲线中更精细地读取四分位数集：我们从 25%、50%、75% 水平到曲线，垂直到第一个轴来读取四分位数集：[1.qua. ; 2. 夸。 ; 3.qua.] = [4.94; 4,976； 5.01]

由于它是读数，因此它会不准确（带有一些不确定性）。

我们拥有的数据越多，定义的间隔越多，总和曲线就会越精细、越平滑。

最后，我们将显示直方图，这是一种特殊的柱形图，显示测量的历史记录，使得每列的面积与间隔的频率相对应。

这里我们用表格中的数据展示滚珠轴承的生产情况：



这些组位于第一个轴上。第二个轴上是我们乘以观察宽度的数字，以百分比、% 形式呈现频率。这里所有组的宽度都是 0.05：

(4.85 - 4.80) · 20 = 1 %	0.05 · 100 = 5 %	0.05 · 420 = 21 %
0.05 · 660 = 33 %	0.05 · 620 = 31 %	0.05 · 180 = 9 %

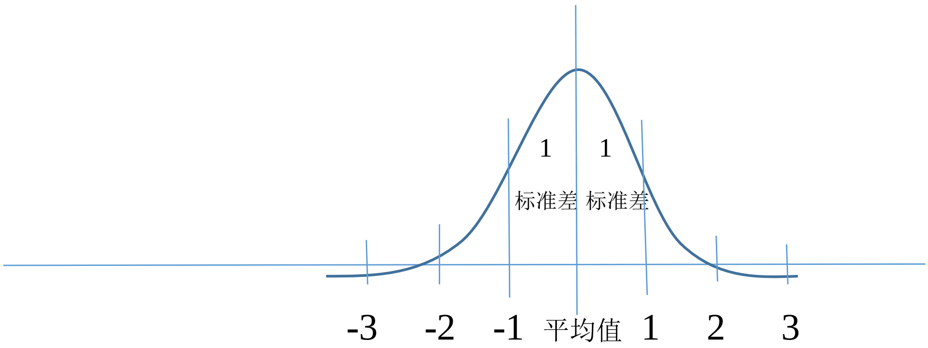
我们发现总数是 100%，正如它应该的那样。

因此，该图的第二个轴没有显示直接有用的东西。它是显示频率的面积。在某种程度上，直方图是正态分布曲线（见下文）的前身，曲线下也有面积 1 或 100%。否则，该图的优点主要是针对不同宽度的测量。

总而言之，可以公平地说，棒图和总和曲线通常可以提供最好的概览。

正态分布、方差和标准差

许多观察结果都是正态分布的，这意味着例如球体的直径将对称地分布在平均值 5 毫米周围。在我们的例子中情况并非如此，但如果我们观察 1000 个或 10000 个球体，它们可能是正态分布的。正态分布曲线可能如下所示：



区域: 0,1% 2,3% 13,6% 34,1% 34,1% 13,6% 2,3% 0,1%

如果我们根据许多正态分布的测量结果绘制棒图或直方图，我们将得到如图所示的钟形曲线。

根据比例尺的划分，该数字可能更高或更低。关键是所有观测值都位于曲线下方，因此曲线下方的面积包括所有（100%）观测值，例如我们的滚珠轴承的球体。因此，曲线下面积为 1 或 100%。

平均值两侧显示三条线。两条线之间的距离称为标准差 （或离散度）。左侧有 3 个标准差，右侧有 3 个标准差。

线 -1 和 1 之间的区域包括 68.2 % 的测量值

线 -2 和 2 之间的区域包括 95.4 % 的测量值

线 -3 和 3 之间的区域包括 98.8 % 的测量值

最后两次 0.1% 距离平均值更远，其中正态分布曲线渐近接近第一个轴。

在科学中，我们通常这样呈现数据：

平均值±标准差

因此，68.2% 的测量数据位于 ± 标准偏差范围内（即线 -1 和 1 之间）。然后我们就知道整个分布曲线是什么样的。

然而我们如何计算标准差呢？

首先，应该确定什么是标准差。

我们的想法是考虑观察值与平均值的距离，然后通过平方放大距离，同时得到一个正数，无论我们是低于还是高于平均值：

$(\text{观测值} - \text{平均值})^2$

并乘以每个观察值的显着性（即频率）

f · (观测值 - 平均值)^2 f = 频率

并总结所有观察结果

Σ f · (观测值 - 平均值)^2

Σ 的意思是“总和”。完整的数学表达式

$\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \mu)^2$

其中平均值称为 μ（希腊字母“my”），观测值称为 x_i，i（整数）是从 1（开始）到 n（结束）的观测值编号。

因此，我们将变化定义为

方差 = $\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \mu)^2$

它表示我们与平均值的距离有多远。

只是，结果有点太远了，所以我们继续取平方根来得到标准差

标准差 = $\sqrt{\text{方差}}$

标准差通常称为 σ（希腊语 sigma）

$\sigma = \sqrt{\text{方差}}$

因此，我们现在可以根据方差计算标准差。

科学家们同意将数据呈现为

平均值 ± 标准差 ⇔ μ ± σ

实施例 1

球轴承球体的平均值先前计算如下：

$\mu = 4.983$ mm.

尽管我们没有那么多数据，并且分布不均匀，大于平均值的球体较多，小于平均值的球体较少，但我们假设，如果我们有更多的数据，我们将得到正态分布。在此条件下，标准偏差可计算为

$$方差 = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \mu)^2 \qquad =>$$

$$方差 = 0.01\cdot(4.825 - 4.983)^2 + 0.05\cdot(4.875 - 4.983)^2 + 0.21\cdot(4.925 - 4.983)^2 + 0.33\cdot(4.975 - 4.983)^2 + 0{,}31\cdot(5.025 - 4.983)^2 + 0.09\cdot(5.075 - 4.983)^2 = 0.00282 \qquad =>$$

$$\sigma = \sqrt{方差} = \sqrt{0.00282} = 0.0531 \text{ mm.}$$

平均值和标准差之和为：

$\mu \pm \sigma \qquad => \qquad 4.983 \pm 0.053$ mm.

并非所有测量系列都是正态分布的。那么我们将得到一条倾斜的分布曲线。对此的进一步处理超出了本书的范围。

气的二次方 - 测试

我们可以形成一个商来评估某些观察值（区间或整个系列）是否接近或远离预期：

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(观察 - 预期观察)^2}{预期观察}$$

我们使用古希腊字母 x = Chi，商称为 chi 的 2 次方 - 检验。在分子中，我们通过平方放大偏差，同时无论我们高于还是低于预期，都会得到一个正数——与方差的思考方式相同。

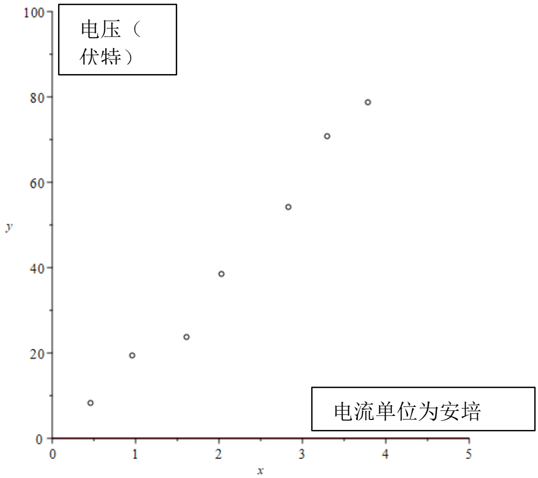
如果观测值等于预期值，则商为零，这是完美的。观察到的与预期之间的距离越大，商就越大。

 ISBN 978-87-975307-4-0

回归

在数学中，我们使用“回归”这个概念，以最佳拟合函数来组织测量。

我们去过实验室测量电路中的电流（I）和电压（U）。我们测量了这一点：



我们知道测量应遵循欧姆定律

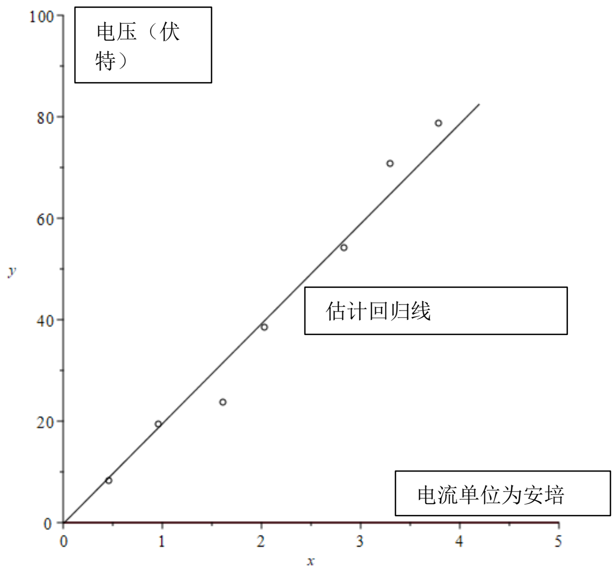
$U = R \cdot I$　　　　　其中 R 是以欧姆为单位的电阻。

这对应于穿过 Origo (0,0) 的直线方程：

$y = a \cdot x$

现在第二个轴是 U，第一个轴是 I，斜率是 R。因此，欧姆定律在 I,U 图中显示一条直线，因此我们知道我们的测量应该形成一条直线。然而，我们的测量存在不确定性，那么哪条直线最适合呢？

我们可以立即放一把尺子来看看，这条线是否近乎完美：



如果我们想通过计算确定最佳拟合线，事情就会变得更加复杂。我们使用“最小二乘法”，猜测一条线，找到测量点与线之间的垂直距离，然后对其求平方（与方差的思维方式相同）。我们对所有测量点都这样做并总结平方。然后我们猜测其他线，计算新的平方，并选择具有最小平方的线。这条线是我们计算的回归线 - 或“最佳拟合曲线”。

显然，这是一项适合高级 CAS 的重大计算工作。

无论使用计算器还是计算程序，原理都是一样的。在我们的例子中：

1. 我们输入第一个轴的测量数据并将其称为 I

2. 我们输入第二轴的测量数据并将其称为 U

3. 我们要求使用 $y = ax + b$ 进行线性回归，或者编写关键行例如：LinReg(I,U)

4. 输入

然后，我们将得到一个带有回归线及其方程的图表。

通常我们还会得到一个可靠性因子 - 通常称为 r 或 R（可能是平方：r^2 或 R^2） - 告知程序发现计算的可靠性。 1 非常好，0,99 也好； 0,95 不太好，等等。

其他函数的原理是一样的：

例如，对于指数函数 $y = b \cdot a^x$ 的回归，第一个轴上的时间和第二个轴上的数字：ExpReg(Time, Number = 时间、数量)

或者第一个轴上的时间和第二个轴上的磅，用于幂函数 $y = b \cdot x^a$ 的回归，其中关键行为：PowReg(Time, Pounds = 时间，磅)。

概率和组合

统计是我们处理大量数据的过程。有人可能会说我们回顾过去。

概率是指我们为未来发生的事情寻找可能的答案。

简单的概率可以被精确计算，例如当我们掷骰子时观察到 6 的概率。没有不确定性。

基于许多数据的复杂概率，所有数据都具有自身的不确定性，将导致不确定的概率。例如，天气预报明天凌晨 2 点有阳光。在这种情况下，我们可以计算/估计由 0 到 1 之间或 0 到 100% 之间的数字和不确定性表示的概率。例如，明天凌晨 2 点有阳光的概率为 81% ± 5%。通常公众只会被告知 81%。

复杂的概率微积分是气象学家和保险专业人士等专家的一大专业知识领域。

在这里，我们将处理简单而精确的概率计算，但这很快就会变得相当困难。我们将看到一些排列和组合的公式，它们很难证明，因此我们将通过示例来证明它们的正确性 - 这是在“很少使用的证明和计算”一章中完成的。

还应该提到的是，该主题中有许多技术术语。

我们将使用新数字，例如

5！它代表 5 的阶乘，意味着 5 • 4 • 3 • 2 • 1，顺便说一下，它给出 120。

7！它代表 7 的阶乘，意味着 7 • 6 • 5 • 4 • 3 • 2 • 1，顺便说一句，它给出 5040。

还有一点特殊之处：0！ = 1 我们必须定义它，以避免零擦除我们将要使用的公式中的所有内容。

理论

概率是 0 到 1 之间（或 0 到 100% 之间）的数字，计算公式如下

$$\text{可能性} = \frac{\text{有利结果的数量}}{\text{可能结果的数量}}$$

因此，我们需要知道分子和分母才能计算概率。

首先，我们找到可能结果的分母数，我们根据以下六种情况确定，其中 n 是池/总体中元素/对象的数量，r 是考虑的数量：

1. “两者，并且”与技术术语乘法规则：

   可能性的数量 = 一种可能性乘以另一种可能性

2. 技术术语“要么，或者” 加法规则：

   可能性的数量 = 一种可能性加上另一种可能性

3. 任意顺序的公式，无需重复（技术术语：排列 ≈ 顺序反转）

   $$\text{可能性的数量} = P = \frac{n!}{(n-r)!}$$

   将在“很少使用的证明和计算”章节中展示

4. 无顺序、无重复的公式（专业术语：组合）

   $$\text{可能性的数量} = K = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$$

将在“很少使用的证明和计算”章节中展示

5. 任何重复的顺序都符合第 1 点：“两者并且”，因此：

可能性的数量 $= n^r$

6. 无顺序、重复的公式

可能性的数量 $= \frac{(n-1+r)!}{r!\cdot(n-1)!}$ **将不会**显示

这个公式也特别是与随机抽样一起使用，我们稍后会讨论这一点。

这六个案例/公式展示了我们如何组合可能性——技术术语是组合。

在以下示例中，我们首先计算可能结果的数量（分母），然后计算概率（整数）：

例子

1.

如果我们掷骰子两次，有多少种组合？

案例是“两者，并且”，它呈现：6 • 6 = 36 种可能性

连续出现两个 6 的可能性有多大？

概率第一卷 $= \frac{\text{有利结果的数量}}{\text{可能结果的数量}} = \frac{1}{6}$

第二次掷骰子的概率 $= \frac{1}{6}$

案例是“两者，并且”，它呈现： $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 2.78\%$

2.

两个骰子上有多少个“眼睛”？

每个骰子有六个面，各有 1、2、3、4、5、6 个“眼睛”。

情况是“要么，要么”，表示：6 + 6 = 12 种可能性

用一颗骰子两掷得到一六的可能性有多大?

概率第一卷 $= \frac{1}{6}$

第二次掷骰子的概率 $= \frac{1}{6}$

情况是“要么，要么”，它呈现： $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 33.3\%$

3.

必须在由 7 名成员组成的董事会中选举一名工头、副工头和候补工头。第一个选出的人成为工头，下一个成为副工头，第三个成为候补工头。这 3 人可以通过多少种方式当选?

这里的顺序很重要，第一个当选的不会被放回池中。因此，案件是任何顺序，没有重复。公式为:

$P = \frac{n!}{(n-r)!}$

其中 P 是可能性的数量，n 是成员的数量（这里是 7），

r 是选择的人数（这里是 3）。

插入值：

$$P = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{7\cdot6\cdot5}{1} = 210 \text{ 可能性}$$

Liz 成为工头、Peter 成为副工头、Ann 成为候补工头的概率是多少？

Liz、Peter 和 Ann 是一种可能性（有利的结果），因此：

$$\text{概率第一卷} = \frac{\text{有利结果的数量}}{\text{可能结果的数量}} = \frac{1}{210} \approx 0.476\%$$

4.

必须在由 7 名成员组成的董事会中选举一名工头、副工头和候补工头。选举将显示 3 个人中谁担任 3 个职位 – 无论哪个职位。三人之间的决定被推迟到稍后。这 3 个人的选择有多少种可能？

这里顺序无关紧要，并且选定的不会被放回池中，因此：无顺序，无重复。公式为：

$$K = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$$

其中 K 是可能性的数量，n 是成员的数量

（此处为 7），r 为所选数字（此处为 3）。插入值：

$$K = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4} = \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3} = 35 \text{ 可能性}$$

莉兹和彼得、安当选的可能性有多大？

Liz/Peter/Ann 或其中的其他顺序是一种可能性，因此：

$$率第一卷 = \frac{有利结果的数量}{可能结果的数量} = \frac{1}{35} \approx 2.86\%$$

5.

代码由 25 个字母表中的 3 个小字母和 3 个数字组成。有多少种可能性？

这种情况是任何顺序，重复 => “两者都” => 乘法：

$25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 25^3 \cdot 10^3 =$ 15 625 000 可能性

拥有代码 abc123 的概率是多少？

abc123 是唯一有利的结果，因此：

$$概率第一卷 = \frac{有利结果的数量}{可能结果的数量} = \frac{1}{15\,625\,000}$$

拥有代码 abc123 或代码 bcd123 的概率为：

$$概率第一卷 = \frac{有利结果的数量}{可能结果的数量} = \frac{1+1}{15\,625\,000} = \frac{2}{15\,625\,000}$$

6.

驾校必须有四辆新车。经销商有七种型号可以使用。如果相同的组合可以重复，有多少种选择汽车的可能性？

案例无先后顺序，有重复：

$$\frac{(n-1+r)!}{r! \cdot (n-1)!} = \frac{(7-1+4)!}{4! \cdot (7-1)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210 \text{ 可能性}$$

三款车型是去年的，卖家希望能与其中一辆新车一起出售。

我们将汽车命名为 A1、A2、A3、B、C、D、E。
A1、A2、A3、B 可以以 4 种方式组合。
A1、A2、A3、C 可以以 4 种方式组合。
A1、A2、A3、D 可以以 4 种方式组合。
A1、A2、A3，可以以 4 种方式组合。
有利结果的分子数量的情况是“要么，或”=> 加法。所以：

$$概率第一卷 = \frac{有利结果的数量}{可能结果的数量} = \frac{4+4+4+4}{210} = \frac{16}{210} \approx 7.6\%$$

现在还有一些更高级的组合：

7.

一个国家的三个州聚集在一起举办足球锦标赛。将举行 10 场比赛，并进行分配，以便最大的州 A 必须举行 5 场比赛，第二个州 B 必须举行 3 场比赛，州 C 必须举行 2 场比赛 - 但哪些场比赛呢？
5 张 A 钞票、3 张 B 钞票和 2 张 C 钞票放入罐子中。共 10 条笔记。
前三场比赛将抽出三个音符。全部为 A 的概率是多少？

顺序无关紧要，因此情况没有顺序，没有重复。

我们必须计算　$概率第一卷 = \frac{有利结果的数量}{可能结果的数量}$

分子表示出现 3 种情况的可能性有多少种

5 A。 =>

分子　$K = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = \frac{120}{6\cdot 2} = 10$ 有利的结果

从整个池/总体中获取，即分母：

分母 $K = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{6\cdot 7!} = 120$ 可能性

组合 概率第一卷 $= \frac{\text{有利结果的数量}}{\text{可能结果的数量}} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12} \approx 8.33\%$

8.

三个音符显示为 A、B、B，并且没有放回去。绘制了两个新音符。 B、C 的可能性有多大?

顺序无关，因此案例没有顺序，没有重复。

现在左边是 A、A、A、A、B、C、C。即 7。 =>

分母 $K = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = \frac{7!}{2!\cdot(7-2)!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 5!} = 21$ 可能性

B 的分子 $K_B = \frac{1!}{1!\cdot(1-1)!} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1$

C 的分子 $K_C = \frac{2!}{1!\cdot(2-1)!} = \frac{2}{1\cdot 1} = 2$

K_B 和 K_C 必须组合为“两者，并且” => 乘法 =>

组合 概率第一卷 $= \frac{\text{有利结果的数量}}{\text{可能结果的数量}} = \frac{K_B\cdot K_C}{K} = \frac{1\cdot 2}{21} = \frac{2}{21} \approx 9.5\%$

二项分布、随机样本和置信区间

二项式分布，简介

在概率论中，随机变量被称为随机变量。这个名字来自古希腊语。

随机变量的二项式实验具有三个属性：

1. 结果是成功或失败（因此称为二项式）。

2. 实验 1 对实验 2 没有影响，实验 2 对实验 3 没有影响，等等——所有实验都是独立的。

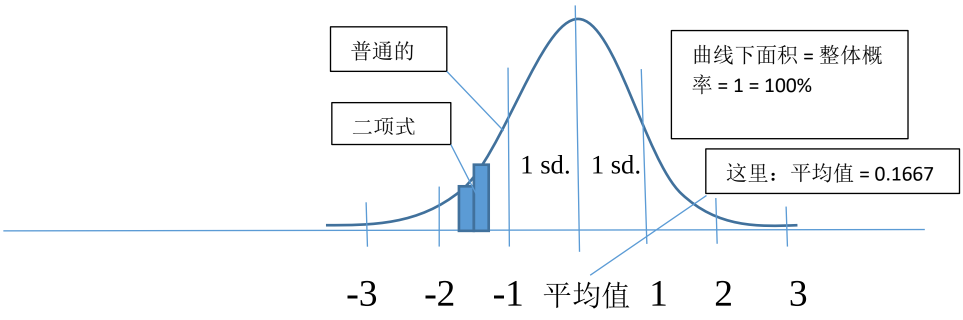
3. 所有试验都有相同的成功概率。

很好的例子是用硬币击中平顶/皇冠，或者用骰子滚动。

掷骰子

当掷骰子时，在无限次掷骰子中，有 $\frac{1}{6}$ (≈ 0.1667) 的概率出现 1 $\frac{1}{6}$ 的概率出现 2，等等。

通过有限数量的滚动，我们可以绘制一个图表，其中第一个轴为 r（数字），第二个轴为 P（概率）。然后我们得到一个二项分布，它等于统计中带有平均值和标准差的正态分布



区域： <0,1% 2,3% 13,6% 34,1% 34,1% 13,6% 2,3% <0,1%

当它描述观察结果时，例如球体的直径，我们将其称为正态分布曲线。

当它描述成功次数的概率时，我们将其称为二项分布曲线。

细节：正态分布曲线是平滑的（连续的），因为测量量（例如球体直径）可以是任何值 – 具有平滑的过渡。二项式分布曲线将是不连续的，因为成功/失败的次数是一个没有平滑过渡到下一个成功/失败次数的数字。还使用正态分布曲线是连续的技术表达，而二项分布曲线是离散的（=分离的）。但是，如果二项式分布曲线有很多点（可能显示为条形），则实际上它会是平滑的。

如果我们只滚动 24 次，则不能确定每次都会看到 4 次（4 次 6 次、4 次 5 次，等等）。

人们可以将这 24 卷称为随机样本，这显然表明我们需要一种工具来评估随机样本。

然而，首先我们必须考虑更多二项式分布的理论和公式：

二项式分布

因此，二项式分布曲线与正态分布曲线“相似”。曲线下的整个面积显示的概率为 1 或 100%。

然而，由于我们现在用曲线来描述概率，我们使用了统计之外的其他数据/信息，因此我们需要改变求均值和标准差的计算方法，以及求一个公式（函数）为二项式分布曲线。

该函数必须描述成功和失败的无序序列。三个尺寸必须组合“两者，并且” => 乘法：

二项式分布 (P) = 无序 • 成功 • 失败

这里 P 代表概率——而不是像以前那样代表排列。

无订单的组合是 $K = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$

在数量为 n 的整个群体/池中，有 r 的成功概率为 p（0 到 1 之间的数字）。必须乘以更多的成功：p^r

那些不成功的一定是失败的数字（1-p）。更多失败必须相乘，即 $(1-p)^{n-r}$

组合二项式函数为：

$$P = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}\cdot p^r\cdot(1-p)^{n-r}$$

最可能的值是平均值，其确定为

平均值 = 次数乘以概率 =>

$\mu = n\cdot p$

尺寸 x 的标准差由统计可知

$\sigma(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot(x_i-\mu)^2}$

经过漫长而困难的转换，变成：

$\sigma(x) = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$ 或只是 σ，因为变量并不总是称为 x

我们不会显示转换

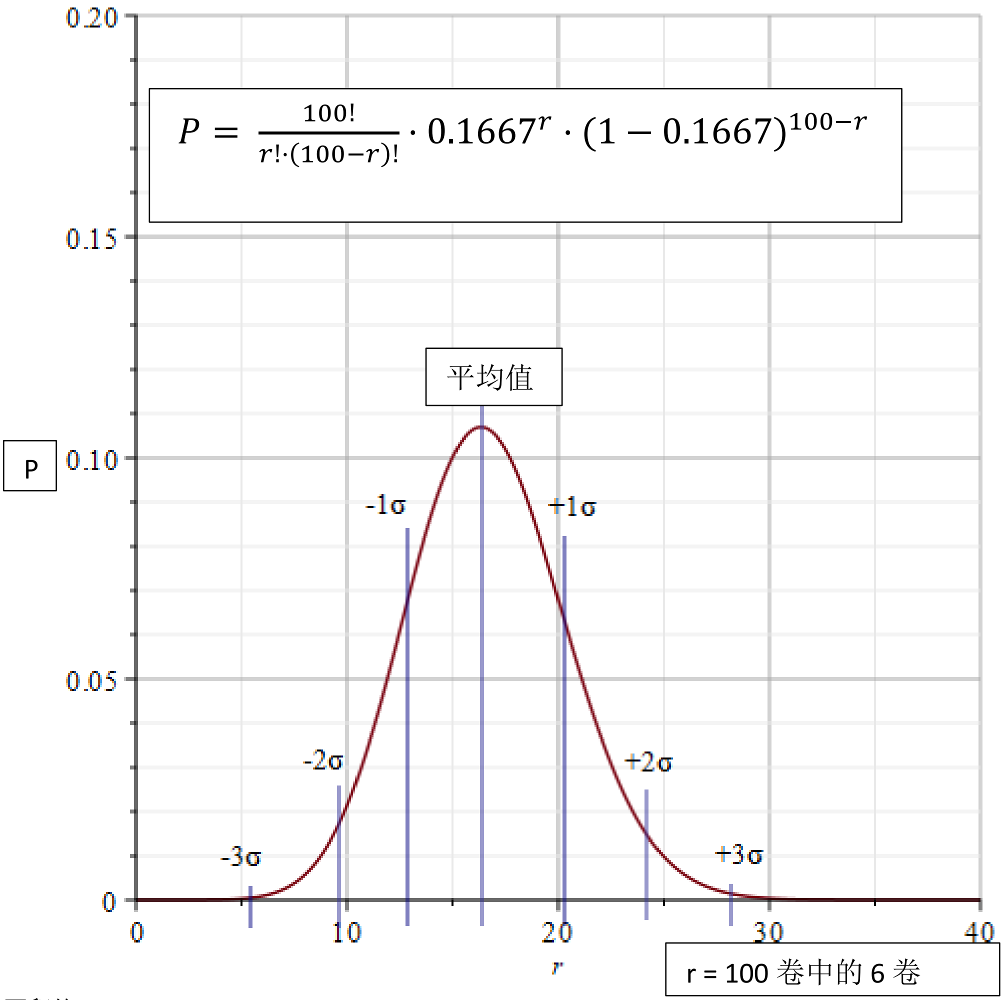
即现在具有用于二项式概率计算的大小。

顺便说一下，这给出了方差 方差 $= n\cdot p\cdot(1-p)$

掷骰子

我们掷骰子 n =100 次。每次掷骰，例如掷出 6，概率为 p = $\frac{1}{6}$ ≈ 0. 1667

那么二项式分布（数概率图 = r–P 图）如下所示：



面积约：<0.1%　2.3%　13.6%　34.1%　34.1%　13.6%　2.3%　<0.1%　= 100%

线 - 1 σ 和 + 1 σ 之间的面积占测量值的 68.2 %。

- 2 σ 线和 + 2 σ 线之间的面积占测量值的 95.4 %。

-3σ 线和+3σ 线之间的面积几乎是测量值的 100%。

平均值（= 最可能的成功次数）为：

平均值 $= \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0.1667 = 16.67$六眼卷

标准差为：

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0.1667 \cdot (1-0.1667)} = 3.727$$

这两个值都可以在图中读取。

如果我们掷骰子 48 次，我们期望得到：

$\mu = n \cdot p = 48 \cdot 0.1667 = 8$ 6 眼卷

但标准差很大：

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{48 \cdot 0.1667 \cdot (1-0.1667)} = 2.58$$

我们发现，我们滚动的次数越多，标准差就相对越小。换句话说，我们掷骰子的次数越多，就越有可能得到 $\frac{1}{6}$ 的 6。

二项式分布的随机样本和置信区间

掷骰子是一个简单的情况，因为我们只需要考虑 6 种可能性。我们知道，下一次掷骰子时，总有 1/6 的概率出现 6 个。

否则数据量大就不确定。然后，我们必须尽可能地抽取具有代表性的随机样本，然后估计/计算该随机样本的置信度。我们通过计算置信区间来做到这一点，这是“概率的统计不确定性”：

对于随机样本，我们可以计算平均值和标准差，这样我们就可以画出随机样本的二项式曲线。

如前所述，平均值是 $\mu = n \cdot p \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{\mu}{n}$

我们已经看到了所有尺寸 x 的标准差：

$\sigma(x) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

现在我们把它看作是单个尺寸的标准差 =>

$$\sigma(\frac{x}{n}) = \frac{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}{n} = \sqrt{\frac{n \cdot p \cdot (1-p)}{n^2}} = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

如果我们选择平均值作为单一尺寸，我们有

$\frac{x}{n} = \frac{\mu}{n} = p$ =>

$$\sigma(p) = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

这是标准差 σ 作为点概率 p 和所有大小 n 的函数

在随机样本中，我们通常选择平均值作为焦点大小，对于随机样本来说，称为 μ^* 或点估计 p^*（一些公式表将其称为带“帽子”的 p）

置信区间通常选择为 -2 到 +2（参见常数）范围，即 95,4% - 通常四舍五入为 95% =>

$$\text{置信区间} = \left[p^* - 2\sqrt{\frac{p^* \cdot (1-p^*)}{n}} \; ; \; p^* + 2\sqrt{\frac{p^* \cdot (1-p^*)}{n}} \right]$$

这里的置信区间表明，在该区间内找到实际平均值的概率为95.4%。

也可以选择另一置信区间，例如 $\pm 1\sigma$ **内的** 68.2%

置信区间 $= \left[p^* - \sqrt{\frac{p^* \cdot (1-p^*)}{n}} \;;\; p^* + \sqrt{\frac{p^* \cdot (1-p^*)}{n}} \right]$ 注意常数 1

实施例 1

在选举之前，1023 个人会被问及是否会投“赞成”或“反对”票。 418 人说“是”，501 人说“否”，104 人说“不知道”。所有选民投“赞成”票的概率是多少？

该案例是二项分布随机样本。我们选择计算 ca。 95% 置信区间：

$$\left[p^* - 2\sqrt{\frac{p^* \cdot (1-p^*)}{n}} \;;\; p^* + 2\sqrt{\frac{p^* \cdot (1-p^*)}{n}} \right]$$

这里是 n = 1023 和点估计 $p* = \frac{418}{1023} \approx 0.409$ =>

$$\left[0.409 - 2\sqrt{\frac{0.409 \cdot (1-0.409)}{1023}} \;;\; 0.409 + 2\sqrt{\frac{0.409 \cdot (1-0.409)}{1023}} \right] = [0.378\,;0.44]$$

因此，有 95% 的可能性，37.8% 到 44% 的选民会投“赞成”票。但请注意，“不知道”的群体很大，因此最终的决定可能会发生重大变化。

实施例 2

一家啤酒厂将测试人们是否喜欢一种新的软饮料。他们满怀信心地要求分析机构进行调查。

该研究所建议询问约。 500 人然后计算 99%的置信度。啤酒厂同意了。

实际上，494 个人被问到是否喜欢这种软饮料，“喜欢”还是“不喜欢”？ 77 说“是”。

该案例是二项分布随机样本。我们计算了大约。 99% 置信区间：

$$\left[p^* - 3\sqrt{\frac{p^*\cdot(1-p^*)}{n}} \;\; ; \;\; p^* + 3\sqrt{\frac{p^*\cdot(1-p^*)}{n}} \right]$$

这里是 n = 494 和点估计 $p* = \frac{77}{494} \approx 0.156$ =>

$$\left[0.156 - 3\sqrt{\frac{0.156\cdot(1-0.156)}{494}} \;\; ; \;\; 0.156 + 3\sqrt{\frac{0.156\cdot(1-0.156)}{494}} \right] = [0.107\,;0.205]$$

因此，有 99% 的可能性，10.7% 到 20.5% 的人可能喜欢这种软饮料。

进一步的调查可能是询问有多少人可能会购买这种软饮料以及购买频率。

概率计算和置信区间形式的预测通常是正确的，但并非总是正确。一个特别敏感的点是采取“正确的”、有代表性的样本。

符号和技术术语

如前所述，概率计算中有许多技术术语和各种符号。这可能是由于不同职业的方法不同造成的。以下是最常见的：

n 通常代表整个种群/池/数量中的数量。

r 通常代表人口/池/数量中选定的数字。

P 通常代表排列，但也可能代表概率函数，或者只是概率。

p 通常代表概率参数，是 0 到 1 之间的数字，其中 p 是成功的概率。

K 通常代表组合，其公式为 $\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$

具有相同公式 $\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$ 的 K 也用于二项式分布的公式中。然后我们可以写出 K(n, r)，表示 K 用于二项式分布，总体数为 n，所选数为 r。或者我们可以写成 $\binom{n}{r}$ ，这里它不是一个向量。

所以 $$K(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$$

x 通常代表一个变量。

X 通常代表随机变量（= 二项式变量）。

$\bar{x}$ = x 中间 通常代表 x 的平均值

μ 通常代表某物的平均值，因此必须对其进行解释。通常，它与 $\bar{x}$ 或 x 中间 相同

如果某物是二项式分布，则可以写为 bin(n, p) 或只是 b(n, p)，这意味着：具有数字 n 和概率参数 p 的二项式分布 - 这里它不是点的坐标。

σ 通常代表标准差。

* 或者 ^ （星星或帽子）通常用于随机样本中的尺寸，例如 μ* 和 σ* 和 p*

p* 称为随机样本的概率参数 – 或 p 的中心估计量

数字和集合论简介

数字的分组遵循四种算术运算的历史发展：

自然数是整数正数——我们计算的数：1、2、3、4……

整数有负数、零和正数：…-2、-1、0、1、2、3、…

有理数是整数的分数（分母中的 0 除外）。例如 $\frac{-4}{3}$ 和 $\frac{63}{17}$

无理数不能写成整数的分数，而是写成永无止境的小数。例如 π = 3,14...。

今天，这四组被汇总为**实数，**R。

从这里开始，与不真实的数字、我们必须想象的数字、虚数之间存在着清晰的边界。虚数已在“虚数简介”一章中进行了描述。这里我们再重复一遍：

$\sqrt{-64} = \sqrt{(-1) \cdot 64} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{64}$ 没关系

$\sqrt{(-1)}$ 我们命名为 I，这也是允许的，然后我们有

$\mathrm{I} \cdot \sqrt{64} = \mathrm{I} \cdot 8$

所以 $\sqrt{-64} = \mathrm{I} \cdot 8$

这使我们能够像什么都没发生一样继续下去；只是现在，我们还处于虚数的世界。然而，计算规则：$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a \cdot a}$ 不适用于虚数。

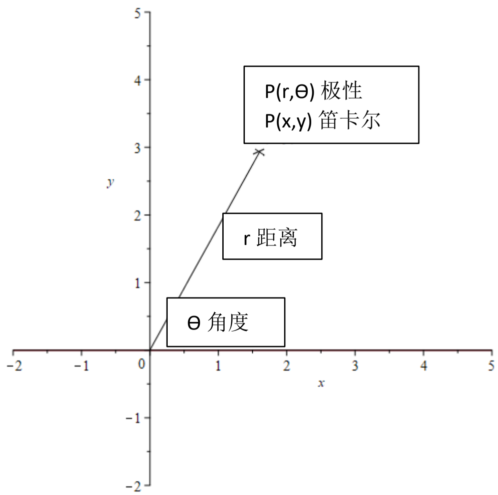
实数和虚数的组合称为复数。

复数

实数和虚数的组合称为复数。

简单介绍：

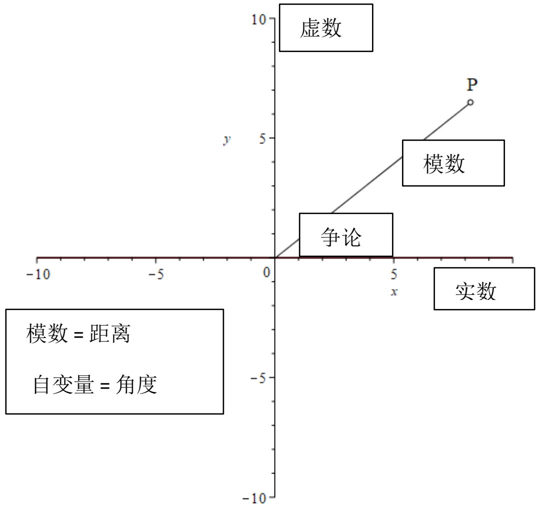
之前我们看到坐标可以以通常的方式（笛卡尔坐标）或极坐标显示，我们重复之前显示的图表：



此外，我们看到点的坐标可以显示为位置向量。

现在我们将考虑点的坐标与复数的结合。看起来是一样的。

我们可以使用复数作为数学工具，并将它们显示在坐标系中，第一轴为实数，第二轴为虚数：



距 Origo 的距离现在称为模量，距 +first 轴的角度称为参数。因此 P 的位置是

模数和参数 = |OP| 和 自变量(OP)

因此，我们想要在这里描述的大小（显示为线段 OP）由实部和虚部组成，就像极坐标一样，我们描述长度和角度，现在称为模数和参数，以表明我们是考虑复数。

总的来说，我们现在有几种显示坐标的方法。从早些时候我们有：

- 普通笛卡尔坐标 P(x,y)
- 位置矢量坐标 $\mathbf{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |OP|\cdot\cos\Theta \\ |OP|\cdot\sin\Theta \end{pmatrix}$

  或者 $\mathbf{OP} = |OP|\cdot(\cos\Theta\cdot\mathbf{i} + \sin\Theta\cdot\mathbf{j})$

  或短 $\mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

  （这里有点分散注意力，x **方向的基向量称**为 i，**而** y 轴上的虚基数称为 I（**有些使用** i））。

- 极坐标 P(r,Θ) 距离和角度

以及新的复极坐标：

(模数，争论)　　或者　　模数$\angle$争论　　距离和角度

和一个例子：

(模数, 争论) $= (5, \frac{\pi}{4})$　　要不就　　$5\angle\frac{\pi}{4} = 5\angle 45°$

后者可能是最常见的。

如果角度是 $90° = \frac{\pi}{2}$ 我们有一个纯虚数。

使用向量工具来计算复数（也称为矩形形式）是最常见且最简单的。以下是使用四种基本算术的一些示例：

使用矩形形式的复数计算（作为向量）

实施例 1

我们有两个复杂的尺寸写为

复数 ＝ 实部 ＋ 虚部

这里：　$a = 3 + 4I$　　$b = -2 + 5I$

和

$a + b = (3 + 4I) + (-2 + 5I)$　　⇔

$a + b = 1 + 9 \cdot I$　　分别为实、分别为虚

不同之处

$a - b = (3 + 4I) - (-2 + 5I) \quad \Leftrightarrow$

$a - b = 5 - I$

产品

$a \cdot b = (3 + 4I) \cdot (-2 + 5I) \quad \Leftrightarrow$

$a \cdot b = -6 + 15I - 8I + 20I^2 \quad \Leftrightarrow$

$a \cdot b = 20I^2 + 7I - 6 \quad =>$ 自从 $I = \sqrt{(-1)}$

$a \cdot b = -20 + 7I - 6 \quad \Leftrightarrow$

$a \cdot b = -26 + 7 \cdot I$

分配

$$\frac{a}{b} = \frac{3 + 4I}{-2 + 5I} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b} = \frac{(3 + 4I)(-2-5I)}{(-2 + 5I)(-2-5I)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-6-15I-8I-20I^2}{4+10I-10I-25I^2} \quad \Leftrightarrow$$

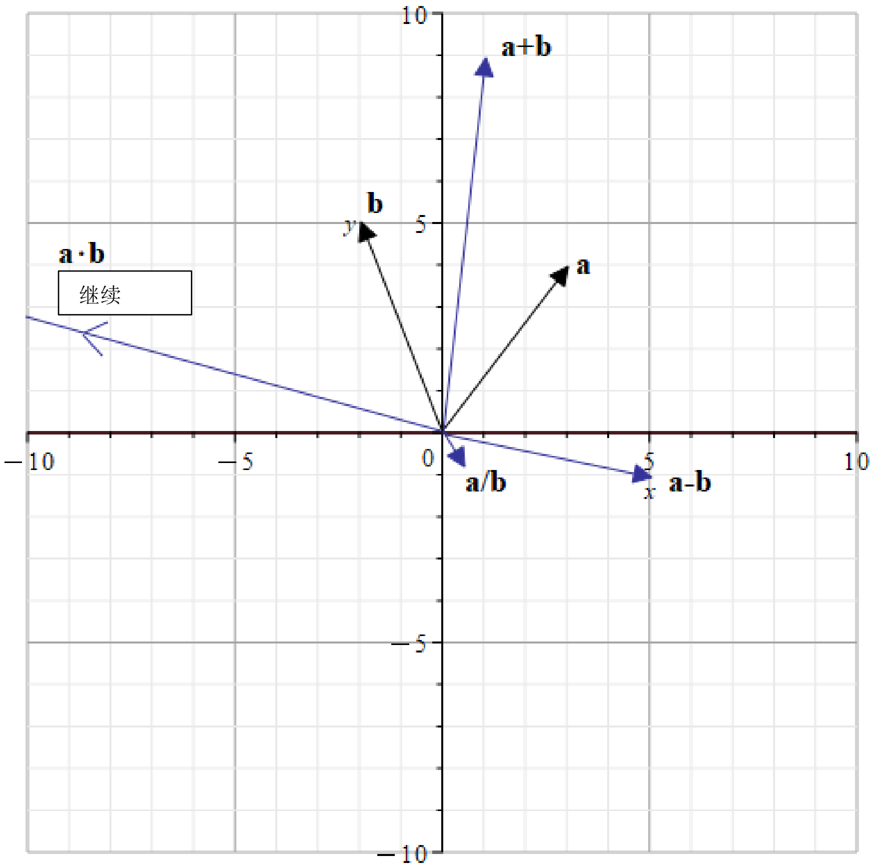
$$\frac{a}{b} = \frac{-6-23I+20}{4+25} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b} = \frac{14-23I}{29} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b} \approx 0{,}483 - 0{,}793 \cdot I$$

也就是说，完全是普通的计算规则。

并如图所示：



2.

从矩形形式（矢量形式）中，我们可以使用众所周知的普通计算找到模数（长度）和参数（与+x 轴的角度）：

a = 3 + 4I 有模数: $(3^2 + 4^2)^{½} = 5$ （毕达哥拉斯）

和争论: $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53{,}1°$

所以 (模数 a, 争论 a) = (5, 53.1°)

和

$b = -2 + 5I$ 有模数: $((-2)^2 + 5^2)^{½} \approx 5.39$

和争论: $90° + \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \approx 111.8°$

所以 (模数 b，争论 b) = (5.39, 111.8°)

3.

我们还可以找到模数, 争论

$a \cdot b = -26 + 7 \cdot I \Rightarrow$ 模数 $= ((-26)^2 + 7^2)^{½} \approx 26.9$

争论 $= 90° + \tan^{-1}\left(\frac{26}{7}\right) \approx 164.9°$

所以 (模数, 争论) = (26.9, 164.9°)

$\frac{a}{b} \approx 0{,}48 - 0{,}79 \cdot I \Rightarrow$ 模数 $= (0.48^2 + (-0.79)^2)^{½} \approx 0.928$

争论$= \tan^{-1}\left(\frac{-0.79}{0.48}\right) \approx -58.7°$

所以 (模数, 争论) = (0.928, -58.7°)

我们看到计算出的模数和参数与图表相符。

极坐标形式的复数计算

两个复数的和与差与直角坐标形式相同，而乘积和除法可以以极坐标形式完成，这样更快：

现在我们提出一些易于使用但难以证明的计算规则。证明见“很少使用的证明和计算”一章：

当我们将两个复数的极坐标形式相乘时，我们有：

(模数 a , 争论 Θ) · (模数 b , 争论 φ) = (|a|∠Θ) · (|b|∠φ) = |a·b|∠(Θ+φ)

所以我们乘以模数（大小）并添加参数（角度）。

当我们除以极坐标形式的两个复数时，我们有：

$$\frac{(\text{模数 } a，\text{争论 } \theta)}{(\text{模数 } b，\text{争论 } \varphi)} = \frac{|a|\angle\theta}{|b|\angle\varphi} = \left|\frac{a}{b}\right|\angle(\Theta-\varphi)$$

所以我们除模数（大小）并减去参数（角度）。

实施例 1

两个复数是

(模数, 争论) = $(5, \frac{\pi}{4})$ 和 (模数, 争论) = $(3, \frac{\pi}{2})$

我们希望将乘积（两个复数相乘）写成极坐标：

模数 $= 5 \cdot 3 = 15$ 争论 $= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

回答： (模数, 争论) = $(15, \frac{3\pi}{4})$ 或更短 $15\angle\frac{3\pi}{4}$

无论我们如何编写它（符号），我们都会乘以模数并添加参数。

2.

然后我们希望 $(5, \frac{\pi}{4})$ 除以 $(3, \frac{\pi}{2})$ 写成极坐标：

模数 $= \frac{5}{3}$ 争论 $= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$

回答： (模数, 争论) = $(\frac{5}{3}, -\frac{\pi}{4})$ 或短 $\frac{5}{3} \angle -\frac{\pi}{4}$

无论我们如何书写（符号），我们都会除模并减去参数。

这种计算方式与我们使用指数函数的方式类似。因此，当我们进行乘法和除法时，我们也可以使用指数函数：

指数形式的复数计算

两个复数的和与差采用直角坐标形式，而乘积和除法则可以采用某些行业中使用的指数形式进行：

对于极坐标形式，我们刚刚看到，通过将模数（幅度）相乘并添加自变量（角度）来找到乘积，而在除法中，我们将模数相除并减去自变量。这种计算方式非常适合指数函数：

$f(x) = b \cdot a^{kx}$ 这里变成 $z = |z| \cdot e^{I\Theta}$

（许多表使用 z 作为复数，尤其是指数形式）。

z 现在是我们的复数，它由模 |z| 组成（幅度）和参数 θ（角度），插入指数数 $e^{I\Theta}$（I 代表虚数）。

这些示例展示了我们如何使用它：

实施例 1

两个复数（与之前相同）如下

(模数 a, 争论 a) = $(5, \frac{\pi}{4})$ 和 (模数 b, 争论 b) = $(3, \frac{\pi}{2})$

我们希望使用指数公式计算乘积（两个复数相乘）：

$z = |z| \cdot e^{I\Theta}$

这里 $a = 5 \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{4}}$ 和 $b = 3 \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{2}}$ =>

$a \cdot b = (5 \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{4}}) \cdot (3 \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{2}}) = 15 \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{4} + I \cdot \frac{\pi}{2}} = 15 \cdot e^{I \cdot \frac{3\pi}{4}}$

我们看到模数是 15 并且争论是 $\frac{3\pi}{4}$

简而言之：(模数, 争论) = $(15, \frac{3\pi}{4})$ 或很短 $15 \angle \frac{3\pi}{4}$

与极坐标形式的答案相同。当然。

2.

两个复数给出为

(模数 a, 争论 a) = $(5, \frac{\pi}{4})$ 和 (模数 b, 争论 b) = $(3, \frac{\pi}{2})$

我们要根据指数公式来划分： $z = |z| \cdot e^{I\Theta}$

这里 $a = 5 \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{4}}$ 和 $b = 3 \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{2}}$ =>

$$\frac{a}{b} = \frac{(5 \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{4}})}{(3 \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{2}})} = \frac{5}{3} \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{4} - I \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{5}{3} \cdot e^{I \cdot (-\frac{\pi}{4})}$$

我们看到模数是 $\frac{5}{3}$ 参数是 $-\frac{\pi}{4}$

简而言之：(模数, 争论) = ($\frac{5}{3}$, $-\frac{\pi}{4}$) 或很短 $\frac{5}{3}\ \angle -\frac{\pi}{4}$

与极坐标形式的答案相同。当然。

概括

复数并不常见，但它们可以用作电子学中的数学工具、流动液体的高级描述等。

矩形形式可用于所有四种基本算术运算。

极坐标形式在乘法或除法时速度很快。

指数形式在某些行业中用于乘法和除法。

例子

最后，我们将继续前面的示例并对这三种方法进行调查：

<u>两个复数的矩形形式：</u>

a = 3 + 4I 和 b = -2 + 5I

和 $a + b = (3 + 4I) + (-2 + 5I) = 1 + 9\cdot I$

不同之处 $a - b = (3 + 4I) - (-2 + 5I) = 5 - I$

产品 $a \cdot b = (3 + 4I) \cdot (-2 + 5I) = -26 + 7\cdot I$

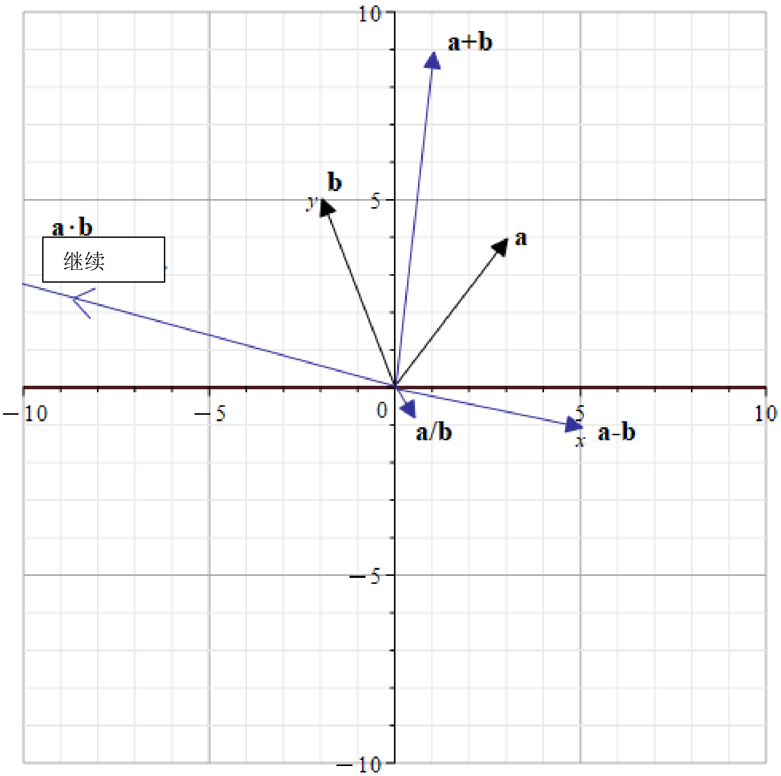
分配 $\frac{a}{b} = \frac{3+4I}{-2+5I} \approx 0{,}483 - 0{,}793 \cdot I$

$|a| = (3^2 + 4^2)^{½} = 5$ $\tan^{-1}(\frac{4}{3}) \approx 53{,}1°$

$|b| = ((-2)^2 + 5^2)^{½} \approx 5.39$　　　$90° + \tan^{-1}(\frac{2}{5}) \approx 111{,}8°$

两个参数（角度）都相对于第一个轴的正方向。

复数 a 和 b 在图中显示为向量 – 我们再次显示：



两个复数的极坐标形式：

矩形形式的模量和参数的计算现在用于极坐标形式：

$a \approx 5 \angle 53.1°$　　　和　　　$b \approx 5.39 \angle 111.8°$

我们不能以极坐标形式进行加法或减法，但可以进行乘法和除法：

$a \cdot b \approx 5 \cdot 5.39 \angle(53.1° + 111.8°) \approx 26.9 \angle 164.9°$

$\frac{a}{b} \approx \frac{5}{5.39} \angle(53.1° - 111.8°) \approx 0.929 \angle -58.7°$

-58.7° 也可以写成 +301.3°

可以看出，两者都符合先前的计算以及数字。

<u>指数形式的两个复数</u>

矩形形式的模数和参数的计算现在以指数形式使用：

$a \approx 5 \angle 53.1°$ 和 $b \approx 5.39 \angle 111.8°$

然而，在指数形式中，通常使用弧度：

$a \approx 5 \angle 0.927$ 和 $b \approx 5.39 \angle 1.95$

我们不能以指数形式加或减，但可以乘和除：

$$a \cdot b \approx (5 \cdot e^{I \cdot 0.927}) \cdot (5.39 \cdot e^{I \cdot 1.95}) \approx 26.95 \cdot e^{I \cdot 0.927 + I \cdot 1.95}$$

$$\Leftrightarrow \quad a \cdot b \approx 26.95 \cdot e^{I \cdot 2.88}$$

我们看到模数是 26.95，参数是 2.88

回答： (模数, 争论) = (26.95, 2.88) 或短 $26.95 \angle 2.88$

$$\frac{a}{b} \approx \frac{5 \cdot e^{I \cdot 0.927}}{5.39 \cdot e^{I \cdot 1.95}} \approx 0.929 \cdot e^{I \cdot 0.927 - I \cdot 1.95} \approx 0.928 \cdot e^{I \cdot (-1.02)}$$

我们看到模数是 0.928，参数是 −1.

回答： (模数, 争论) = (0.929, −1.02) 或短 $26.95 \angle -1.02$

-1.02 **弧度** 也可以写成 +5.26 **弧度**

集合论简介

集合论只需简单提及。部分是因为它是数学的较早获得的部分，部分是因为大多数表格都用解释性的草图来呈现集合论的符号。

在此，我们强调：

空数量（空集，什么都没有）写成 Ø

解决方案集写作{-,-,-,…}或使用不同国家不同的字母。

ϵ 的意思是“属于”或“是集合的一个元素”。

∧ 表示和。

∨ 表示或。

例子

如果在一个问题中，我们被告知解必须属于实数，那么它可以写成 $x \in R$

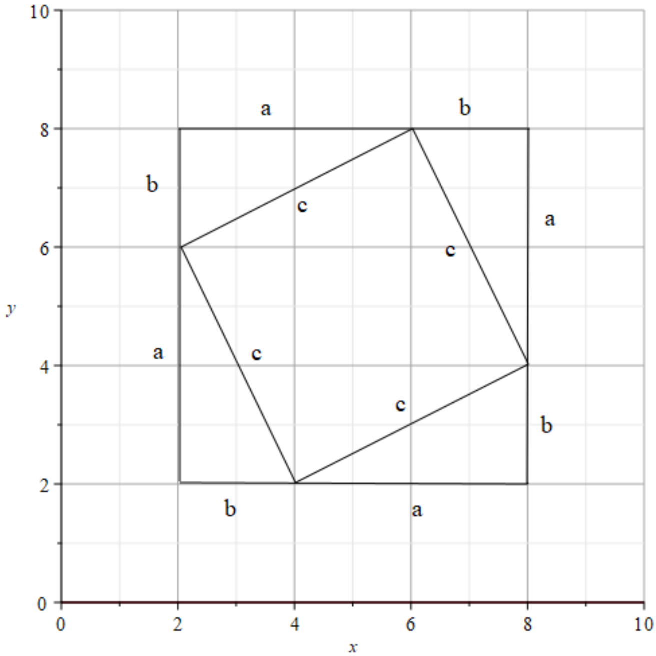
如果，在求解中，我们达到： 无解，我们也可以写出解是空量，Ø

如果在一个问题中，我们求解得到函数 f 在区间]-50 内的定义域； 0] 我们可以写：f 的定义域是]-50； 0] 或简短的
Dm(f) =]-50； 0]

如果我们想显示 x 属于区间]-50； 0] ，我们可以写成
$x \in\ ]-50;\ 0]$

很少使用的证明和计算

毕达哥拉斯定理的证明



图中显示了两个正方形。

大的面积 $(a + b)^2$

小的面积为 c^2

大正方形的面积等于小正方形的面积加上四个三角形的面积
:

$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \quad \Leftrightarrow$

$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab \quad \Leftrightarrow$

$a^2 + b^2 = c^2$

因此，我们证明了可能是最常见的数学定理。

二次多项式因式分解的证明

$ax^2 + bx + c = a(x - 根_1)(x - 根_2)$

我们通过从右侧（解析）回到左侧（起点）计算来证明，知道：

$根_1 = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$ 和 $根_2 = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$

插入到右侧：

$a\left(x - \frac{-b+\sqrt{d}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}\right)$	$=$	已安排的标志
$a\left(x + \frac{b-\sqrt{d}}{2a}\right)\left(x + \frac{b+\sqrt{d}}{2a}\right)$	$=$	乘法
$a\left(x^2 + x\frac{b+\sqrt{d}}{2a} + x\frac{b-\sqrt{d}}{2a} + \frac{b^2-d}{4a^2}\right)$	$=$	公分母
$a\left(\frac{4a^2x^2+2axb+2ax\sqrt{d}+2axb-2ax\sqrt{d}+b^2-d}{4a^2}\right)$	$=$	
$a\left(\frac{4a^2x^2+4axb+b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}\right)$	$=$	缩短
$a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right)$	$=$	乘法
$ax^2 + bx + c$		这是左边

由此证明：

$$ax^2 + bx + c = a(x - 根_1)(x - 根_2)$$

还有更高多项式因式分解的证明，但我们到此为止。

多项式除法

我们可以使用类似于普通除法的技术将一个多项式除以另一个多项式，但更复杂。该技术在此示例中可见：

实施例 1

$\frac{x^4-2x^3-3x^2+12x-18}{x^2-6}$ 这样计算：

$$\underline{x^2-6}\,\Big|\; x^4-2x^3-3x^2+12x-18 \;\Big\lfloor\underline{\qquad\qquad}$$

首先我们关注 x^4 除以 x^2 。这给出了写在右边的 x^2。然后我们将 x^2 乘以（x^2 − 6）。这给出了 x^4 − $6x^2$，写在下一行中：

$$\begin{array}{lll} \underline{x^2-6}\,\Big| & x^4-2x^3-3x^2+12x-18 & \Big\lfloor\underline{\;x^2\qquad\quad} \\ & x^4 \qquad\quad -6x^2 & \end{array}$$

然后我们说 上 减去 降低 并将 $-2x^3$ 除以 x^2 。这给出了$-2x$，它被写在右侧的解析中。然后我们将 $-2x$ 乘以 （x^2 − 6）并将答案写在下一行 − 后面是 上 减去 降低：

$$\begin{array}{lrl} \underline{x^2-6}\,\Big| & x^4-2x^3-3x^2+12x-18 & \Big\lfloor\underline{\;x^2-2x\;} \\ & \underline{x^4 \qquad\quad -6x^2} \qquad\qquad\quad & \\ & -2x^3+3x^2+12x-18 & \\ & \underline{-2x^3 \qquad\quad +12x}\quad & \\ & 3x^2 \qquad\quad -18 & \end{array}$$

我们将 $3x^2$ 除以 x^2 。这给出了 3，它写在右边的解析中。然后我们将 3 乘以（x^2 - 6）并将答案写在下一行中：

$$
\begin{array}{l|l|l}
x^2-6 & x^4-2x^3-3x^2+12x-18 & x^2-2x+3 \\
 & \underline{x^4 \qquad\quad -6x^2} & \\
 & \quad -2x^3+3x^2+12x-18 & \\
 & \quad \underline{-2x^3 \qquad\quad +12x} & \\
 & \qquad\qquad 3x^2 \qquad\quad -18 & \\
 & \qquad\qquad \underline{3x^2 \qquad\quad -18} & \\
 & \qquad\qquad 0 \qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

上限减去下限得到 0，我们就完成了。加起来。

决心是 x^2-2x+3

实施例 2

如果不加起来，则采用相同的技术。然后我们得到余数：

$\frac{x^4-2x^3-3x^2+12x-17}{x^2-6}$ 其计算方式类似：

$$
\begin{array}{l|l|l}
x^2-6 & x^4-2x^3-3x^2+12x-17 & x^2-2x+3 \\
 & \underline{x^4 \qquad\quad -6x^2} & \\
 & \quad -2x^3+3x^2+12x-17 & \\
 & \quad \underline{-2x^3 \qquad\quad +12x \qquad} & \\
 & \qquad\qquad 3x^2 \qquad\quad -17 & \\
 & \qquad\qquad \underline{3x^2 \qquad\quad -18} & \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 1 &
\end{array}
$$

 ISBN 978-87-975307-4-0

1 是还必须除以 (x^2 - 2x) 的余数。

综合解决 $x^2-2x+3+\frac{1}{x^2-6}$

我们很少需要多项式除法，如果需要，我们通常会使用 CAS 。然而，并不是所有的 CAS 都有能力，特别是如果它不加起来，那么我们必须手动完成。

显示排列和组合的公式

对于排列，我们使用概率章节中的示例 3：

3.

必须在由 7 名成员组成的董事会中选出一名工头、副工头和候补工头。第一个选出的人成为工头，下一个成为副工头，第三个成为候补工头。这 3 人可以通过多少种方式当选？

由于当选的人不会放回池中，因此情况是任意顺序，不会重复。

选择第一个有 7 种可能性，选择下一个有 6 种可能性，选择第三个和最后一个有 5 种可能性。

情况是“两者，并且”，即乘法：7 • 6 • 5 = 210 种可能性

由于选择不是随机的，所以所有可能性都会不同，共有 210 种可能性。

现在我们需要一个公式，其中包括选定的 3 名成员以及池/群体的 7 名成员，因为这是我们的介绍性信息。

我们选择将可能性的数量 7 • 6 • 5 乘以 4 • 3 • 2 • 1，如果我们也除以 4 • 3 • 2 • 1，则这是允许的。那是：

$\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{7!}{4!} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{n!}{(n-r)!} = P$ 由此显示公式

因此，我们就有了池/群体中的数量（这里是成员数量 7），我们称之为 n。我们选择了数字（这里是 3），我们称之为 r。

对于组合，我们使用概率章节中的示例 4：

4.

必须在由 7 名成员组成的董事会中选出一名工头、副工头和候补工头。选举将显示 3 个人中谁担任 3 个职位 - 无论哪

个职位。三人之间的决定被推迟到稍后。这 3 个人的选择有多少种可能？

这里的顺序并不重要，并且选择的那个不会被放回池中。因此，案件没有顺序，没有重复。

选择第一个有 7 种可能性，选择下一个有 6 种可能性，选择第三个和最后一个有 5 种可能性。

情况是“两者，并且”，即乘法：$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ 种可能性

由于选择是随机的，因此某些可能性是相似的。那是多少？让我们说出这些人的名字：

Ann, Ben, Clara, Dan, Ellie, Fred

然后

Ann, Ben, Clara = Ben, Clara, Ann = Clara, Ben, Ann

因此三个相等的选择。

Ben, Clara, Dan 也将给出三个相等。

Clara, Dan, Ellie 也将给出三个相等。

Dan, Ellie, Fred 也将给出三个相等。

Ellie, Fred, Ann 也将给出三个相等。

Fred, Ann, Ben 也将给出三个相等。

所以，18 种方式实际上只有 6 种可能。我们称它们为 6 个“包”。

或者换一种说法：3 个人可以交换 $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ 种方式，即：

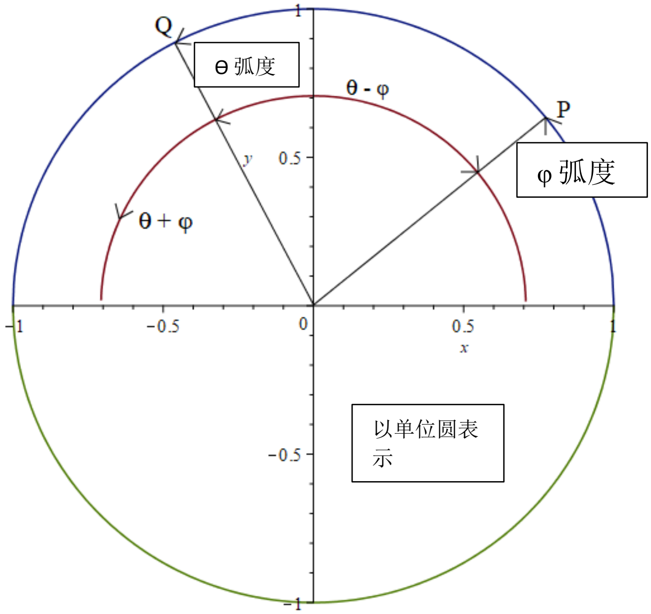
$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ 真正的可能性

现在，我们将这个分数的分子和分母延长 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$，并内置我们称为 n 的总体规模（此处为 7），并且我们还内置了“包”的数量（此处 6 = 3） ！）我们称之为 r

$$\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{7!}{3!\cdot4!} = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = K$$ 由此显示公式。

极坐标和指数形式复数的乘积和除法的证明

首先，我们需要导出一些表达式转换的公式，包括正弦和余弦。其中有很多。这里我们将使用四个加法公式。我们将角度称为 θ 和 ϕ。该证明对于以度数和弧度测量的角度均有效。这里我们使用弧度：



点 P 与第一轴的正值部分形成角度 φ。

Q 点与第二轴的正值部分形成角度 Θ。

角度 Θ− φ 位于两个角腿之间。

角度 Θ+ φ 是从+x 方向到所示箭头的角度。

四个加法公式为：

1. $\cos(\Theta+\varphi) = \cos\Theta\cdot\cos\varphi - \sin\Theta\cdot\sin\varphi$
2. $\cos(\Theta-\varphi) = \cos\Theta\cdot\cos\varphi + \sin\Theta\cdot\sin\varphi$
3. $\sin(\Theta+\varphi) = \sin\Theta\cdot\cos\varphi + \sin\varphi\cdot\cos\Theta$
4. $\sin(\Theta-\varphi) = \sin\Theta\cdot\cos\varphi - \sin\varphi\cdot\cos\Theta$

No. 2 由两个向量之间的角度公式之一证明:

$\cos v = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$ => 这里

$\cos(\Theta-\varphi) = \frac{\mathbf{OQ} \cdot \mathbf{OP}}{|\mathbf{OQ}|\,|\mathbf{OP}|} = \frac{\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}}{1 \cdot 1} = \cos\Theta \cdot \cos\varphi + \sin\Theta \cdot \sin\varphi$

1 号是通过重新排列 2 号来证明的

$\cos(\Theta+\varphi) = \cos(\Theta-(-\varphi)) = \frac{\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos(-\varphi)\\ \sin(-\varphi)\end{pmatrix}}{1 \cdot 1} = \cos\Theta \cdot \cos(-\varphi) + \sin\Theta \cdot \sin(-\varphi)$

自从 $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ and $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ （参见单位圆），我们有

$\cos(\Theta+\varphi) = \cos\Theta \cdot \cos\varphi - \sin\Theta \cdot \sin\varphi$

No. 4 由两个向量夹角的另一个公式证明：

$\sin v = \frac{\det(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$ => 这里

$\sin(\Theta-\varphi) = \frac{\det(\mathbf{OP},\mathbf{OQ})}{|\mathbf{OP}| \cdot |\mathbf{OQ}|} = \frac{\begin{pmatrix}\cos\varphi & \cos\theta\\ \sin\varphi & \sin\theta\end{pmatrix}}{1 \cdot 1} = \cos\varphi \cdot \sin\Theta - \sin\varphi \cdot \cos\Theta$

重新排列 4 即可证明 3

$\sin(\Theta+\varphi) = \sin(\Theta-(-\varphi)) = \frac{\det(\mathbf{OP},\mathbf{OQ})}{|\mathbf{OP}| \cdot |\mathbf{OQ}|} = \frac{\begin{pmatrix}\cos(-\varphi) & \cos\theta\\ \sin(-\varphi) & \sin\theta\end{pmatrix}}{1 \cdot 1} =$

$\cos(-\varphi) \cdot \sin\Theta - \sin(-\varphi) \cdot \cos\Theta$

自从 $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ and $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ （参见单位圆），我们有

$\sin(\Theta+\varphi) = \cos\varphi \cdot \sin\Theta + \sin\varphi \cdot \cos\Theta$

下一点是关于符号的。

我们的复数 z 可以写成向量

$z = z_1 + I \cdot z_2$ 或者 $z = |z| \cdot (\cos \Theta + I \cdot \sin \Theta)$

（两个方程都表明我们的复数具有水平部分 + 垂直部分，即：实部 + 虚部）

下面我们将进入表格 $z = |z| \cdot (\cos \Theta + I \cdot \sin \Theta)$

将以极坐标形式写入。

现在我们已经准备好进行下一步的乘积证明和极坐标形式的复数除法：

产品： (模数 a , 争论 Θ) · (模数 b , 争论 φ) = $|a \cdot b| \angle(\Theta+\varphi)$

证明： **(模数** a , **争**论 Θ) · (**模数** b , **争**论 φ) = $a(\cos \Theta + I \cdot \sin \Theta) \cdot b(\cos \varphi + I \cdot \sin \varphi$ =

$ab\,(\cos \Theta \cdot \cos \varphi + \cos \Theta \cdot i \cdot \sin \varphi + I \cdot \sin \Theta \cdot \cos \varphi + I \cdot \sin \Theta \cdot I \cdot \sin \varphi)$ =

$ab\,((\cos \Theta \cdot \cos \varphi - \sin \Theta \cdot \sin \varphi) + I(\cos \Theta \cdot \sin \varphi + \sin \Theta \cdot \cos \varphi))$

并使用加法公式 1 和 3 =>

$ab\,(\cos(\Theta+\varphi) + I \cdot \sin(\Theta+\varphi))$

在括号中，我们添加了角度，并将坐标分为实部和虚部。可以这样写：

(模数 a , 争论 Θ) · (模数 b , 争论 φ) = $|a \cdot b| \angle(\Theta+\varphi)$

我们将模数（幅度）相乘并对参数（角度）求和。该符号表明我们正在计算极坐标。

分配： $\frac{(\text{模数 a， 争论 }\theta)}{(\text{模数 b， 争论 }\varphi)} = \left|\frac{a}{b}\right| \angle(\Theta-\varphi)$

证明： $\frac{(\text{模数 a， arg.}\theta)}{(\text{模数 b， arg.}\varphi)} = \frac{a(\cos\theta + I \cdot \sin\theta)}{b(\cos\varphi + I \cdot \sin\varphi)}$ 延长 =

$\frac{a(\cos\theta + I \cdot \sin\theta) \cdot (\cos\varphi - I \cdot \sin\varphi)}{b(\cos\varphi + I \cdot \sin\varphi) \cdot (\cos\varphi - I \cdot \sin\varphi)}$ 乘以 =

$\frac{a(\cos\theta \cdot \cos\varphi - \cos\theta \cdot I \cdot \sin\varphi + I \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi + \sin\theta \cdot \sin\varphi)}{b((\cos\varphi)^2 - (\cos\varphi \cdot I \cdot \sin\varphi) + I \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + (\sin\varphi)^2)}$ 安排的 =

$\frac{a(\cos\theta \cdot \cos\varphi + \sin\theta \cdot \sin\varphi) + I(\sin\theta \cdot \cos\varphi - \cos\theta \cdot \sin\varphi)}{b((\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2 + I(\sin\varphi \cdot \cos\varphi - \cos\varphi \cdot \sin\varphi))}$ =

在分子的前两项中，我们使用加法公式 2，在后两项中，我们使用加法公式 4。在分母的前两项中，我们使用基本关系，后两项为零：

$$\frac{a(\cos(\theta-\varphi)+I\cdot\sin(\theta-\varphi))}{b(1+0)} = \frac{a}{b}(\cos(\Theta\text{-}\varphi) + I\cdot\sin(\Theta\text{-}\varphi))$$

这是写的

$$\frac{(\text{模数 } a\text{，争论 } \theta)}{(\text{模数 } b\text{，争论 } \varphi)} = \left|\frac{a}{b}\right| \angle (\Theta\text{-}\varphi)$$

我们除以模数（大小）并减去参数（角度）。该符号表明我们正在计算极坐标。

从极坐标到指数形式的转换在复数章节中进行了介绍。欧拉通过简单地将向量表达式之一等于指数函数将其放入公式中。换句话说：他定义了这个方程：

$$z = |z|\cdot(\cos\Theta + I\cdot\sin\Theta) = z\cdot e^{I\cdot\Theta}$$

学科索引　Xuékē suǒyǐn