26-05-2024

WorldMathBook

Español

Para secundaria y más

Tom Pedersen, Compañia: WorldMathBook
cvr. 44731703 Dinamarca
ISBN 978-87-975307-2-6

Contenido:

Prefacio 6

Parte 1. Conceptos básicos 8

Sistema numérico 8

Las cuatro operaciones aritméticas básicas 11

• *Suma, Diferencia, Producto, División*

Fracciones (cocientes) 19

Porcentaje 23

• *Punto porcentual*

Cálculo con letras (álgebra) 26

Paréntesis 29

Reglas cuadradas (Identidades notables) 32

Raíz cuadrada 34

Exponenciación 36

Ecuaciones 42

Ecuaciones de segundo grado 50

Ecuaciones de grado superior 55

Dos ecuaciones con dos incógnitas 57

Funciones y proporcionalidad 60

Intervalos y desigualdades 61

Números imaginarios, brevemente 65

Parte 2. El sistema de coordenadas en el plano (2D) y funciones 67

El sistema de coordenadas y la distancia 67

La línea recta 73

La parábola 82

Polinomios 90

Funciones y las cuatro operaciones aritméticas básicas 93

• Funciones compuestas, funciones inversas

Los triángulos rectángulos 97

El círculo 101

Sinus (Seno), Cosinus (coseno) y tangente 104

Radianes 112

• Ángulo, longitud de arco, levantamiento

La función sinus y la oscilación sinusoidal 117

Los triángulos no rectángulos (triángulos arbitrarios) 125

• Prueba de la relación sinus y de las relaciones cosinus

Funciones exponenciales 130

Funciones logarítmicas (log y ln) 136

• log 10-logaritmo, logaritmo natural: ln (log e)

Otras funciones 145

• Hipérbola, Función polinómica de tercer grado, Función polinómica de cuarto grado, Función polinómica fraccionaria, Una función polinómica especial de tercer grado, Funciones parcialmente definidas

Parte 3. Diferenciación e Integración

151

Introducción 151

Cálculo diferencial 153

Pruebas de cálculo diferencial 1 157

• La recta horizontal, La recta, La parábola, La función raíz cuadrada, Polinomios, La función exponencial natural, La función logaritmo natural

Notaciones 168

Diferenciación y las cuatro operaciones aritméticas básicas 169

• Suma, Diferencia, Producto, División

Diferenciación de funciones compuestas 173

Pruebas de cálculo diferencial 2 176

- *La función e^{kx}, La función exponencial, La función sinus, La función cosinus, La función tangente*
- *Encuesta*
- *Diferenciable, no diferenciable*

Cálculo integral 193

- *Encuesta*

Notaciones 196

Integración y las cuatro operaciones aritméticas básicas 199

- *Suma, Diferencia, Producto*

Integración por sustitución 201

Integración por partes 204

La integral específica 207

Áreas 211

Volúmenes 216

Las reglas de Guldin 221

Longitud de la curva 223

Ecuaciones diferenciales 225

- *Ecuaciones diferenciales típicas, La ecuación diferencial logística*

Campos en pendiente 239

Funciones de dos variables 242

- *Modos de expresión, figuras 3D.*
- *El gradiente*

Parte 4. Vectores 249

Vectores 2D en el plano 249

- *Conceptos básicos, Vectores especiales, Cálculos, Ángulo, Proyección, Determinante, Área y ángulo, La ecuación paramétrica de una línea recta, Distancia punto-línea*

Coordenadas polares en 2D 271

Funciones vectoriales (curvas paramétricas) en 2D 272

- *La función vectorial para una línea recta, La función vectorial para un círculo, Diferenciación de funciones vectoriales: la línea, el círculo, Puntos dobles*

Vectores 3D en el espacio 282

- *Distancia punto-punto, Producto cruz, Ángulo entre vectores, Área, Ecuación de un plano, Distancia punto-plano, La línea recta en el espacio, Distancia entre líneas sesgadas, Distancia punto-línea, Distancia entre dos planos paralelos, Ángulo entre dos planos, ángulo entre línea y plano*

La esfera 308

Parte 5. Estadísticas 310

Datos (Observaciones) 311

- *Datos no agrupados*
- *Datos agrupados*
- *La distribución normal, varianza y desviación estándar.*
- *Bondad de ajuste (Chi elevado a dos - prueba)*

Regresión 321

- *Lineal*
- *Fuerza*
- *Exponencial*

Probabilidad y combinación 324

- *Introducción, Teoría, Ejemplos*

Distribución binomial, muestra aleatoria e intervalo de confianza 332

- *Distribución binomial*
- *Muestra aleatoria e intervalo de confianza para una distribución binomial*
- *Notaciones y términos técnicos*

Números y resumen sobre la teoría de conjuntos 343

- *Números naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, imaginarios.*
- ***Números complejos**, rectangulares, polares, exponenciales 344*
- *Números complejos, Resumen*
- ***Teoría de conjuntos, brevemente*** *357*

Pruebas y cálculos raramente utilizados 358

- *Prueba del teorema de Pitágoras*
- *Prueba de factorización de un polinomio de segundo grado*
- *División de polinomios*
- *Mostrar las fórmulas de permutación y combinación.*
- *Prueba de producto y división de números complejos en forma polar y exponencial.*

Índice de materias 370

Prefacio, WorldMath – Español

Las matemáticas son nuestra ciencia más exacta.
Las matemáticas son una ciencia hermosa.
Algunos estudian matemáticas solo, pero la mayoría de la gente las usa como herramienta para la física, la biología, la medicina, la ciencia de la ingeniería, la economía,……, para todo.

Para secundaria y más. Comenzamos con las cuatro operaciones aritméticas básicas y terminamos en el primer o segundo semestre del estudio para licenciatura o candidato.
El lenguaje es claro, la comprensión está enfocada, se explican los términos técnicos.
Hay un libro de ejercicios: "¡Adelante! – Ejercicios – 2ª edición"
El libro es independiente de la colección de fórmulas que se utilice.
El libro también es independiente del uso de una calculadora o un programa de cálculo.
Y una cosa más. Las matemáticas no se vuelven más y más complicadas a medida que avanzamos. Esa es mi experiencia personal, y lo veo también con los estudiantes. El siguiente paso no es más difícil.

Autor: Tom Pedersen, ingeniero de procesamiento mecánico, Ph.D. de la Universidad Brunel. He trabajado en empresas como líder de proyectos y consultor, como investigador y como profesor en colegios técnicos en Elsinore y Copenhague, así como en la Universidad Técnica Danesa, donde trabajo actualmente. He dado conferencias dentro de varias materias, incluyendo una gran cantidad de matemáticas. He sido disertante en todos los temas presentados en este libro….¡Disfrútelo!

Tom Pedersen, enero de 2024.

Parte 1. Conceptos básicos

Sistema de numeración

Usamos el sistema decimal (sistema 10s). Probablemente porque tenemos 10 dedos. Afirmamos que nuestro sistema numérico tiene como base el número 10.

En la antigüedad, los griegos también usaban un sistema de 10 y podían calcular, pero los caracteres de sus números eran diferentes y, lamentablemente, no tenían ningún carácter para el cero. Esto dificultó su sistema y solo unos pocos lo dominaron.

Los romanos también usaban un sistema de 10 y todavía no tenían carácter para el cero. Sus caracteres consistían en letras (por ejemplo, el 12 se escribía así: XII). Los números romanos todavía se usan para indicar el año de una estatua o similar. No pudieron encontrar métodos prácticos de suma y resta, y se volvió aún más complicado dentro de la multiplicación y la división.

En la Edad Media, el sistema de 10 se combinó con caracteres árabes (originarios de la India) y se agregó un signo, 0, para describir nada. Hoy los caracteres son: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Y después de usar estos diez caracteres podemos escribir diez números nuevos poniendo 1 delante: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, - luego 2 delante: 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 - , etc. Cuando lleguemos a 99 empezamos de nuevo usando los mismos caracteres con 1 delante y dos caracteres después: 100, 101, 102, etc. Entonces, solo usamos diez caracteres y su posición decide si tenemos unidades, decenas, centenas, miles, etc. Ahora estamos llegando a algún lado, y hoy tenemos buenas herramientas para sumar, resta, multiplicación y división (Las cuatro operaciones aritméticas básicas).

Si practica la lógica en nuestro sistema numérico, le sugiero que mire una cinta métrica. También es adecuado para practicar las cuatro operaciones aritméticas básicas.

Los números pueden ser positivos, por ejemplo +5 donde podemos omitir el signo + y solo escribir 5. No se puede malinterpretar.

Los números también pueden ser negativos, por ejemplo -5 donde no podemos omitir el signo: -

Si solo queremos la magnitud de un número, colocamos el número entre dos paréntesis:

$|5| = 5$ $\qquad |-5| = 5$ $\qquad |-8| = 8$

Lo llamamos *el valor numérico* de ese número.

valor numérico = magnitud del número

Además, describamos brevemente el sistema numérico de la antigua Mesopotamia. Todavía está en uso aunque no pensamos en ello. Tenían dos números significativos: 6 y 60. No está claro por qué eligieron el número significativo 6, pero probablemente pensaron que era demasiado pequeño, así que lo multiplicaron por 10 (probablemente debido a los diez dedos) y obtuvieron el número base: 60

En el equinoccio establecieron 6 horas desde la salida del sol hasta el mediodía y 6 horas desde el mediodía hasta la puesta del sol. La noche es igualmente larga dándonos 24 horas.

Una hora es gruesa, así que la dividimos con su número base, 60, y obtenemos un minuto. Si lo queremos más fino, lo dividimos por 60 por segundo y obtenemos un segundo. En los tiempos modernos hemos dividido aún más, ¡pero esta vez usamos el

sistema de 10! Luego tenemos una décima, una centésima, etc. de un segundo.
En matemáticas, los ángulos se miden en grados de ángulo, indicando que una vuelta es de 360°. 360 se encuentra multiplicando los dos números significativos: $6 \cdot 60 = 360$.

La aritmética es del griego antiguo y significa la doctrina de los números.

Las cuatro operaciones aritméticas básicas.

Las cuatro operaciones aritméticas básicas y sus símbolos de cálculo son

1. para sumar, más +
2. para restar, menos -
3. multiplicar, punto ·
4. para dividir, dos puntos : o una línea fraccionaria —

1. Suma

Sumamos colocando los números uno encima del otro. Unidades sobre unidades, decenas sobre decenas, centenas sobre centenas, etc.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 117 \\ +\ 14 \\ \hline 131 \\ \hline \end{array}$$

Primero las unidades: 7 + 4 da 11, luego en la línea inferior de resultado escribimos las unidades, aquí 1, y las decenas se escriben encima de las otras decenas.

luego las decenas: 1 de antes + 1 + 1 da 3 y se escribe en el resultado.

y luego las centenas: 1 + 0 (no hay nada delante de las cifras 1 y 4) da 1 que se escribe en el resultado.

respuesta: 131

2. Diferencia

Retiramos colocando los números uno encima del otro. Unidades sobre unidades, decenas sobre decenas, centenas sobre centenas, etc.

Primero los unos: 4 - 7 que no podemos, así que tomamos prestado diez y lo escribimos en la parte superior. Estos 10 + 4 dan 14. Ahora podemos decir 14 - 7 que da 7, y escribirlo en el resultado.
luego las decenas: La parte superior de las decenas era 1, pero la tomamos prestada, así que ahora es 0. 0 - 1 no se puede hacer, así que tomamos prestadas las decenas de las centenas y la escribimos en la parte superior. Se convierte en 10 porque 100 es diez veces más grande que 10. El 10 - 1 prestado da 9, y lo escribimos en el resultado.
Y finalmente, las centenas que solían tener la figura 1, pero como la tomamos prestada, ahora tenemos 0. 17 no tiene centenas, por lo que da como resultado 0 - 0 = 0, que no está escrito.
respuesta: 97

2a.

¿Qué sucede si queremos retirar un número grande de un número pequeño?
Se puede hacer, aunque no tenemos una técnica para ello. Así que volteamos los números y encontramos el número grande menos el número pequeño. Luego volteamos los números nuevamente y ponemos un signo menos delante del resultado:

$$\left.\begin{array}{r} 17 \\ -114 \end{array}\right\} \curvearrowright \left.\begin{array}{r} 114 \\ -17 \\ \hline 97 \end{array}\right\} \curvearrowright \underline{\underline{-97}}$$

respuesta: -97
Los números negativos también existen. Ningún problema. Por ejemplo, puede -97 significar que hay un déficit de 97.
La flecha curva es una forma de mostrar que algo ha cambiado, es decir: transferido a.

3. Producto

Multiplicamos dos números colocándolos uno al lado del otro con un símbolo de punto en el medio.
Primero multiplicamos *las del primer número* por las del segundo, luego las de las *decenas*, las de las *centenas*, etc.
Luego multiplicamos *las decenas del primer número* con las del segundo, luego las *decenas* con las decenas, las *decenas* con las centenas, etc.
Etcétera….

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 32 \cdot 741 \\ \hline 1482 \\ 22230 \\ \hline \underline{\underline{23712}} \end{array}$$

2 · 1 da 2 que se escribe en el ”lugar de las unidades” debajo de la línea.
2 · 4 da 8 que se escribe en el ”lugar de las decenas” debajo de la línea.
2 · 7 da 14 - donde 4 está escrito en el "lugar de las centenas" y 1 en el "lugar de las millares" debajo de la línea.

Ahora *las decenas en el primer número*: Ya que estamos multiplicando por decenas, comenzamos escribiendo 0 en el lugar de las unidades debajo de 1482. Luego multiplicamos: 3 · 1 da 3 que se escribe en el lugar de las decenas. 3 · 4 da 12, escribimos 2 y guardamos 1 como una cifra pequeña encima de la cifra de 7. 3 · 7 da 21, y recordamos sumar 1 dando 22, que simplemente escribimos porque no hay más para multiplicar. Finalmente, agregamos 1482 y 22230 para renderizar 23712.

3a.

Si uno de los números es un punto decimal, multiplicamos como si nada, y ponemos una coma/punto en el resultado en la misma posición que el número con el que comenzamos:

$$\begin{array}{r} 32 \cdot 7.41 \\ \hline 1482 \\ 22230 \\ \hline \underline{\underline{237.12}} \end{array}$$

Si ambos números son puntos decimales, multiplicamos como si nada y ponemos una coma/punto en el resultado en la posición del primer número + la posición del segundo número con el que comenzamos:

$$\begin{array}{r} 3.2 \cdot 7.41 \\ \hline 1482 \\ 22230 \\ \hline 23.712 \end{array}$$

Aquí tenemos 1 + 2 = 3 cifras después de la coma/punto.

4. División

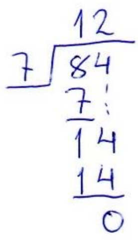
Si vamos a dividir 84 entre 7, escribimos:

84:7   para mantener la altura en el cuerpo del texto.

O mejor:

$\frac{84}{7}$ como lo preferimos en matemáticas.

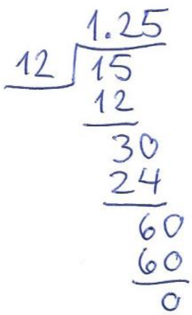
Para el cálculo lo arreglamos así:



y tenemos: 8 dividido por 7 da 1, que está escrito arriba. 8-7 da 1, que se escribe a continuación y da un excedente de 1 decena. Ahora arrastramos la figura 4 para colocarla junto a la figura 1 para que se convierta en 14. 14 dividido por 7 da 2, que está escrito arriba. 7·2 es 14. 14 menos 14 es cero, por lo que suma, y la respuesta es 12.

4a.

Algunas veces la respuesta no es un número entero:

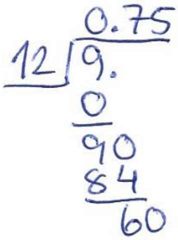


15 dividido por 12 da 1, que está escrito arriba. 1·12 da 12. 15-12 da 3. Entonces, tenemos un excedente de 3 y no más cifras.

Ahora expandimos 15 para convertirlo en 15,0000 (con tantos ceros como sea necesario). Por lo tanto, podemos poner una coma/punto en la respuesta y arrastrar el 0 para colocarlo junto a la cifra 3. Luego, 30 dividido por 12 da 2, que está escrito arriba en el resultado. 2·12 da 24. 30-24 es 6. El siguiente 0 se arrastra y tenemos 60. 60 dividido por 12 da 5, que se escribe en el resultado. 5·12 da 60. 60-60 es 0, y hemos terminado. La respuesta es 1,25.

4b.

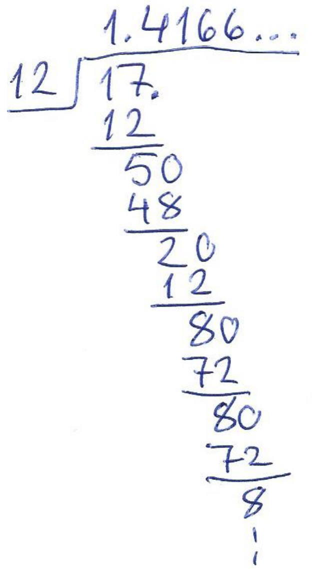
Y al dividir un número pequeño por un número grande:



9 dividido por 12 se puede hacer 0 veces, lo cual se escribe en el resultado. Luego expandimos 9 para convertirlo en 9.000. Ponemos una coma/punto en el resultado y continuamos.
La respuesta es 0,75.

4c.

Y cuando no cuadra

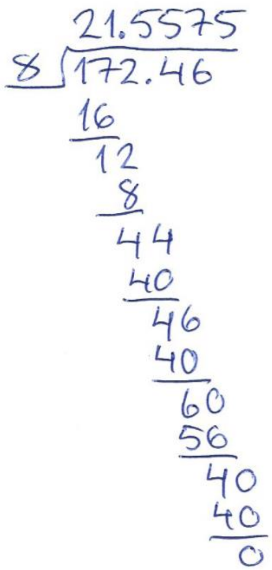


la respuesta nunca puede ser precisa. Tenemos que elegir cuántas cifras después de la coma/punto se necesitan. Un decimal es el término técnico para una cifra después de la coma/punto. Decimal significa “un décimo número”. La respuesta está escrita 1.4166… los puntos muestran que continúa.
Si queremos un número preciso, no realizaremos el cálculo de la división en absoluto. Solo tenemos que dejar la fracción sin cambios:

$\frac{17}{12}$ eso es preciso.

4d.

Si dividimos un número decimal por un número entero, ponemos una coma/punto en el resultado cuando arrastramos el primer decimal



Here the calculation adds up since we end with 0. So, the answer is a precise decimal number: 21.5575

Teoría

Finalmente, algunas observaciones prácticas:

Siempre podemos dividir por 1. Por ejemplo, podemos escribir 3 como una fracción: $\frac{3}{1}$ que seguramente es igual a 3.

También podemos multiplicar siempre por 1. Por ejemplo, podemos escribir 3 como 3·1, que seguramente es igual a 3.

Fracciones (cocientes)

$\frac{1}{2}$ significa 1 dividido por 2 *o* 1 de 2 *o* 1 en proporción con 2. 1 está en el *numerador* y 2 está en el *denominador*. La línea en el medio se llama la línea de fracción.

Si vamos a compartir un pastel por igual, obtenemos $\frac{1}{2}$ cada uno o obtenemos 1 de 2 piezas cada uno o obtenemos 1 pieza en proporción con 2 piezas.

Podemos multiplicar el numerador y el denominador con el mismo número *o* letra *u otro* - excepto 0. No podemos multiplicar por algo diferente ya que todavía necesitamos mantener la proporción entre el numerador y el denominador. En este ejemplo, el denominador debe ser el doble del numerador.

Si multiplicamos por 3, obtenemos: $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$

Si multiplicamos por -3, obtenemos: $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot (-3)}{2 \cdot (-3)} = \frac{-3}{-6}$

Si multiplicamos por a, obtenemos: $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot a}{2 \cdot a} = \frac{1a}{2a}$

Si multiplicamos por (0,1·2 - 7), obtenemos:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot (0.1 \cdot 2 - 7)}{2 \cdot (0.1 \cdot 2 - 7)} = \frac{1(0.1 \cdot 2 - 7)}{2(0.1 \cdot 2 - 7)}$$

En estos cuatro ejemplos, hemos extendido la fracción.

También podemos dividir el numerador y el denominador con el mismo número *o* letra *u otro* - excepto 0.

Si dividimos $\frac{3}{6}$ por 3 en numerador y denominador obtenemos $\frac{1}{2}$ y estamos de vuelta.

Si dividimos $\frac{1(0.1 \cdot 2 - 7)}{2(0.1 \cdot 2 - 7)}$ por (0,1·2 - 7) en numerador y denominador obtenemos $\frac{1}{2}$ y estamos de regreso.

Hemos acortado la fracción.

Al multiplicar un número (u otro) por una fracción, multiplicamos número y numerador. Por ejemplo

$5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ or $a \cdot \frac{3}{6} = \frac{3a}{6}$

or $(0.1 \cdot 2 - 7) \cdot \frac{3}{6} = \frac{3\,(0.1 \cdot 2 - 7)}{6}$

Al multiplicar una fracción por otra fracción, multiplicamos numerador por numerador y denominador por denominador. Por ejemplo

$\frac{3}{6} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{12}$ o $\frac{3}{6} \cdot \frac{-5}{2} = \frac{-15}{12}$

o $\frac{3}{6} \cdot \frac{5(0.1 \cdot 2 - 7)}{2} = \frac{3 \cdot 5 \cdot (0.1 \cdot 2 - 7)}{6 \cdot 2} = \frac{15(0.1 \cdot 2 - 7)}{12}$

Es un poco más difícil dividir una fracción por una fracción. Por ejemplo $\frac{1}{2}$ dividido por $\frac{1}{4}$

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$ aquí es importante escribirlo de una manera que muestre claramente qué debe dividirse por qué. No debe malinterpretarse, por lo que escribimos

$\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$ ahora podemos ver claramente, que $\frac{1}{2}$ debe ser dividido por $\frac{1}{4}$

Y ahora se vuelve un poco más difícil. Podemos ver que $\frac{1}{2}$ es dos veces más grande que $\frac{1}{4}$, por lo que la respuesta debe ser 2. Por lo tanto, la regla dice que dividimos una fracción entre una fracción, en lugar de eso, multiplicamos una fracción por el inverso de la otra fracción. El inverso de $\frac{1}{4}$ es $\frac{4}{1}$ entonces

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2$$

También podemos verlo de esta manera:
Multiplicamos numerador y denominador por 4 y obtenemos

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{4}{2}}{\frac{4}{4}} = \frac{2}{1} = 2$$

Y la misma regla se aplica si el numerador no es una fracción

$$\frac{(0.1 \cdot 2 - 7)}{\frac{1}{4}} = 4(0.1 \cdot 2 - 7)$$

o $\frac{318.27}{\frac{1}{4}} = 4 \cdot 318.27$

Ejemplos

1.

El propósito de acortar una fracción generalmente es simplificar

$\frac{\frac{1}{2} \cdot 6}{\frac{1}{4} \cdot 8}$ Puede ser acortada como $\frac{3}{2}$

$\frac{(-\frac{1}{2}) \cdot 6}{\frac{1}{4} \cdot 8}$ Puede ser acortada como $\frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$

No importa si menos está antes del numerador entero o antes de la fracción entera.

2.
El propósito de extender una fracción generalmente es el deseo de un cierto denominador para un cálculo posterior, en particular si estamos sumando fracciones.
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ aquí necesitamos encontrar un denominador común.
Siempre se puede encontrar un denominador común multiplicando los dos denominadores, aquí: $2 \cdot 3 = 6$, por lo que cambiamos ambas fracciones a sexto, que luego acortamos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$$

3. y una mezcla

$$\frac{(-\frac{1}{2}) \cdot 6}{\frac{1}{4} \cdot 8} + \frac{1}{3} = \frac{3\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 6}{3(\frac{1}{4} \cdot 8)} + \frac{1(\frac{1}{4} \cdot 8)}{3(\frac{1}{4} \cdot 8)}$$

donde el común denominador se encuentra multiplicando los dos denominadores. Entonces podemos hacer una fracción común

$$\frac{3\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 6 + 1(\frac{1}{4} \cdot 8)}{3(\frac{1}{4} \cdot 8)} = \frac{(-9) + (2)}{(6)} = \frac{-7}{6}$$

En este cálculo, multiplicamos una entidad dentro de un paréntesis por un número. Veremos más en esto en un capítulo siguiente.

Por ciento

Porcentaje significa "de cien", lo que significa una fracción con 100 como denominador.

$\frac{1}{2}$ significa 1 de 2. Si multiplicamos por 50 en el numerador y denominador obtenemos $\frac{50}{100}$ o 50 de 100 o 50%. En breve:

$\frac{50}{100} = 50\%$

Ejemplos

$$\frac{1}{5} = \frac{20 \cdot 1}{20 \cdot 5} = \frac{20}{100} = 20\%$$

$$\frac{1}{8} = \frac{12{,}5 \cdot 1}{12{,}5 \cdot 8} = \frac{12{,}5}{100} = 12{,}5\%$$

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$$

y como numero decimal

$$\frac{1}{2} = \frac{50 \cdot 1}{50 \cdot 2} = \frac{50}{100} = 50\% = 0{,}5$$

$$\frac{1}{4} = \frac{25 \cdot 1}{25 \cdot 4} = \frac{25}{100} = 25\% = 0{,}25$$

$$\frac{3}{4} = \frac{25 \cdot 3}{25 \cdot 4} = \frac{75}{100} = 75\% = 0{,}75$$

$$\frac{3}{8} = \frac{12{,}5 \cdot 3}{12{,}5 \cdot 8} = \frac{37{,}5}{100} = 37{,}5\% = 0{,}375$$

El porcentaje es de cien. Un número decimal está fuera de uno.

1 es un todo. 100% es también un todo.

$$1 = \frac{100}{100} = 100\%$$

2.

Ayer cierto vestido costó 200 libras. Hoy ha subido a 225 libras. ¿Cuál es el aumento en %?

200 libras corresponden al 100%.

La subida es 225 - 200 = 25 libras, que hay que ver en proporción con las 200 libras:

$\frac{25}{200} = 0.125 = 12.5\%$ cual es la respuesta

3.

Ayer cierto vestido costó 200 libras. Hoy el precio ha bajado a 175 libras. ¿Cuál es la reducción de precio en %?

200 libras corresponden al 100%.

La reducción es de 200 - 175 = 25 libras, que hay que ver en proporción a las 200 libras:

$\frac{25}{200} = 0.125 = 12.5\%$ cual es la respuesta

La información se podría dar como: Hoy -12,5% para este vestido.

4.

El precio de una determinada máquina es de 1000 libras sin IVA.

1000 libras corresponde al 100%. Incluido el 25% de IVA el precio es:

$1.25 \cdot 1000 = 1250$ libras cual es la respuesta

o

$100\% + 25\% = 1000 + 0.25 \cdot 1000 = 1250$ libras

5.

Otra máquina cuesta 1000 libras con IVA.

1000 libras ahora corresponde al 125%. Excluyendo el 25% de IVA el precio es:

$\frac{1000}{1.25}$ = 800 libras   cual es la respuesta

Podemos confirmar diciendo

100% + 25% = 800 + 0.25·800 = 1000 libras

6.

¿Cuál es el porcentaje de 347 de 376?

$\frac{347}{376}$ = ca. 0.9229 = ca. 92.3%

punto porcentual

Si hemos tejido el 20% de toda una manta en marzo y el 25% de toda la manta en abril hemos aumentado 5 punto porcentual (punto 5%).

O: cambio = fin - inicio = 25% - 20% = punto 5%

O: $\frac{25}{100} - \frac{20}{100} = \frac{5}{100}$ = punto 5%

Así, el punto porcentual expresa el cambio/la diferencia/el aumento o disminución.

+5% punto es un aumento/crecimiento.

-5% punto es una disminución/caída.

Cálculo con letras (álgebra)

Si no sabemos el número de algo, lo llamamos cantidad desconocida y en su lugar escribimos una letra. Eso es *álgebra*.

Todas las reglas de cálculo son las mismas. Eso se aplica a las cuatro operaciones aritméticas básicas, así como a otros tipos de cálculo, que veremos más adelante.

El término técnico, álgebra, es del latín.

Muchos términos técnicos provienen del latín o del griego antiguo y sirven como lenguaje común en la mayoría de las ciencias, independientemente del idioma que usemos de otra manera. Además, muchos términos técnicos están en inglés, que muchos entienden y hablan.

Para cantidades desconocidas usamos letras minúsculas (a, b, c, etc.) y mayúsculas (D, E, F, etc.) de nuestro alfabeto. Pero a menudo, eso no es suficiente, por lo que también usamos letras minúsculas (α, β, γ, etc.) y mayúsculas (Δ, Θ, Σ, etc.) del griego antiguo. Puede ser el nombre de una línea, un ángulo u otro. También podemos usar letras como abreviaturas. Eso lo veremos más tarde.

Ejemplos

1.

$a + a = 2a$	$\alpha + 2\alpha = 3\alpha$	$-\alpha + 2\alpha = \alpha$
$2 \cdot a = 2a$	$a \cdot b = ab$	$a \cdot b \cdot c = abc$

Podemos omitir el punto de multiplicación si no se puede malinterpretar. Nos gusta hacer las cosas brevemente.

2.

A + B

no se puede reducir ya que A puede ser el número de manzanas y B el número de peras. Eso no se puede cambiar, por lo que la respuesta sigue siendo

A + B

y

B - c = B - c $\quad \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \quad -\frac{3a}{2b} = -\frac{3a}{2b}$

etcétera.

3.

$$-\frac{3a}{4b} + \frac{3a-c+2\cdot a}{2b} = -\frac{3a}{4b} + \frac{5a-c}{2b} = -\frac{3a}{4b} + \frac{2\cdot(5a-c)}{2\cdot 2b} = \frac{-3a+10a-2c}{4b}$$

$= \frac{7a-2c}{4b}$ que no se puede simplificar.

4.

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot 6\cdot a}{\frac{1}{4}\cdot 8a} = \frac{3\cdot a}{2\cdot a} = \frac{3}{2}$$

5.

$$\frac{(-\frac{1}{2})\cdot 6\cdot a}{\frac{1}{4}\cdot 8b} = \frac{-3a}{2b} = -\frac{3a}{2b}$$

6.

$\frac{4x-8y}{2}$

puede dividirse en dos fracciones donde tanto 4x como -8y deben dividirse por 2:

$\frac{4x-8y}{2} = \frac{4x}{2} - \frac{8y}{2} =$ 2x - 4y

7.

3x - 3y + $\frac{4x-8y}{4}$

La fracción molesta ya que nos gustaría tener solo x y solo y. Dividimos la fracción en dos

3x - 3y + $\frac{4x}{4} - \frac{8y}{4}$

el menos antes de 8y se mueve al frente de la fracción. Podemos hacer eso ya que no hay nada más en el numerador que solo 8y.

3x - 3y + x - 2y = 4x - 5y

x solo y y solo. No es posible una reducción adicional.

Paréntesis

Ponemos un paréntesis alrededor de algo que queremos ver como uno, - un número, - una entidad.

Ejemplos

1. $4(x + y)$ aquí $(x + y)$ como uno debe ser multiplicado por 4.

2. $(x + y) + 4$ aquí $(x + y)$ como uno se suma a 4.

3. $4 - (x + y)$ aquí $(x + y)$ como uno se resta de 4.

4. $\frac{4}{(x+y)}$ aquí 4 se divide $(x + y)$. $(x + y)$ no se puede separar.

5. $\frac{(x+y)}{4}$

Aquí $(x + y)$ debe dividirse por 4 y puede dividirse, de modo que x se divida por 4 por separado e y se divida por 4 por separado. Así, dos fracciones

$\frac{x}{4} + \frac{y}{4}$

Si queremos levantar un paréntesis, debemos asegurarnos de que el significado no cambie y que puedas calcular hacia atrás para obtener la expresión con la que comenzaste.

6.

$4(x + y) = 4x + 4y$ 4 se multiplica en el paréntesis al multiplicar x e y por separado.

Si calculamos hacia atrás de derecha a izquierda, ponemos 4 fuera del paréntesis.

7.

(x + y) + 4 aquí tenemos un + invisible antes del paréntesis. Los matemáticos casi siempre escriben las cosas en pocas palabras, por lo que (x + y) se entiende como +(x + y). Un paréntesis más puede eliminarse sin más cambios

$(x + y) + 4 = x + y + 4$

También podemos calcular de derecha a izquierda poniendo los paréntesis que queramos.

8.

Si la entidad entre paréntesis es negativa, escribimos -(x + y). Entonces, cuando levantamos el paréntesis, tanto x como y son negativos

$4 - (x + y) = 4 - x - y$

Si calculamos de derecha a izquierda ponemos -1 fuera del paréntesis. Nuevamente, queremos ser breves y solo escribir - antes del paréntesis. No se puede malinterpretar.

$-1\cdot(x + y) = -1(x + y) = -(x + y)$

9.

$$\frac{4}{(x+y)}$$

aquí 4 se divide por (x + y). (x + y) no se pueden separar. El paréntesis puede eliminarse, no cambia nada, 4 aún debe dividirse por la suma x+y

$$\frac{4}{(x+y)} = \frac{4}{x+y}$$

10.

$$\frac{(x+y)}{4}$$

Aquí $(x + y)$ debe dividirse por 4 y puede dividirse, de modo que x se divida por 4 por separado e y se divida por 4 por separado. Así, dos fracciones

$\frac{x}{4} + \frac{y}{4}$ al mismo tiempo, se ha levantado el paréntesis y podemos calcular hacia atrás haciendo una fracción común.

CAS* no tiene la capacidad, como la del hombre, de distinguir entre paréntesis necesarios o innecesarios. Por lo tanto, es posible que necesitemos poner más paréntesis cuando usamos CAS.

*CAS = Computer Aided Solve = Resolución asistida por computadora

Reglas cuadradas (identidades notables)

Primero algunos ejemplos de cómo multiplicar entidades entre paréntesis:

$(2 + a)\cdot(3 + 2a) = 6 + 4a + 3a + 2aa = 6 + 7a + 2aa$

multiplicamos 2 por 3, luego 2 por 2a, a por 3 y finalmente a por 2a. Eventualmente reducimos:

$(2 + a)(3 + 2a + b) = 6 + 4a + 2b + 3a + 2aa + ab$

El método es el mismo. Primero multiplicamos 2 por 3, por 2a, por b, luego multiplicamos a por 3, por 2a, por b.

Y
$(2 - a)(3 - 2a - b) = 6 - 4a - 2b - 3a + 2aa + ab$ recuerda el signo

Más veces más da más
Más veces menos da menos
Menos veces más da menos
Menos veces menos da más.

2aa también se puede escribir de esta manera: $2aa = 2a^2$ "dos veces - a elevado a dos"
o $b\cdot b = bb = b^2$ b a la potencia de dos (o: b al cuadrado)
y ahora las reglas cuadradas (identidades notables):

1. $(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
2. $(a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba – b^2 = a^2 – b^2$

En el primer teorema (a + b) se eleva al cuadrado y escribimos $(a + b)^2$. En el segundo teorema (a - b) se eleva al cuadrado y escribimos $(a - b)^2$. En el tercer teorema los signos varían, por lo que no es un cuadrado.

La versión breve es

1. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

2. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Estos teoremas se usan mucho.

Ejemplos

$$\frac{4a^2-9}{4a^2+9-12a} = \frac{(2a+3)(2a-3)}{(2a-3)^2} = \frac{2a+3}{2a-3}$$

$$\frac{3b^2+12-12b}{5b^2-10b} = \frac{3(b^2+4-4b)}{5b^2-10b} = \frac{3(b-2)^2}{5b(b-2)} = \frac{3(b-2)}{5b}$$

y una larga reducción:

$$\frac{3}{ab-b^2} + \frac{3}{a^2+ab} - \frac{6}{a^2-b^2} =$$

$$\frac{3}{b(a-b)} + \frac{3}{a(a+b)} - \frac{6}{(a+b)(a-b)} =$$ b apagar, a apagar, teorema 3

$$\frac{3(a+b)}{b(a+b)(a-b)} + \frac{3(a-b)}{a(a+b)(a-b)} - \frac{6}{(a+b)(a-b)} =$$ prolongada, prolongada, nada

$$\frac{\frac{3}{b}(a+b)}{(a+b)(a-b)} + \frac{\frac{3}{a}(a-b)}{(a+b)(a-b)} - \frac{6}{(a+b)(a-b)} =$$ b movida, a movida, nada

$$\frac{\frac{3a}{b}+3+3-\frac{3b}{a}-6}{(a+b)(a-b)} = \frac{\frac{3a}{b}-\frac{3b}{a}}{(a+b)(a-b)} = \frac{\frac{3a^2}{ab}-\frac{3b^2}{ab}}{(a+b)(a-b)} = \frac{3a^2-3b^2}{ab(a^2-b^2)} = \frac{3}{ab}$$

Raíz cuadrada

Si tenemos un número, por ejemplo 4, podemos encontrar el número positivo que da 4 cuando se eleva al cuadrado. Eso es 2. Decimos que la raíz cuadrada de 4 es 2, y escribimos $\sqrt{4} = 2$

Y además: Si tenemos un número, por ejemplo el 8, podemos encontrar el número positivo que da 8 elevado a la 3. Eso es 2. Decimos que la tercera raíz de 8 es 2, y escribimos

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

y la raiz cuarta de 16 es 2

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

La raíz cuadrada y demás también se puede escribir de otra forma, como veremos en el siguiente capítulo: “Exponenciación”.

Ejemplos

1.

$$\sqrt{16 \cdot 4} = \sqrt{64} = 8$$

o

$$\sqrt{16} \cdot \sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8$$

entonces

$$\sqrt{16 \cdot 4} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{4}$$

2.

$$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \frac{4}{2} = 2$$

o

$$\sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$$

entonces

$$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}}$$

O in letras

3.

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

4.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

5.

$$\frac{\sqrt{16a}}{\sqrt{25b}} = \frac{4\sqrt{a}}{5\sqrt{b}}$$

Exponenciación

Hay una forma más corta de escribir a veces a

$a \cdot a = aa = a^2$

a es el número base, 2 se llama exponente y a^2 juntos es: a elevado a la potencia de 2.

Más ejemplos:

$aaaaaaaaaaaaa = a^{13}$ $\qquad$ $bbbb = b^4$

o en números:
$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6$ $\qquad$ $9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3$

Con las letras podemos omitir el signo de multiplicación, no se puede malinterpretar. Sin embargo, con las cifras no podemos omitir el signo, porque 999 significa novecientos noventa y nueve.

Especialmente importantes y muy utilizadas son las potencias de 10:

$10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$ $\qquad$ $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$ $\qquad$ etc.

Hay tres ventajas de usar la exponenciación: son muy adecuadas para números muy grandes y muy pequeños, son más fáciles de calcular (una vez que uno se ha acostumbrado) y son casi indispensables en el cálculo diferencial e integral, como veremos. nos vemos.

Si tenemos una fracción como $\frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{1}$, -podemos escribir $\frac{10^3}{1} = 10^3$
Entendido un + antes de 3. Así $10^{+3} = 10^3$

Si tenemos una fracción como $\frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10}$, -podemos escribir $\frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

Aquí el signo menos muestra que 10^3 está ubicado en el denominador.

+ antes del exponente significa ubicación: numerador, y - antes del exponente significa ubicación: denominador.

Ahora, en lugar de mil podemos escribir
$1000 = 10^3$

y en lugar de un millón podemos escribir
$1\,000\,000 = 10^6$

El número de Avogadro (física, química) es aproximadamente:
$6 \cdot 10^{23}$

La constante de Planck (física) es aproximadamente: $6{,}63 \cdot 10^{-34}$

Estos números serían muy tediosos de escribir sin el uso de la exponenciación.

Ejemplos

1.

$$10^2 \cdot \mathit{10}^{\mathit{3}} \;=\; 10 \cdot 10 \cdot \mathit{10} \cdot \mathit{10} \cdot \mathit{10} \;=\; 10^5$$

Podríamos haber calculado esto simplemente sumando los exponentes

$$10^2 \cdot 10^3 \;=\; 10^5$$

2.

$$\frac{1}{10^2 \cdot 10^3} = \frac{1}{10^5} = \frac{10^{-5}}{1} = 10^{-5}$$

Podríamos haber calculado esto sumando los exponentes en el denominador y moviendo el número de potencia al numerador con un menos antes del exponente.

3.

$$\frac{10^4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^5}{10^2 \cdot 10^3} = 10^2 = 100$$

Exponentes en el numerador: 4-2+5 = 7

Exponentes en el denominador: 2+3 = 5 movido hacia arriba -5

Cálculo de los exponentes: 7-5 = 2 eso significa $10^2 = 100$.

4.

$10^{½} \cdot 10^{½} = 10^1 = 10$ exponentes $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

pero ¡guau! $\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 10$ también da 10

entonces $10^{½} = \sqrt{10}$

Decimos que 10 elevado a ½ es lo mismo que la raíz cuadrada de 10. Entonces, en lugar de escribir $\sqrt{10}$, también podríamos escribir $10^{½}$.

Como se mencionó, esto es a menudo una ventaja.

5.

Y ahora el complicado:

$10^0 = 1$

Podemos ver a partir de los exponentes en la fracción que:

$$\frac{10^1}{10^1} = 10^{1-1} = 10^0 = 1$$

Exponente en el numerador: 1

Exponente en el denominador: 1 movido hacia arriba -1

Cálculo de los exponentes: 1-1 = 0

Entonces, 10^0 debe ser igual a 1.

6.

$(10^2)^3 = 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 10^6 = 10^{2 \cdot 3}$

7.

$(2 \cdot 3)^4 = 6^4 = 1296$

$2^4 \cdot 3^4 = 16 \cdot 81 = 1296$

entonces

$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$

8.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{16}{81}$$

$$\frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

entonces

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$$

O en letras:

9.

$a^2 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$

10.

$\frac{1}{b^2 \cdot b^3} = \frac{1}{b^5} = \frac{b^{-5}}{1} = b^{-5}$

11.

$\frac{x^4 \cdot x^{-3} \cdot x^5}{x^2 \cdot x^3} = x^1 = x$

12.

$y^{½} \cdot y^{½} = y^1 = y$

13.

$a^0 = \frac{a^1}{a^1} = 1$ $\qquad$ $x^0 = \frac{x^1}{x^1} = 1$ $\qquad$ $1764^0 = 1$

O el camino largo

$a^0 = a^{(1-1)} = a^1 \cdot a^{-1} = \frac{a^1}{a^1} = 1$

o por diversion

$a^0 = a^{(2-2)} = a^2 \cdot a^{-2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$

$a^0 = a^{(x-x)} = a^x \cdot a^{-x} = \frac{a^x}{a^x} = 1$

14.

$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^6 = a^{2 \cdot 3}$

$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

15.

$(a \cdot b)^4 = a^4 \cdot b^4$

$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$

16.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

17.

La tercera raíz de 8 como exponenciación: $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$

que se ve desde $8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} = 8^1 = 8$

y la raíz cuarta de 16: $\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$

que se ve desde $16^{\frac{1}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 16^1 = 16$

Ecuaciones

Una ecuación expresa que lo que está a la izquierda del signo de igualdad (=) es igual a lo que está a la derecha del signo de igualdad. Si eso se cumple, la ecuación es verdadera.

Necesitamos ecuaciones para encontrar una o más cantidades desconocidas. Eso pasa mucho.

Por ejemplo, mi salario depende de la cantidad de horas que trabajo. Podemos afirmar que en una ecuación:

Salario = tarifa por hora multiplicada por el número de horas de trabajo

o de la física, la Segunda Ley de Newton:

fuerza = masa por aceleracion

con simbolos

$F = m \cdot a$

Si conocemos los números de la masa y la aceleración podemos multiplicarlos y encontrar la fuerza.

Las ecuaciones son necesarias en todas partes.

Empecemos con una sola incógnita, que en matemáticas suele llamarse x, y algunos números conocidos. Por ejemplo

$x + 3 = 5$

es fácil ver que $x = 2$.

Si tenemos x^1 (que es igual a x), hablamos de una ecuación de primer grado.
Si tenemos x^2, hablamos de una ecuación de segundo grado.
Si tenemos x^3, hablamos de una ecuación de tercer grado.
Si tenemos x^4, hablamos de una ecuación de cuarto grado.
Etcétera.

Principalmente, necesitamos resolver ecuaciones de primer grado. También tenemos muchas ecuaciones de segundo grado, mientras que las ecuaciones de tercer grado son raras y las ecuaciones de cuarto grado son extremadamente raras.

Eso se corresponde bien con el hecho de que solo tenemos métodos seguros para resolver ecuaciones de primer y segundo grado. Las ecuaciones de mayor grado solo se pueden resolver mediante métodos especiales (sobre esto más adelante) o CAS.
----
en una ecuacion

• Podemos multiplicar por el mismo número (o letra, u otro) en ambos lados de la ecuación, excepto 0.
• Podemos dividir por el mismo número (o letra, u otro) en ambos lados de la ecuación, excepto 0.
• Podemos sumar el mismo número (o letra, u otro) en ambos lados de la ecuación.
• Podemos retirar el mismo número (o letra, u otro) en ambos lados de la ecuación.

Es crucial que lo que está a la izquierda sea igual a lo que está a la derecha. Estas cuatro reglas aseguran que se mantenga la igualdad.
Recuerda que, cuando multiplicamos, dividimos, sumamos o restamos, - debe ser por *todo* el lado izquierdo - y todo el lado derecho.

Ejemplos

1.

$x + 3 = 5$

multiplicar por 2: $2(x + 3) = 2 \cdot 5$

multiplicar por a: $a(x + 3) = a \cdot 5$

2.

$x + 3 = 5$

dividido por 2: $\frac{x+3}{2} = \frac{5}{2}$

dividido por a: $\frac{x+3}{a} = \frac{5}{a}$

3.

$x + 3 = 5$

agregar 2: $(x + 3) + 2 = 5 + 2$

agregar a: $(x + 3) + a = 5 + a$

4.

$x + 3 = 5$

sustraer 2: $(x + 3) - 2 = 5 - 2$

sustraer a: $(x + 3) - a = 5 - a$

Usando estas cuatro reglas, podemos resolver para x (hacer que se sostenga por sí mismo). Lo hacemos paso a paso. Para continuar, necesitamos una nueva señal:

⇔ que significa "equivalencia lógica", o sinónimo, o lo mismo que. La flecha doble muestra que la ecuación es válida independientemente del cálculo hacia adelante o hacia atrás.

5.

$x + 3 = 5 \quad \Leftrightarrow$

$(x + 3) - 3 = 5 - 3 \quad \Leftrightarrow$

$x + 3 - 3 = 5 - 3 \quad \Leftrightarrow$

$x = 2$

Aquí calculamos hacia adelante. También podemos calcular hacia atrás:

$x = 2 \quad \Leftrightarrow$

$x + 3 - 3 = 5 - 3 \quad \Leftrightarrow$

$(x + 3) - 3 = 5 - 3 \quad \Leftrightarrow$

$x + 3 = 5$

Veamos las cuatro reglas de cálculo nuevamente en nuevos ejemplos:

6.

$\frac{x}{3} = 2$

Aquí podemos multiplicar por 3 en ambos lados

$\frac{x}{3} = 2 \quad \Leftrightarrow$

$3 \cdot \frac{x}{3} = 3 \cdot 2 \quad \Leftrightarrow$

$x = 6$

Pero también podríamos decir que 3, que está en el denominador del lado izquierdo, se puede mover al numerador del lado derecho.

$\frac{x}{3} = 2 \qquad \Leftrightarrow$

$x = 3 \cdot 2 \qquad \Leftrightarrow$

$x = 6$

que es más rápido.

7.

$3 \cdot x = 6$

dividimos por 3 en ambos lados

$3 \cdot x = 6 \qquad \Leftrightarrow$

$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \qquad \Leftrightarrow$

$x = 2$

Pero también podríamos decir que 3, que está en el numerador del lado izquierdo, se puede mover al denominador del lado derecho.

$3 \cdot x = 6 \qquad \Leftrightarrow$

$x = \frac{6}{3} \qquad \Leftrightarrow$

$x = 2$

que es más rápido.

8.

$x - 3 = 5$

podemos sumar 3 en ambos lados

$x - 3 = 5 \quad \Leftrightarrow$

$x - 3 + 3 = 5 + 3 \quad \Leftrightarrow$

$x = 8$

Pero también podríamos decir que 3, que tiene un signo menos en el lado izquierdo, puede moverse para tener un signo más en el lado derecho.

$x - 3 = 5 \quad \Leftrightarrow$

$x = 5 + 3 \quad \Leftrightarrow$

$x = 8$

que es más rápido.

9.

$x + 3 = 5$

podemos restar 3 en ambos lados

$x + 3 = 5 \quad \Leftrightarrow$

$(x + 3) - 3 = 5 - 3 \quad \Leftrightarrow$

$x = 2$

Pero también podríamos decir que 3, que tiene un signo más en el lado izquierdo, puede moverse para tener un signo menos en el lado derecho.

$x + 3 = 5$ ⇔

$x = 5 - 3$ ⇔

$x = 2$

que es más rápido.

10.

$\frac{2}{x} = 4$ y $x \neq 0$

Aquí debemos agregar que x no puede ser 0 - ya que no podemos dividir por cero. El signo $\neq$ significa ”no igual a” o ”diferente a”.

Rara vez se menciona en el texto del problema que $x \neq 0$, por lo que tenemos que averiguarlo nosotros mismos. Es particularmente importante, si nuestro cálculo posterior produce x igual a 0. Eso, no se puede usar, y no habrá "solución".

Aquí, sin embargo, no hay problema

$2 = 4 \cdot x$ ⇔

$x = \frac{2}{4}$ ⇔

$x = \frac{1}{2}$

11.

Finalmente una ecuación con muchas operaciones.

$\frac{x}{3} - 2x + 4 - \frac{2}{3} = 6 + \frac{6}{5} - x$

recogemos x en el lado izquierdo y números en el lado derecho

$\frac{x}{3}$ - 2x + x = 6 + $\frac{6}{5}$ - 4 + $\frac{2}{3}$

reducción

$\frac{x}{3}$ - x = 2 + $\frac{6}{5}$ + $\frac{2}{3}$

encontrar denominadores comunes

$\frac{x}{3} - \frac{3x}{3} = \frac{15 \cdot 2}{15} + \frac{3 \cdot 6}{3 \cdot 5} + \frac{5 \cdot 2}{5 \cdot 3}$ ⇔

$\frac{x-3x}{3} = \frac{30+18+10}{15}$ ⇔

$\frac{-2x}{3} = \frac{58}{15}$ ⇔

15 · (-2x) = 3 · 58 ⇔

-30x = 174 ⇔

x = $\frac{174}{-30}$ ⇔

x = - $\frac{87}{15}$ cual es la respuesta precisa. O

x = -5,8 como un número decimal, que aquí suma.

Ecuaciones de segundo grado

Cuando la incógnita o variable (aquí llamada x) se eleva al cuadrado, tenemos una ecuación de segundo grado. Por ejemplo

$x^2 - x = 0$

o

$3x^2 - x = -3x + 1$

Si reorganizamos así

$3x^2 + 2x - 1 = 0$

y usa letras en lugar de números

$ax^2 + bx + c = 0$

podemos resolver para x usando esta fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A veces podemos encontrar una forma más rápida, pero esta fórmula siempre funciona.

Ejemplos

Con nuestras cifras el cálculo es

$3x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{6} \quad \Leftrightarrow$$

$x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ y $x = \frac{-6}{6} = -1$

dando dos soluciones: $\frac{1}{3}$ y -1

Eso es nuevo, pero podemos insertar los dos valores en la ecuación original para encontrar que es verdadero.

Primero insertamos $\frac{1}{3}$ que hace

$3(\frac{1}{3})^2 + 2(\frac{1}{3}) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$3(\frac{1}{9}) + 2(\frac{1}{3}) - \frac{3}{3} = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{3}{9} + \frac{2}{3} - \frac{3}{3} = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{3}{3} = 0 \quad \Leftrightarrow$

$0 = 0$

cual es verdad

Luego insertamos -1 que representa

$3(-1)^2 + 2(-1) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$3 \cdot 1 + 2(-1) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$3 - 2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$0 = 0$

y eso es cierto también. Entonces sí, tenemos dos respuestas válidas, a valores de x, dos soluciones. También decimos que la ecuación tiene dos “raíces”.

Si por ejemplo encontramos

2 = 0

claramente es "falso" y, por lo tanto, el número que probamos no es una raíz, lo que significa que no cumple la ecuación.

Prueba

La mayoría de las personas solo usan la fórmula de la solución, pero aquí se presenta que es correcta. En realidad, la prueba es bastante complicada:

Hemos arreglado la ecuación de segundo grado, para que se vea de esta manera:

$4a\,(ax^2 + bx + c) = 0 \quad \Leftrightarrow$

multiplica 4a entre paréntesis

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \quad \Leftrightarrow$

agregue b^2 en cualquier lado

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow$

mover 4ac

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \quad \Leftrightarrow$

Use una de las reglas cuadradas en el lado izquierdo

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \quad \Leftrightarrow$

calcular la raíz cuadrada en cada lado.

Aquí, sin embargo, necesitamos interferir: si miramos el lado izquierdo (2ax + b) puede originarse a partir de un número negativo, que se convierte en positivo cuando se eleva al cuadrado (menos por menos da más). Eso no se ve, entonces tenemos que decir que (2ax + b) puede ser negativo o positivo. Escribimos ± y lo movemos al lado derecho de la ecuación. Eso está permitido ya que el lado izquierdo es igual al lado derecho:

2ax + b = $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ ⇔

mover b

2ax = -b $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ ⇔

dividir por 2a a cada lado

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y se demuestra la fórmula.

Más teoría

Si volvemos a mirar la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

podemos centrarnos en la entidad de raíz cuadrada

$$b^2 - 4ac$$

y llámalo *el discriminante*, d

d = $b^2 - 4ac$

el discriminante significa "el que hace la diferencia". ¿Qué diferencia? La diferencia que muestra si la ecuación de segundo grado tiene dos, una o ninguna solución:

d = dos soluciones positivas (dos raíces)

d = 0 una solución (una raíz)

d = negativo sin solución (sin raíz)

no podemos calcular la raíz cuadrada de un número negativo. "sin solución" en realidad tiene un significado geométrico, que veremos más adelante en el capítulo sobre la parábola.

Ejemplo

Si la ecuación de segundo grado no tiene una parte constante (no c), podemos usar la solución cero:

$4x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(4x - 1) = 0$

donde x tiene que ser 0, o el paréntesis tiene que ser 0. =>
$x = 0$ o $x = \frac{1}{4}$

Ecuaciones de grado superior

Para ecuaciones de primer grado, podemos tener hasta una solución.
Para ecuaciones de segundo grado, podemos tener hasta dos soluciones.
Para ecuaciones de tercer grado, podemos tener hasta tres soluciones.
Para ecuaciones de cuarto grado, podemos tener hasta cuatro soluciones.
etcétera.

En las ecuaciones de primer grado, resolvemos para x haciendo que se mantenga en el lado izquierdo de la ecuación.

En las ecuaciones de segundo grado organizamos y usamos la fórmula para encontrar x.

En ecuaciones de tercer grado y superiores, adivinamos una solución, la insertamos en la ecuación y vemos si es correcta. Puede parecer extraño que podamos adivinar, pero eso está bien en matemáticas, si se prueban los valores adivinados.

A menudo usaremos CAS. La electrónica en CAS hace lo mismo que nosotros. Hace una conjetura y la prueba, verifica qué tan grande es el error, hace una conjetura nueva y más cercana, y así sucesivamente. El método se llama iteración (repetición). CAS lo hace rápidamente, pero en general también podemos acercarnos al resultado después de 3 o 4 intentos.

Ejemplos

$x^3 = 27$

adivinamos $x = 3$ y hacemos una prueba

$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

Cual es verdad. Entonces - 3 es una solución.
¿Qué pasa con -3. hacemos una prueba

$(-3)^3 = -3 \cdot -3 \cdot -3 = -27$

Lo cual es falso. -3 no es una solución.

No podemos encontrar otras raíces. Los números numéricos mayores que 3 nunca pueden ser una solución, y es fácil probar números entre -3 y 3. Entonces, en este caso estamos seguros de que no hay otras raíces que no sean 3.

Pero que pasa:

$x^3 – x^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow$

Tal vez se vuelve más claro si escribimos

$x^3 = x^2$
Suponemos 0, sí. Suponemos 3, no. Suponemos 2, no. Suponemos 1, sí. Tal vez -1:

$(-1)^3 = 1^3$

$-1 = 1$

lo cual es falso, entonces, no.

En teoría, son posibles tres raíces, pero es fácil ver que las raíces mayores que el número 1 ($|1|$) no son posibles. Además, es fácil ver que las raíces más pequeñas que el número 1 ($|1|$) no son posibles. Solo $x = 0$ y $x = 1$ son raíces.

Dos ecuaciones con dos incógnitas

Si tenemos dos incógnitas, necesitamos dos ecuaciones diferentes.

Si tenemos tres incógnitas, necesitamos tres ecuaciones diferentes.

Y así sucesivamente.

Hay dos métodos para resolver dos ecuaciones con dos incógnitas.

El método más lógico es aislar en una ecuación e insertar en la otra. Este método es ampliamente utilizado para todos los sujetos.

El método más rápido en casos simples es el método de coeficientes iguales.

Ejemplos

Supongamos que estamos en un laboratorio y midamos algo de dos maneras diferentes dándonos dos ecuaciones diferentes. Aquí llamamos a las incógnitas x e y, pero pueden representar presión y temperatura, o tiempo y número de bacterias, o algo más. Y pretendemos que hemos encontrado estas dos relaciones:

$x + y = 4$ y $2x = 2y + 2$

1.

$x + y = 4$ y $2x = 2y + 2$

Aislamos x en la primera ecuación e insertamos en la otra

$x = 4 - y$ insertado $2(4 - y) = 2y + 2$

Adelante con la ecuación 2

$2(4 - y) = 2y + 2 \qquad \Leftrightarrow$

$8 - 2y = 2y + 2 \qquad \Leftrightarrow$

$6 = 4y \qquad \Leftrightarrow$

$y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

que insertamos en una de las ecuaciones originales, sin importar cuál. Elegimos insertar en la ecuación 1:

$x + \frac{3}{2} = 4 \qquad \Leftrightarrow$

$x + \frac{3}{2} = \frac{8}{2}$

$x = \frac{5}{2}$

Respuesta completa $x = \frac{5}{2}$ y $y = \frac{3}{2}$.

2.

El mismo problema resuelto con el método de coeficientes iguales:

$x + y = 4$

$2x = 2y + 2$

Aquí es más fácil si escribimos x encima de x e y encima de y:

$x + y = 4$

$2x - 2y = 2$

Ahora elegimos coeficientes iguales antes de x, así que multiplicamos la ecuación uno por 2:

$2x + 2y = 8$

$2x - 2y = 2$

Entonces decimos ecuación 1 menos ecuación 2.

$2x - 2x$ da cero, $2y - (-2y)$ da $4y$, $8 - 2$ da 6:

$4y = 6 \quad \Leftrightarrow$

$y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

que se inserta en una de las ecuaciones originales. Elegimos la ecuación 2:

$2x = 2 \cdot \frac{3}{2} + 2 \quad \Leftrightarrow$

$2x = 5 \quad \Leftrightarrow$

$x = \frac{5}{2}$

Respuesta completa $x = \frac{5}{2}$ y $y = \frac{3}{2}$

Lo mismo que antes, por supuesto.

¿Por qué se permite restar una ecuación de la otra? Porque podemos restar la misma entidad a cada lado. En el lado izquierdo restamos $(2x - 2y)$, y debemos hacer lo mismo en el lado derecho, solo elegimos restar lo que $(2x - 2y)$ es igual a, es decir, 2.

Funciones y proporcionalidad

Una función es un término técnico utilizado cuando algo depende de otra cosa. Una función se escribe como una ecuación y el flujo de la función se puede mostrar en un diagrama. Más sobre esto en la Parte 2.

Por ejemplo, mi salario depende de cuántas horas trabajo.
Podemos escribirlo en una ecuación:

salario = tarifa por hora veces número de horas de trabajo

En otras palabras, mi salario es una función de mi tarifa por hora y cuántas horas trabajo.

O de la física, la segunda ley de Newton:

Fuerza = masa por aceleración

con símbolos

$F = m \cdot a$

La fuerza depende de la masa y la aceleración. O: La fuerza es una función de la masa y la aceleración.

Veamos de nuevo la función/ley de la naturaleza, la Segunda Ley de Newton:

$F = m \cdot a \quad (1) \qquad \Leftrightarrow \qquad a = F \cdot \frac{1}{m} \quad (2)$

La expresión (1) muestra que si la masa es dos veces más grande, la fuerza será dos veces mayor. Afirmamos que F y m son directamente proporcionales. Además, F y a también son directamente proporcionales.

(Entonces, si tanto m como a se duplican, F será cuatro veces más grande).

La expresión (2) muestra que si la masa se duplica, la aceleración será la mitad. Afirmamos que a y m son inversamente proporcionales.

Intervalos y desigualdades

Necesitamos una mesa de trabajo larga que debe ser más larga que 3 metros y más corta que 4 metros. Si es exactamente 3 metros, es un poco demasiado corto, y si es exactamente 4 metros, es un poco demasiado largo. Necesitamos una tabla en el intervalo

]3;4[(sabemos que está en metros, pero no lo escribimos).

3 no está incluido, tampoco 4. Un intervalo abierto.

Si se pueden usar 3 y 4 metros, podemos usar una tabla en el intervalo

[3;4]

3 está incluido, al igual que 4. Un intervalo cerrado.

Si 3 metros es utilizable pero 4 metros son un poco demasiado largos

[3;4[

3 está incluido, pero 4 no está incluido. Un intervalo semiabierto.

También se puede escribir como una doble desigualdad:

$3 <$ longitud < 4 que corresponde al intervalo]3;4[

$3 \leq$ longitud ≤ 4 que corresponde al intervalo [3;4]

$3 \leq$ longitud < 4 que corresponde al intervalo [3;4[

o se muestra en una figura pequeña

○————○ el intervalo abierto

•————• el intervalo serrado

•————○ el intervalo semiabierto

3 4

Ejemplos

La forma más fácil es escribir un intervalo o hacer un pequeño boceto.

Las desigualdades no son tan comunes, pero veamos qué significan los signos:

$<$ significa menor que

$\leq$ significa menor o igual a

$>$ significa más grande que

$\geq$ significa mayor o igual que

La parte pequeña se coloca por el punto del signo. La gran parte se coloca en la "boca" del signo**.**

En lugar de escribir

$3 < \text{longitud} < 4$

Podemos escribir

$4 > \text{longitude} > 3$

Si x es longitud y los límites son a y b, escribimos

$a < x < b$ a doble desigualdad

que rara vez usamos para cálculos adicionales. Es más cómodo dividirse en dos desigualdades únicas

$a < x$ y $x < b$

y hacer cálculos en cada uno.

Podemos:

Agregue lo mismo en cada lado

Resta lo mismo en cada lado

multiplicar por el mismo número positivo en cada lado

Dividir por el mismo número positivo en cada lado

Si multiplicamos o dividimos por el mismo número negativo en cada lado, debemos darle la vuelta al signo de desigualdad porque ponemos las cosas "al revés". Un ejemplo:

$a < x$ a es pequeño y x es grande

si multiplicamos por ejemplo -2 a cada lado, debemos girar el signo:

$-2a > (-2)x$

Porque ahora $-2a$ es grande y $-2x$ pequeño.

Si volvemos al ejemplo con la tabla y solo consideramos el límite bajo:

$3 < \text{longitud}$

No tiene sentido agregar, por ejemplo, 2 a cada lado:

$3 + 2 < \text{longitud} + 2$

Sin embargo, está permitido como herramienta de cálculo, y más adelante lo veremos utilizado de esa manera.

Números imaginarios, brevemente

Los números imaginarios no son reales, pero tienen que ser imaginados.

$\sqrt{64} = 8$ es bien conocido

$\sqrt{-64}$ No se puede hacer, pero si lo cambiamos un poco:

$\sqrt{-64} = \sqrt{(-1) \cdot 64} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{64}$ Eso está bastante bien

$\sqrt{(-1)}$ nombramos I, esa también está permitida, y luego tenemos

$\mathrm{I} \cdot \sqrt{64} = \mathrm{I} \cdot 8$

Entonces $\sqrt{-64} = \mathrm{I} \cdot 8$

que nos permite continuar como si nada hubiera pasado; Sólo que ahora, estamos en el mundo de los números imaginarios. Y de repente, por ejemplo, tenemos una solución imaginaria a una ecuación de segundo grado que no tenía "solución".

CAS obtiene soluciones reales e imaginaries (CAS = Computer Aided Solve = Resolución asistida por computadora). La mayoría de los CAS (típicamente calculadoras) están programados para dar respuestas reales solamente. Sin embargo, algunos programas también dan una respuesta imaginaria, por ejemplo $\mathrm{I} \cdot 8$. Eso puede evitarse pidiendo "Dominio real" o similar.

Ejemplo

Encontremos las raíces imaginarias a una ecuación de segundo grado que no tiene raíces reales:

$x^2 + 2x + 5 = 0 \qquad \Leftrightarrow$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$ $\Leftrightarrow$

discriminante negativo, sin raíces reales

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{-2 \pm 4\sqrt{-1}}{2}$ $\Leftrightarrow$

x = $-1 + 2\sqrt{-1}$ y x = $-1 - 2\sqrt{-1}$ o

x = $-1 + 2$ I y x = $-1 - 2$ I

por lo tanto, dos raíces imaginarias.

El uso combinado de números reales y números imaginarios se llama números complejos. Los números complejos pueden servir como una herramienta matemática y se describirán de nuevo al final de este libro.

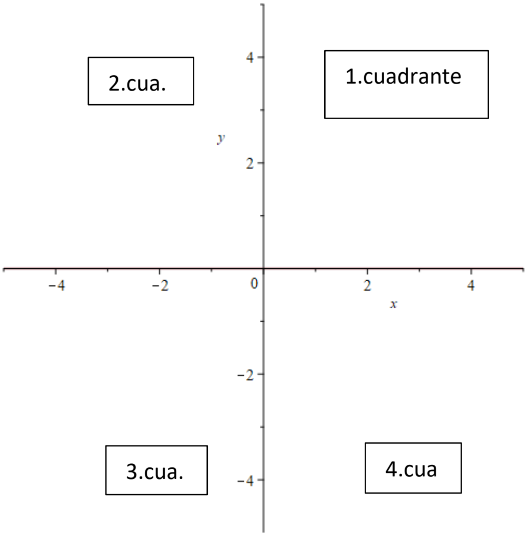
Parte 2. El sistema de coordenadas en el plano (2D) y funciones

El sistema de coordenadas y la distancia.

Vivimos en un mundo de tres dimensiones, lo llamamos espacio y consta de largo, ancho y alto.

Si trabajamos en dos dimensiones, lo llamamos plano, y consta de dos direcciones, por ejemplo, horizontal y vertical. También podemos llamar a las direcciones para el eje. Luego tenemos *el primer eje y el segundo eje*; o en términos más técnicos: La *abscisa y la ordenada*, ambas del latín. Abscissa significa "fuera (ab) de aquí (cis)", que puede representarse parándose en el punto de partida y mirando horizontalmente al horizonte. La ordenada significa lo ordinario, que es vertical (todas las demás direcciones no serían ordinarias).

En matemáticas, a menudo usamos las palabras eje x y eje y,



pero pueden llamarse otras cosas. En física, el primer eje podría ser t para el tiempo y el segundo eje podría ser v para la velocidad (velox en latín). En economía el primer eje pueden ser meses y el segundo eje pueden ser costos. Etcétera.

El eje divide el plano en cuatro cuartos llamados los cuatro cuadrantes. El primer cuadrante es donde x e y son positivos (ambos son +). Luego giramos en sentido contrario a las agujas del reloj hasta el 2. 3. y 4. cuadrante.

Los ejes forman un ángulo recto y se cortan en un punto de partida común, denotado así: (x,y) = (0,0) . El punto de partida se llama Origo (griego antiguo) o simplemente O.

En el eje elegimos una escala adecuada para la tarea. Por lo general, elegimos la misma escala para los dos ejes, pero eso depende de lo que vayamos a graficar. Si las escalas son iguales, usamos el término técnico: equidistantes.

En total se le llama sistema de coordenadas (co(con) sistema de ordenadas(el ordinario)). Se está utilizando en todas partes.

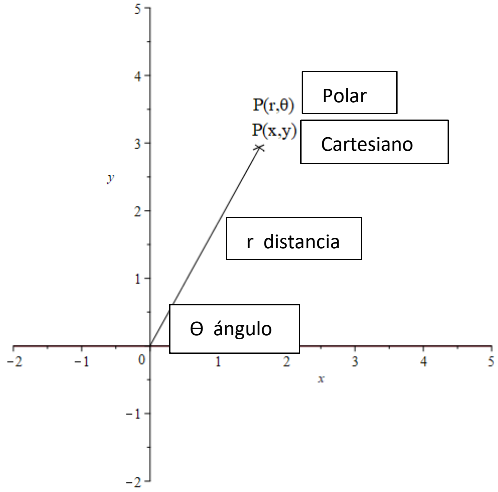
Por ejemplo, el sistema de coordenadas se usa para mostrar cómo varía una función: la función de línea recta, la función de parábola, la función de sinus, etc.

Consideramos x primero, y y como lo que sigue. Por lo tanto, los valores de x de una función también se denominan *dominio*, y los valores de y se denominan *rango* (a veces: la cantidad de valor). Las denotaciones no se usan comúnmente porque las palabras dominio y rango son lo suficientemente breves y muy informativas, pero si llamamos a la función, f, las denotaciones son: Dominio, D(f) - y Rango, G(f). (R(f) para rango hubiera sido la opción lógica, pero R se usa para otra cosa).

La demanda de una función es que para cada valor de x solo haya un valor de y. Por lo tanto, el flujo de una función en un sistema de coordenadas no puede ir y venir, ya que eso implicaría más valores de y para un valor de x. Si es necesario, hablamos de una función vectorial o una función de parámetro que se discutirá en la Parte 4.

El sistema de coordenadas rectangulares ordinario también se llama sistema de coordenadas cartesianas en honor al matemático Descartes.

Las coordenadas también se pueden indicar mediante coordenadas polares: (distancia desde Origo, ángulo con el eje +x). Ver la figura:



Consideraremos las coordenadas polares un poco más al final del libro.

Ahora se trata de coordenadas normales (cartesianas).

Distancia

A continuación se muestra un sistema de coordenadas con tres puntos llamados A, B y C con las coordenadas: A(2,3) B(5,4) C(1,-3).

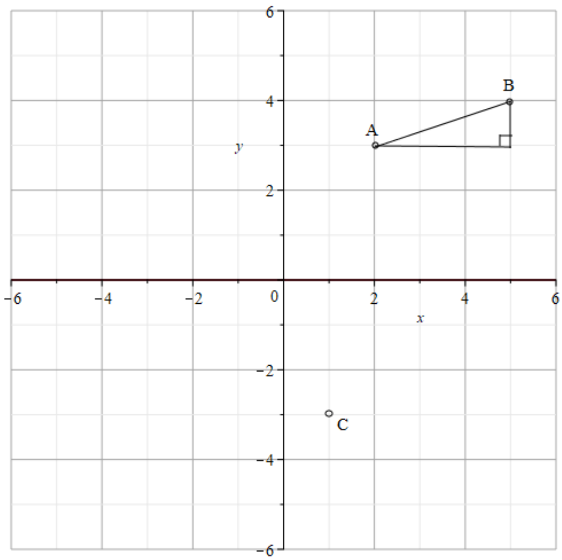
A y B están en el primer cuadrante, mientras que C está en el cuarto cuadrante.

Denotamos la distancia entre A y B, d, y la encontramos usando una de las fórmulas más antiguas e importantes, Pitágoras, que es válida para triángulos rectangulares (90º). Dibujamos un triángulo auxiliar y vemos que el lado en la dirección x (horizontal) tiene una longitud de 3, mientras que el lado en la dirección y tiene una longitud de 1.

En otras palabras, encontramos las longitudes diciendo

valor x para B menos valor x para A = $x_B - x_A = 5 - 2 = 3$

valor de y para B menos valor de y para A = $y_B - y_A = 4 - 3 = 1$



Entonces Pitágoras afirma:

$d^2 = 3^2 + 1^2 \quad \Leftrightarrow$

$d = \sqrt{3 \cdot 3 + 1 \cdot 1} \quad \Leftrightarrow$

$d = \sqrt{10}$ por lo tanto, la distancia es $\sqrt{10}$

También podemos denotar la distancia de A a B como |AB|. El paréntesis recto significa:

longitud = valor numérico = magnitud del número

En letras obtenemos *la fórmula de la distancia*:

$|AB|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

También podemos calcular la raíz cuadrada en ambos lados; algunas tablas lo hacen.
La fórmula de la distancia es solo Pitágoras de otra manera.

Ejemplos
1.
Arriba encontramos $|AB| = \sqrt{10}$ diciendo B menos A.
Obtenemos la misma distancia si encontramos |BA| diciendo A menos B:

$|BA|^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \quad \Rightarrow$

$|BA|^2 = (2 - 5)^2 + (3 - 4)^2 \quad \Leftrightarrow$

$|BA|^2 = (-3)^2 + (-1)^2 \quad \Leftrightarrow$

$|BA|^2 = 9 + 1 \quad \Leftrightarrow$

$|BA| = \sqrt{10}$

Seguramente, la distancia de A a B es la misma que la distancia de B a A.

2.
También encontraremos la distancia de C a A.

Para mantener las cosas en orden, decimos "fin menos comienzo". Para |CA| eso es A menos C.

$|CA|^2 = (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 \qquad \Rightarrow$

$|CA|^2 = (2 - 1)^2 + (3 - (-3))^2 \qquad \Leftrightarrow$

$|CA|^2 = (1)^2 + (6)^2 \qquad \Leftrightarrow$

$|CA|^2 = 1 + 36 \qquad \Leftrightarrow$

$|CA| = \sqrt{37}$

Para |AC| es C menos A:

$|AC|^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 \qquad \Rightarrow$

$|AC|^2 = (1 - 2)^2 + (-3 - 3)^2 \qquad \Leftrightarrow$

$|CA|^2 = (-1)^2 + (-6)^2 \qquad \Leftrightarrow$

$|CA|^2 = 1 + 36 \qquad \Leftrightarrow$

$|CA| = \sqrt{37}$

Misma respuesta.

El signo => significa *consecuencia lógica*. Lo usamos cuando solo podemos avanzar en el cálculo, pero no retroceder. Eso pasa cuando introducimos algo de fuera. Aquí introducimos nuestros números en la fórmula.

Ahora consideraremos funciones importantes, sus ecuaciones y sus curvas en sistemas de coordenadas (diagramas).

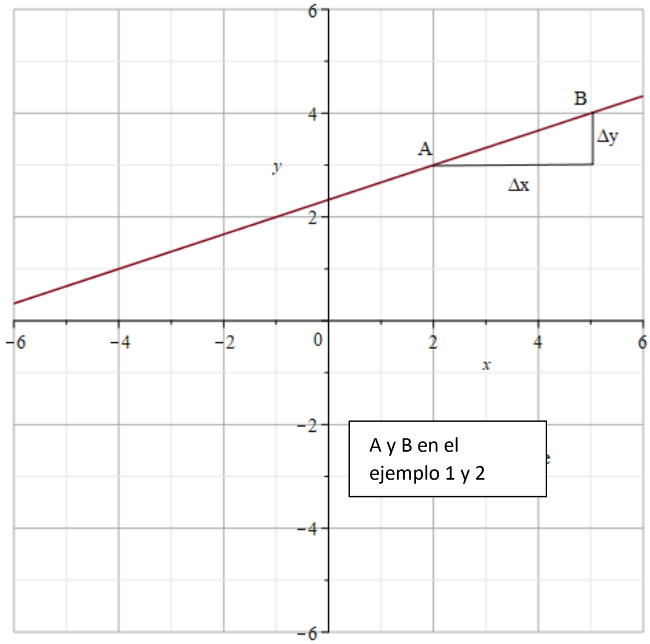
Ponemos muchos esfuerzos en la línea recta, porque mucho dentro de la física, la biología, la economía, el diseño, etc., se describe y explica con líneas rectas. Además, sentamos las bases para considerar otras funciones.

La recta (La función lineal)

Escribimos la ecuación para la función lineal de dos maneras:

1.

Usemos la figura del capítulo anterior y dibujemos una línea recta a través de los puntos A y B:



Además, usaremos el triángulo auxiliar nuevamente: Usando letras, el lado en la dirección x (horizontal) tiene la longitud:

$x_B - x_A = \Delta x$

y el lado en la dirección y (vertical) tiene la longitud:

$y_B - y_A = \Delta y$

Usamos la letra griega Δ (delta) cuando describimos un cambio o diferencia. Aquí está la diferencia en los valores de x y los valores de y de los puntos. Fin menos comienzo. (En física Δt puede ser una diferencia de temperatura, en economía ΔI puede ser una diferencia de ingresos, etc.). La palabra técnica para Δ es "cambio o diferencia", que también puede ser negativa.

Ahora estamos interesados en un número que nos dice acerca de la pendiente de una línea. La recta tiene una gran pendiente si Δy es grande en comparación con Δx. La recta tiene una pequeña pendiente si Δy es pequeño en comparación con Δx.
Esto se muestra mediante la fracción $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ que se denomina pendiente y generalmente se denota como a.

Entonces, definimos:

pendiente de una linea $= a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{diferencia\ in\ y}{diferencia\ in\ x}$

Seguimos calculando:

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \Delta x = \Delta y \quad \Leftrightarrow \quad \Delta y = a \cdot \Delta x \quad \Leftrightarrow$

$y_B - y_A = a \cdot (x_B - x_A) \quad \Leftrightarrow$

$y_B = a \cdot (x_B - x_A) + y_A$

que es la ecuación de nuestra recta. Ahora, nombramos los puntos A y B. Pueden tener otros nombres, y muchas tablas dicen:

$y = a \cdot (x - x_1) + y_1$

que es la ecuación para casi todas las líneas rectas (excepto para las líneas verticales).
a es la pendiente y (x_1, y_1) es un punto conocido en la recta. Si los conocemos, podemos escribir la ecuación para cierta línea y dibujarla en un sistema de coordenadas.

Ese fue el método 1.

2.
Y ahora el método 2, en el que continuamos los cálculos usando la ecuación ya derivada para la línea recta:

$$y = a\cdot(x - x_1) + y_1$$

donde (x_1, y_1) es un punto conocido en la línea. Elijamos el punto (0, b) que está en el eje y con y = b. Este punto se inserta y tenemos:

$$y = ax + b$$

que es la ecuación más común para casi todas las líneas rectas (excepto las líneas verticales).

a es la pendiente y b es donde la línea interseca al eje y. Si conocemos a y b, podemos escribir la ecuación para cierta línea y dibujarla en un sistema de coordenadas.

Ejemplos

1.

Encontraremos la ecuación para la recta que pasa por los puntos A(2,3) y B(5,4) usando el método *1*:

$$y = a\cdot(x - x_1) + y_1$$

Nosotras debemos encontrar a, x_1 y x_2

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-3}{5-2} = \frac{1}{3}$

Elegimos insertar las coordenadas del punto A: $(x_1, y_1) = (2,3)$

$y = \frac{1}{3}(x - 2) + 3 \quad \Leftrightarrow$ reducción

$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + 3 \quad \Leftrightarrow$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{9}{3} \quad \Leftrightarrow$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

También podríamos haber insertado las coordenadas del punto B(5,4). El punto B también está en la línea y, por lo tanto, también cumplirá la ecuación:

$y = \frac{1}{3}(x - 5) + 4 \quad \Leftrightarrow$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

misma respuesta por supuesto. Si supiéramos las coordenadas de otros puntos en la línea, daría la misma ecuación.

Lo que encontramos es la ecuación para "nuestra" línea.

2.

Ahora encontraremos la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(2,3) y B(5,4) usando el método 2:

$y = a \cdot x + b$

a es

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-3}{5-2} = \frac{1}{3}$

y b se encuentra insertando A o B (mismo resultado) en la ecuación. Elegimos A:

$3 = \frac{1}{3} \cdot 2 + b \qquad \Leftrightarrow$

$b = \frac{7}{3}$

a y b insertados en la ecuación

$y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

nos da la ecuación para "nuestra" línea. Misma respuesta.

Además, veremos en qué se convierte y para x = 3

$y = \frac{1}{3}3 + \frac{7}{3} = \frac{10}{3}$

y para $x = 17$

$y = \frac{1}{3}17 + \frac{7}{3} = 8$

Ahora sabemos que $(3, \frac{10}{3})$ y (17,8) son puntos de nuestra recta.

3.

Otro ejemplo que utiliza el método 2, esta vez sin números:

Mi salario (y) es igual a mi tarifa por hora (a) multiplicada por la cantidad de horas (x) que trabajo (a y x son directamente proporcionales).

salario = tarifa por hora · número de horas de trabajo =>

$y = a \cdot x$

Si además recibo una cantidad fija independientemente de las horas que trabaje, se puede escribir:

salario = tarifa por hora · número de horas de trabajo + cantidad fija =>

$y = a \cdot x + b$

donde b es la cantidad fija.

4.

Dos rectas se llaman l y m. ¿Se cruzan? Si es así, ¿en qué coordenadas?

l: $y = -x + 3$
m: $y = 2x$

Primero notamos que su pendiente es diferente, por lo que sabemos que se cruzarán en algún lugar. Si las pendientes fueran similares, serían paralelas y nunca se cruzarían.

Se trata de dos ecuaciones con dos incógnitas:
y de l se inserta en m

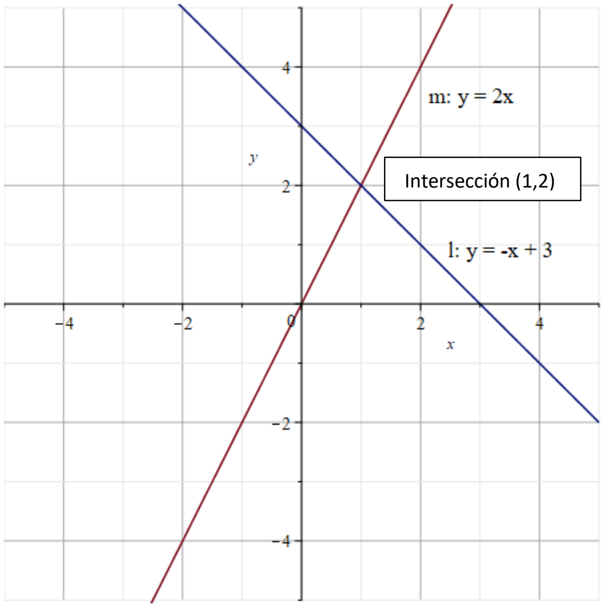
$-x + 3 = 2x \quad \Leftrightarrow$
$-x - 2x = - 3 \quad \Leftrightarrow$
$x = \frac{-3}{-3} = 1$

que se inserta en una de las antiguas ecuaciones, aquí m

$y = 2 \cdot 1 \quad \Leftrightarrow$
$y = 2$

Por tanto, la intersección en (1, 2)

Se muestra en un diagrama (otra palabra para un sistema de coordenadas):



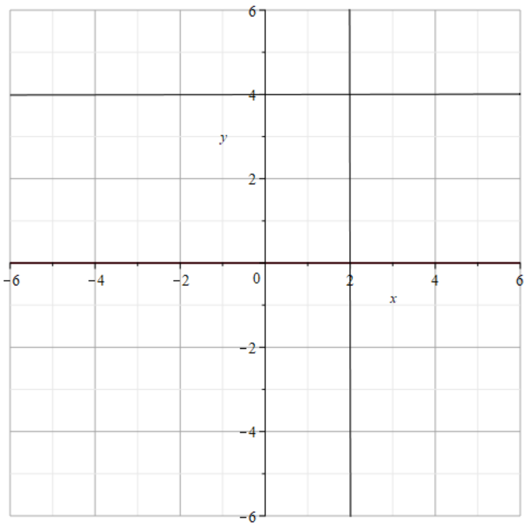
l es decreciente (la pendiente es negativa).

m está aumentando (la pendiente es positiva).

El punto de intersección se lee como (1, 2). Esto se llama solución gráfica y se corresponde con el cálculo.

Más teoría
Una línea continúa interminablemente en ambas direcciones. Un segmento de recta va de un punto a otro. Por ejemplo, el segmento de línea de A a B como se muestra en un capítulo posterior: Distancia.

Hay cuatro líneas rectas especiales:



- Las rectas horizontales con pendiente 0. Aquí se muestra la recta con la ecuación y = 4
  Otra línea horizontal es el propio eje x, con la ecuación y = 0.
- Las rectas verticales con pendiente ∞ (signo que significa infinito). En consecuencia, *no* se determinan con las ecuaciones habituales. Aquí se muestra la recta con la ecuación x = 2
  Otra línea vertical es el propio eje y, con la ecuación x = 0.

Por cierto, se puede leer que las rectas y = 4 y x = 2 se cortan en el punto (2,4)

Excepto por las líneas especiales que acabamos de mencionar, las pendientes de dos líneas en ángulo recto (= ortogonales) multiplicadas darán -1. Si las líneas se denominan l y m, se aplica lo siguiente:

$a_l \cdot a_m = -1$

Por lo tanto, podemos ver si dos rectas son ortogonales multiplicando sus pendientes y ver si da -1. Por ejemplo, podemos comprobar dos líneas en un edificio para ver si las esquinas de algunas paredes tienen un ángulo de 90°.

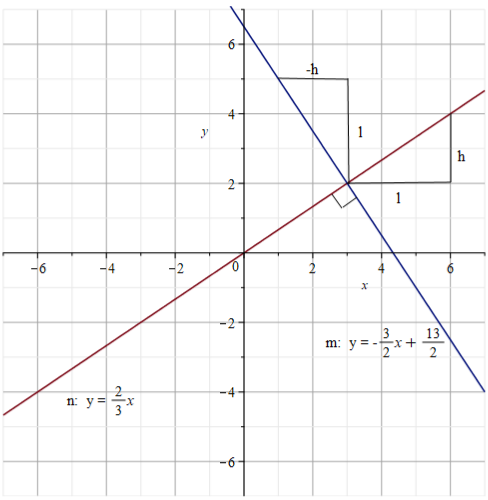
Prueba

El diagrama muestra dos líneas ortogonales llamadas n y m.
También se muestran las ecuaciones.
n puede girar 90° alrededor del punto de intersección y convertirse en m, y sigue el triángulo auxiliar.
La pendiente de n dice: $a_n = \frac{2}{3}$
La pendiente de n dice: $a_m = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$

multiplicado da:
$a_n \cdot a_m = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{-2}\right) = -1$ mostrado con números

o en letras:

$a_n \cdot a_m = \frac{h}{l} \cdot \left(\frac{l}{-h}\right) = -1$ probado con letras



La parábola

El término técnico para una parábola es un "polinomio de segundo grado". Segundo grado porque x se eleva a la potencia de 2. "Poli" significa varios y "nomial" significa parte.

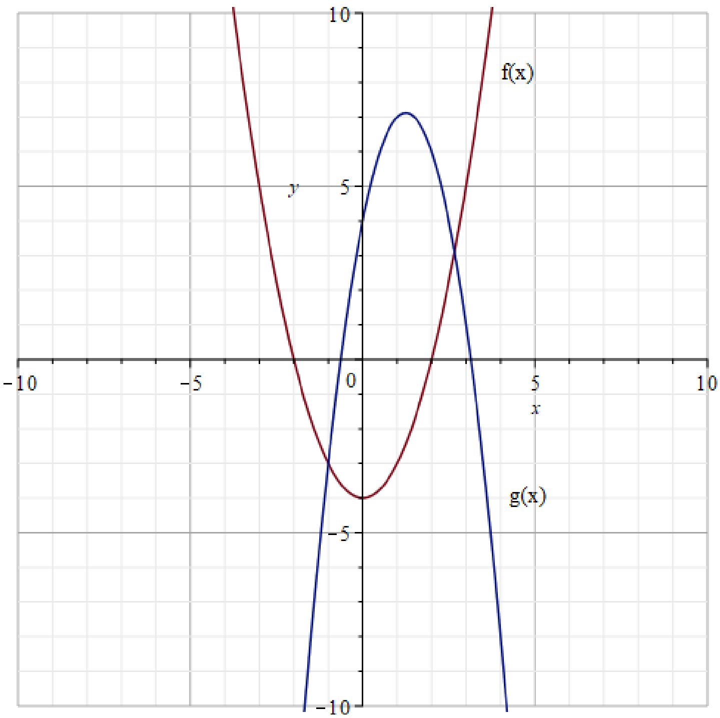
Tenemos apodos para las figuras que usamos, y esta hermosa curva se llama parábola, que significa comparación, tal vez porque la figura es simétrica cuando comparamos las dos mitades.

El diagrama muestra dos parábolas. uno con la ecuacion

$f(x) = x^2 - 4$

y otro con la ecuacion

$g(x) = -2x^2 + 5x + 4$



 ISBN 978-87-975307-2-6

Para ambas parábolas, y es una función de x (y depende de x), pero ambas no pueden llamarse y, por lo que a la primera la llamamos f(x) (decimos f de x), y a la otra se la llama g(x).

La ecuación para todas las parábolas es:

$y = ax^2 + bx + c$ o
$p(x) = ax^2 + bx + c$ p para polinomio.

Una a grande significa que la parábola es estrecha. Una a pequeña significa que la parábola es ancha.

Una a positiva significa que las ramas miran hacia arriba. Una a negativa significa que las ramas miran hacia abajo.

b mueve la parábola en la dirección xey, mientras que c solo la mueve en la dirección y.

Cuando resolvimos ecuaciones de segundo grado, teníamos:

$ax^2 + bx + c = 0$

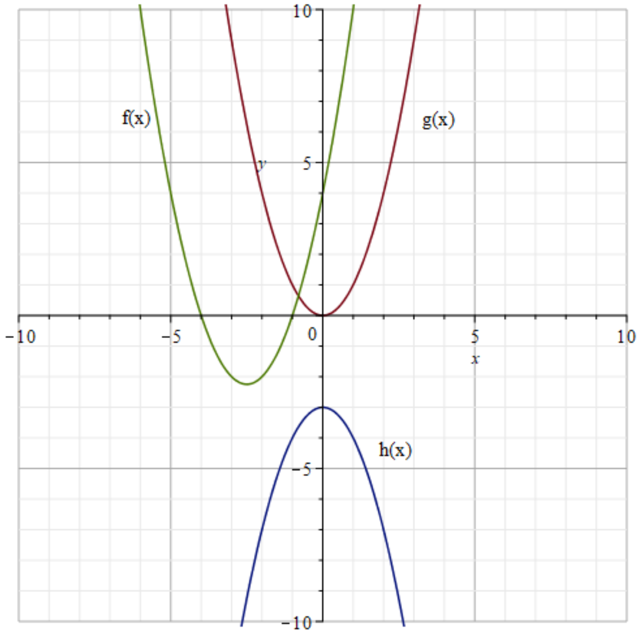
Ahora vi usa la ecuación de segundo grado para una parábola y, por lo tanto, 0 debe serlo porque y = 0.

y es 0 en el eje x. Por lo tanto, para una parábola, la solución de una ecuación de segundo grado debe estar donde la parábola intersecta el eje x.

A menudo, hay dos raíces para x en los puntos donde las dos ramas de la parábola intersectan el eje x (como f(x) en el siguiente diagrama).

Si el discriminante es cero, solo hay una raíz, que es el pico de la parábola que toca el eje x (como g(x) en el diagrama).

Ninguna solución significa que la parábola no se cruza ni toca el eje x (como h(x) en el diagrama).



Entonces, cuando vi usa la ecuación de segundo grado para la geometría de la parábola, "sin solución" tiene un significado.

La Parábola tiene un vértice (“punto de inflexión”) con las coordenadas:

$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$ La que demostraremos:

El vértice de una parábola tiene solo un valor de x por un valor de y. El vértice de una parábola con vértice en el eje x tiene el valor y de 0. Por lo tanto, el discriminante es 0 y el valor x se convierte en:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ => $x = \frac{-b}{2a}$ para d = 0

Si movemos la parábola hacia arriba o hacia abajo, el valor de y cambiará, mientras que el valor de x permanecerá

$x = \frac{-b}{2a}$

que insertamos en la ecuación de la parábola para encontrar la coordenada y:

$y = ax^2 + bx + c$ $\quad\Rightarrow$

$y = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$ $\quad\Leftrightarrow$

$y = \frac{abb}{4aa} - \frac{bb}{2a} + c$ $\quad\Leftrightarrow$

$y = \frac{bb}{4a} - \frac{2bb}{4a} + c$

$y = -\frac{bb}{4a} + c$ $\quad\Leftrightarrow$

$y = \frac{-bb+4ac}{4a}$ $\quad\Leftrightarrow$

$y = \frac{-d}{4a}$

x e y combinados: Vértice ($\frac{-b}{2a}$, $\frac{-d}{4a}$) y la fórmula queda demostrada.

Ejemplos

1.

f(x) en el diagrama que se acaba de mostrar

$f(x) = x^2 + 5x + 4$ o

$y = x^2 + 5x + 4$ aquí debemos recordar que este valor de y es solo para f(x)

¿Dónde se cruza con el eje x?

Eso sucede donde y = 0 que está en el eje x.

Por lo tanto, insertamos 0 para y y resolvemos la ecuación de segundo grado.

$x^2 + 5x + 4 = 0$

usando la fórmula

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ =>

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$ ⇔

$x = \frac{-5 \pm 3}{2}$ ⇔

x = -4 y -1

que corresponde con el diagrama.

¿Dónde se cruza con el eje y?

Eso sucede donde x = 0 que está en el eje y.

Por lo tanto, insertamos 0 para x y resolvemos la ecuación de segundo grado

$y = 0^2 + 5 \cdot 0 + 4$ ⇔
$y = 4$
que corresponde con el diagrama.

Se llama factorización, si queremos sustituir x2 por dos paréntesis por x1. Por ejemplo,
y = x2 + 5x + 4 se puede factorizar para y = (x + 4)(x + 1)
o
y = 2x2 + 10x + 8 cuando se factoriza y = 2(x + 4)(x + 1)
Se hace sacando el factor de ecuaciones, a (aquí 2), fuera del paréntesis, encuentra las raíces y forma el primer paréntesis como: x – $raíz_1$ y el otro como x – $raíz_2$
La factorización se demostrará en la sección: Prueba de factorización de un polinomio de segundo grado.

2.

h(x) en el diagrama que se acaba de mostrar tiene la ecuación

$h(x) = -x^2 - 3$

¿Dónde se cruza con el eje x?
En el eje x y es 0. Aquí: h(x) = 0. Entonces

$-x^2 - 3 = 0 \quad\quad \Leftrightarrow$
$x^2 = -3$

lo cual no es posible, por lo tanto: “no hay solución”. Esto significa que la parábola h(x) no corta al eje x. Se corresponde con lo que vemos en el diagrama.

3.

$h(x) = -x^2 - 3$

¿Dónde está el vértice?

fórmula $\quad \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$

donde $\quad a = -1 \quad\quad b = 0$ (no hay x)

y $\quad d = b^2 - 4ac = 0 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = -12$

que insertado da

$\left(\frac{0}{2 \cdot (-1)}, \frac{-(-12)}{4(-1)}\right) = (0, -3)$

Se corresponde con el diagrama.

4.

Volvamos al diagrama de las parábolas:

$f(x) = x^2 - 4$
$g(x) = -2x^2 + 5x + 4$

¿Dónde se cruzan entre sí?

Se cruzan en un punto (tal vez dos puntos) que cumplen ambas ecuaciones, donde una ecuación es igual a la otra: =>

$f(x) = g(x)$ =>

$x^2 - 4 = -2x^2 + 5x + 4$

que es una ecuación de segundo grado a ordenar y resolver:

$3x^2 - 5x - 8 = 0$

fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ =>

aquí: $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{2 \cdot 3}$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{5 \pm 11}{6}$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{8}{3}$ y -1

Llamamos a las coordenadas x de los puntos de intersección

$x_1 = \frac{8}{3}$ y $x_2 = -1$

Leemos el diagrama para comprobar que corresponde.

Encontramos las coordenadas y insertándolas en una de las ecuaciones de parábola. No importa cuál, porque los puntos de intersección se encuentran en ambas parábolas. Elegimos f(x):

$y_1 = x_1^2 - 4 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 4 = \frac{28}{9}$

$y_2 = x_2^2 - 4 = (-1)^2 - 4 = -3$

Así, los dos puntos de intersección son:

$(\frac{8}{3}, \frac{28}{9})$ y $(-1, -3)$

Lo cual también se corresponde con el diagrama.

Los puntos de intersección para *todas* las curvas se encuentran teniendo:
ecuación para la curva 1 = ecuación para la curva 2

Más sobre la parábola

Muchas leyes de la naturaleza son ecuaciones de segundo grado que pueden representarse como parábolas en un diagrama. Por ejemplo, la fórmula para la energía cinética (energía de movimiento), E_{kin}:

$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ donde m es la masa, v es la velocidad.

En un diagrama v, E_{kin} (v en el primer eje y E_{kin} en el segundo eje) obtendremos la mitad de una parábola. Más sobre esto más adelante.

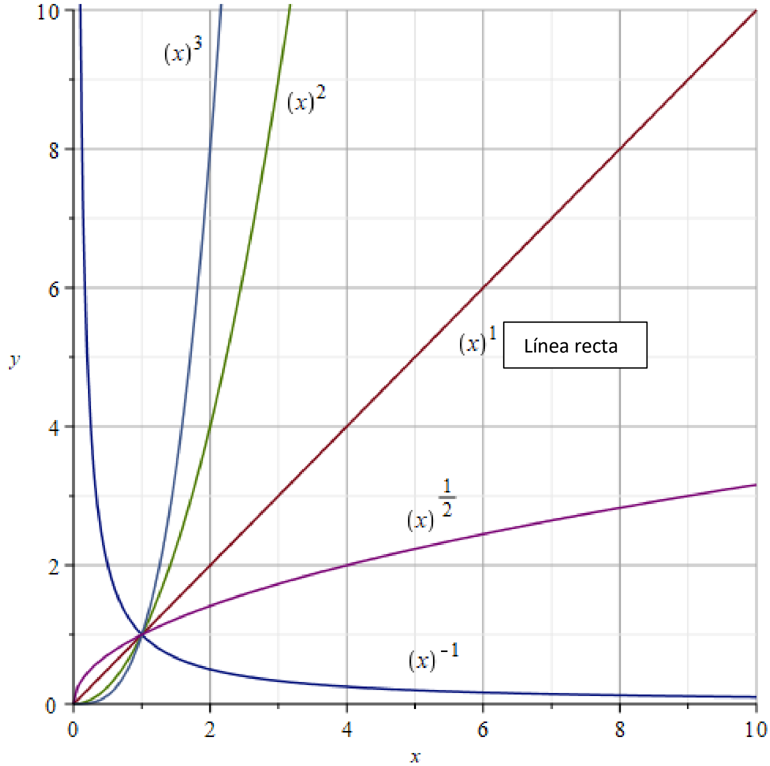
Parábolas para uso técnico: Si se gira una parábola alrededor de su línea central obtendremos un plato de parábola, que es una figura en 3D. Se utiliza, entre otras cosas, en las luces delanteras de los automóviles, donde la bombilla está situada en el punto focal de la parábola. La luz irradiada hacia atrás y lateralmente incidirá en la parábola y se reflejará hacia adelante. Una parábola muy "abierta" también puede recibir, por ejemplo, señales de televisión, que se reflejan en un dispositivo receptor en el punto de enfoque.
..y mucho más.

Polinomios

Los polinomios tienen x como número base y un exponente, n

$y = x^n$ o
$f(x) = x^n$

La parábola discutida recientemente es un polinomio con exponente 2.
El diagrama muestra cuatro polinomios relevantes en el primer cuadrante:



x está entre paréntesis, porque el programa de bocetos lo exige; las matemáticas no lo exigen.

A modo de comparación se muestra una línea recta $y = x^1 = x$.

Ejemplos

1.

$y = x^3$ se llama polinomio de tercer grado.

Por ejemplo el volumen de una esfera:

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ donde el radio está elevado a tres.

2.

$y = x^2$ se llama polinomio de segundo grado o parábola que se analizó en el último capítulo.

Por ejemplo, la fórmula de la energía cinética (energía de movimiento):

$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ donde m es la masa, v es la velocidad.

Si la masa es una constante (tal vez un número conocido), Ekin será función de (dependiendo de) v^2

3.

$y = x^{½} \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$ se llama función de raíz cuadrada

Nuevamente, podemos usar la fórmula de la energía cinética como ejemplo, sólo que ahora calculamos la velocidad, v

$v = \left(\frac{2E}{m}\right)^{½}$

Si la masa es una constante (tal vez un número conocido), v será función de (dependiendo de) $E_{kin}^{½}$

4.

$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ se llama función recíproca

Recíproco no debe confundirse con "inverso", que discutiremos más adelante.

Por ejemplo, la ley de Boyle Mariotte de la física. Es válido (dentro de límites) para gases y dice que la presión multiplicada por el volumen es una constante (un cierto número) si la temperatura se mantiene constante:

$p \cdot V = k \quad \Leftrightarrow$

$p = k \cdot V^{-1}$

Entonces, en un diagrama V,p tenemos una curva similar a la del diagrama x,y denotada $(x)^{-1}$. La curva se llama hipérbole, que en griego antiguo significa "exageración".

La hipérbole tiene la capacidad de no tocar nunca ni el primer eje ni el segundo eje. Decimos que se acerca asintóticamente al eje, que también es griego antiguo y significa "no hay coincidencia".

Funciones y las cuatro operaciones aritméticas básicas.

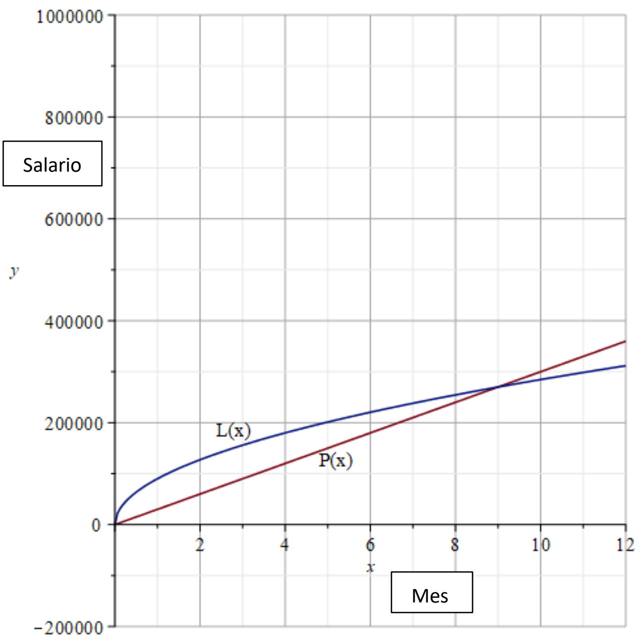
Podemos sumar, restar, multiplicar y dividir funciones entre sí.

Consideremos a Liz y Peter quienes en un año ganan dinero de diferentes maneras. Trabajan en Dinamarca, por lo que la moneda es en coronas danesas.
Peter tiene un salario fijo todos los meses:

salario = salario por mes · número de meses =>
$P(x) = 30.000 \cdot x$

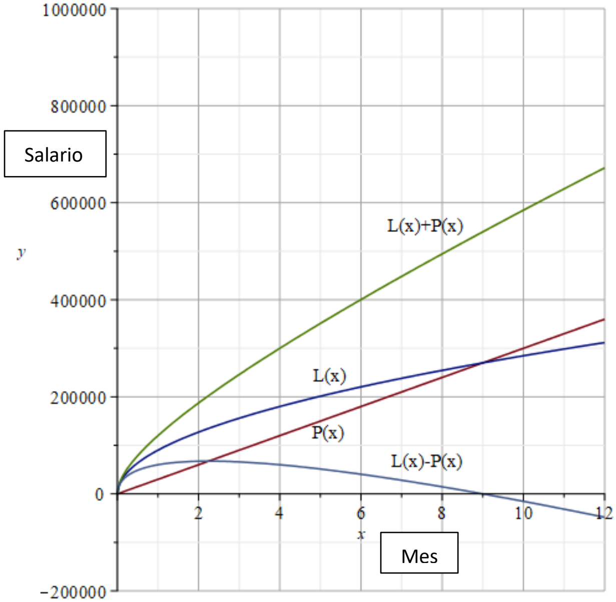
Liz gana mucho a principios de año y menos después. Se ajusta aproximadamente a esta función:
$L(x) = 90.000 \cdot x^{½}$ (gana 90.000 el primer mes)

Las funciones salariales se ven así en un diagrama:



El siguiente diagrama muestra cuánto ganan juntos (aprox. 660.000 coronas para todo el año). Se han agregado las curvas.

También muestra cuánto gana Liz más que Peter. Curva L(x) menos curva P(x). Liz gana más hasta el noveno mes, el resto del año gana menos que Peter.

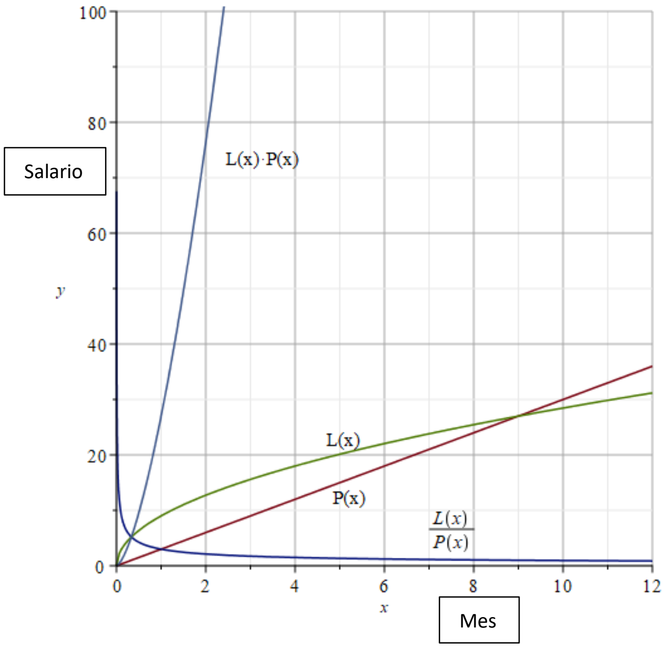


En este caso no interesa multiplicar las dos funciones. Sólo obtenemos una curva pronunciada que no aporta información útil. Sin embargo, se muestra en el siguiente diagrama.

Es más interesante ver cuánto ganan entre sí. Aquí elegimos ver cuánto gana Liz en relación con Peter: $\frac{L(x)}{P(x)}$

Para empezar, Liz gana mucho más que Peter, por lo que la fracción da valores grandes en el segundo eje. Después de un tiempo, ganan casi lo mismo, por lo que la fracción se vuelve aproximadamente 1 y la curva se vuelve plana.

Los valores en el segundo eje se hacen aproximados (1.000.000 se ha convertido en 100, etc.), para que podamos ver mejor la curva $\frac{L(x)}{P(x)}$.



Funciones compuestas

Usamos funciones compuestas si el resultado de una función se aplica posteriormente en otra función. Por ejemplo

$f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2$

Aquí la función compuesta, donde g se realiza primero y f después, se llamará f(g(x)). Decimos f de g de x [algunos escriben $(f \circ g)(x)$].

g se llama función interna y f se llama función externa.
Aquí:

$f(g(x)) = 2(x^2) + 1$ por lo tanto, g insertado en f.

Una condición para las funciones compuestas es que el rango de la función interna se encuentre dentro del dominio de la función externa.

Funciones inversas

Generalmente vemos y como función de x.
Para funciones inversas, vemos x como función de y. Por ejemplo

$y = 2x + 1$ aquí tenemos $y = f(x)$ $\Leftrightarrow$
$x = \frac{y-1}{2}$ entonces tenemos $x = f(y)$

Si usamos el sistema normal de coordenadas con x en el primer eje e y en el segundo eje, llamamos al nuevo y: x - y al nuevo x: y (intercambiamos). Bastante confuso, pero así es como funciona:

$y = \frac{x-1}{2}$ que es la función inversa en el mismo sistema de coordenadas.

Para evitar confusión de nombres podemos escribir:

Función $f(x) = 2x + 1$ =>
Función inversa $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

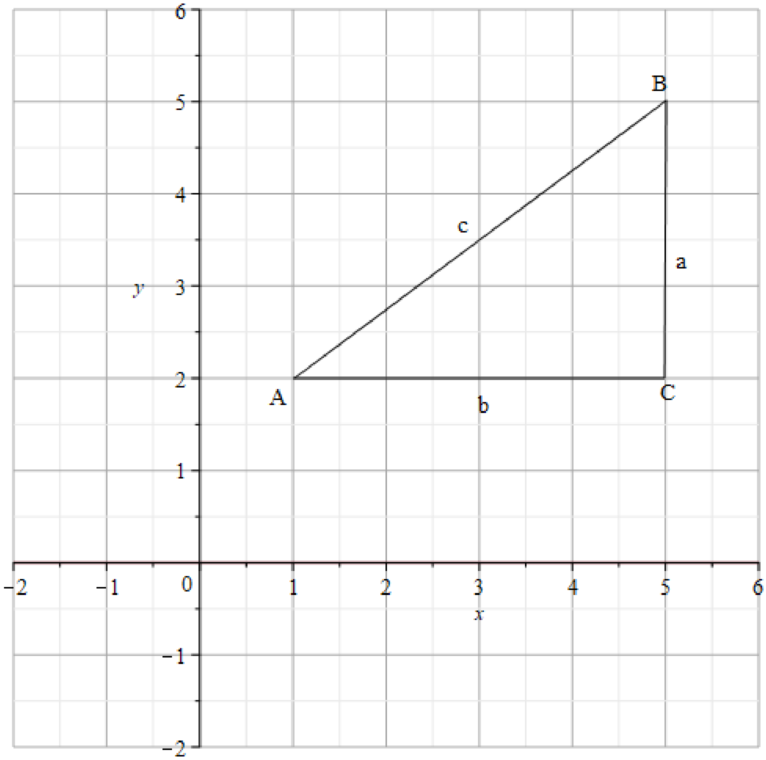
El -1 elevado muestra que es una función inversa. De esta forma, queda claro que f y f^{-1} son inversas entre sí.

Sólo las funciones monótonas (es decir, crecientes o decrecientes) tienen una función inversa. El dominio y el rango también se intercambian.

Las funciones inversas son especialmente interesantes considerando sinus, cosinus y tangente -así como 10 y log -así como *e* y ln, que veremos más adelante.

El triángulo rectángulo

Todos los triángulos tienen una suma angular de 180°. El triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90° dejando otros 90° para los otros dos, por ejemplo un triángulo con ángulos de 30°, 60° y 90°.
El triángulo rectángulo es importante dentro de las matemáticas y está incluido en muchos diseños y construcciones.
En el diagrama hay un triángulo rectángulo llamado ABC con lados llamados a, b, c.



El antiguo griego Pitágoras encontró una fórmula válida para triángulos rectángulos:

$a^2 + b^2 = c^2$

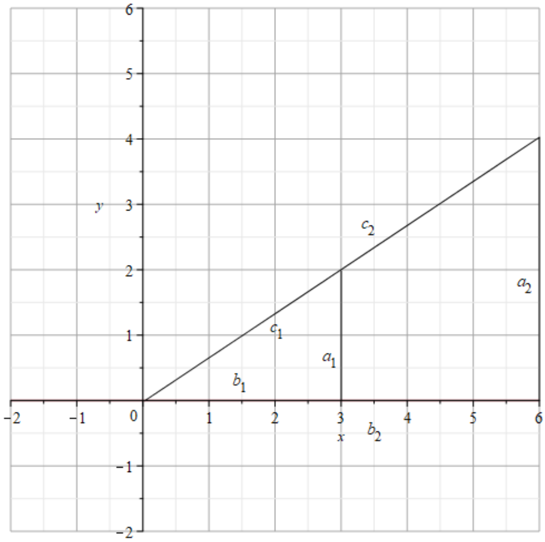
Probablemente la fórmula más utilizada de todas.
Visto desde el ángulo A, a es el lado opuesto, b es el lado adyacente y c es la hipotenusa (un antiguo nombre griego).
Un triángulo rectángulo común es el triángulo 3, 4, 5, es decir, a = 3, b = 4 y c = 5. Entonces Pitágoras expresa:

$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad \Leftrightarrow$

25 = 25

cual es verdad. Eso significa que podemos formar fácilmente un ángulo de 90°, por ejemplo, teniendo una tabla con agujeros perforados a 3 metros de distancia, otra tabla con agujeros perforados a 4 metros de distancia y una tercera tabla con agujeros perforados a 5 metros de distancia. Luego los colocamos en forma de triángulo con clavijas en los agujeros, y el ángulo mayor automáticamente será de 90°. También podemos usar tres trozos de cuerda o lo que sea, si solo uno mide 3, el otro 4 y el tercero 5, - y no tiene que ser metros, puede ser pies o cualquier unidad.

El siguiente diagrama muestra un triángulo rectángulo pequeño y uno grande. El triángulo pequeño tiene las medidas a_1, b_1, c_1 y el triángulo grande tiene las medidas a_1, b_1, c_1.



Si, como se muestra, los ángulos son iguales, se aplica lo siguiente:

$$\frac{a1}{a2} = \frac{b1}{b2} = \frac{c1}{c2} \qquad \text{y} \qquad \frac{a2}{a1} = \frac{b2}{b1} = \frac{c2}{c1}$$

como se puede deducir fácilmente del diagrama.
Dicho de otra manera: si a crece, b y c crecen correspondientemente. Si, por ejemplo, se duplica a, b y c también se duplican. Correspondientemente a la reducción.
Estos triángulos tienen un ángulo.

El área de todos los triángulos es

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{línea base} \cdot \text{altura}$$

Para un triángulo rectángulo es particularmente fácil, ya que la línea de base es un cateto (o cateto) y la altura es el otro cateto (en latín, los dos lados más pequeños, los catetos del ángulo recto, se llaman los dos catetos).
Para nuestro pequeño triángulo, el área es:

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$

y para el triángulo grande, el área es:

$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$

Tenga en cuenta que cuando se duplica la longitud de los lados, el área se vuelve cuatro veces mayor.

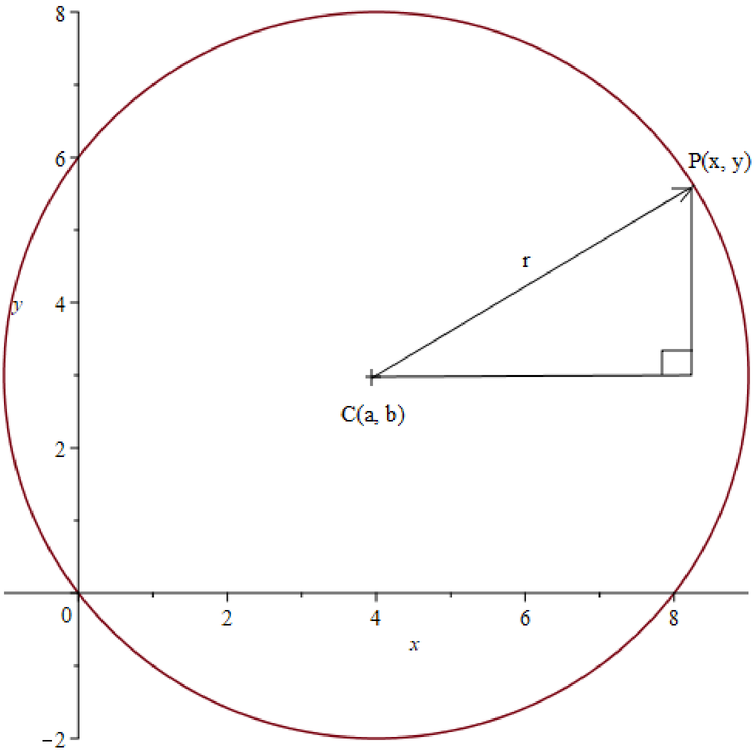
Un término técnico para todos los triángulos es "trigonometría", que significa medición de triángulos.

El círculo

La tierra es (casi) redonda. Muchos cuerpos celestes son redondos. La tierra gira alrededor de su propio eje con un movimiento circular. Las máquinas giratorias realizan movimientos circulares. Muchas construcciones y diseños tienen círculos. El círculo es importante.

La ecuación del círculo es sorprendentemente sencilla. Es "simplemente" Pitágoras una vez más.

El diagrama muestra un círculo con centro C(a, b) y radio r que golpea el círculo en el punto P(x, y)



Por supuesto, el centro C es el mismo independientemente de dónde nos encontremos en el círculo. P, sin embargo, es variable:

las coordenadas varían según en qué parte del círculo nos encontremos. La distancia (r) a C es la misma para todas las P.

Dibujamos un triángulo auxiliar y usamos a Pitágoras:

(lado horizontal)^2 + (lado vertical)^2 = radio^2 $\Leftrightarrow$

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

que es la ecuación del círculo.

Ejemplos

1.

El círculo mostrado tiene la ecuación:

$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

¿Dónde se cruzará nuestro círculo con la línea horizontal y = 6 ?
La recta no se muestra, pero se ve que la recta debe cruzarse en el punto (0, 6) y (8, 6)
Las intersecciones son donde la ecuación lineal es igual a la ecuación circular, que se resuelve mediante dos ecuaciones con dos incógnitas:

línea $y = 6$

círculo $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

línea en círculo: $(x - 4)^2 + (6 - 3)^2 = 5^2 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 - 8x + 16 + 9 = 25 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 - 8x = 0$

aquí, sin c, podemos usar la solución cero:

$x \cdot (x - 8) = 0$ =>

ya sea x o (x - 8) es cero ⇔

$x = 0$ o $(x - 8) = 0$ ⇔ $x = 8$

Combinados encontramos que la recta corta al círculo en el punto (0, 6) y (8, 6)
lo cual se corresponde muy bien con nuestra lectura.

2.

Los antiguos griegos determinaban la circunferencia de un círculo como:

$O = 2 \cdot \pi \cdot r$

dónde $\pi \approx 3{,}14$ => $2\pi \approx 6.28$

para nuestro círculo es

$O = 2 \cdot \pi \cdot 5 \approx 31.4$

Además, determinaron el área de un círculo como

$A = \pi \cdot r^2$

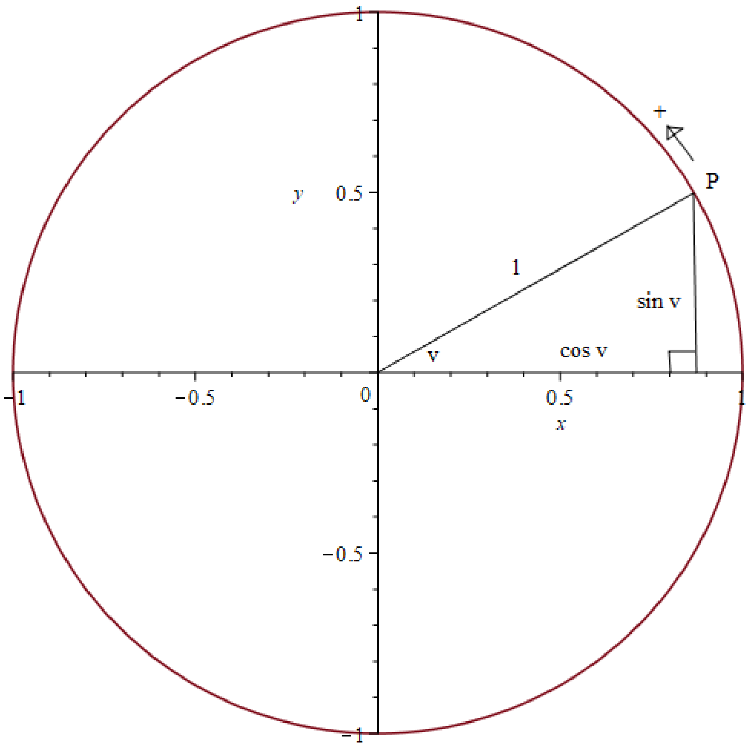
para nuestro círculo es

$A = \pi \cdot 5^2 \approx 78.5$

Sinus (Seno)**, cosinus** (coseno) **y tangente**

Imaginamos que estamos jugando con una cometa al viento. No importa qué tan larga sea la línea (siempre que sea constante). Decimos que la longitud es 1. Se encuentra horizontalmente en el suelo. Luego llega el viento y lo levanta con un movimiento circular. La longitud de la línea sigue siendo 1, por lo que a medida que suba, se acercará a nosotros medido a lo largo del suelo (horizontalmente). Sin embargo, todavía está a 1 longitud de nosotros, solo que ahora está dividida en horizontal y vertical.

Veámoslo en un diagrama:



Estamos en Origo (0, 0). La cometa está en el punto P. La altura vertical del dragón se llama *sinus* y la distancia horizontal se llama *cosinus*. Sinus es latín y significa "altura del arco". Co-significa "con", por lo que co-sinus está en contexto con sinus, ya que también depende de sinus. También vemos claramente que cuando el dragón asciende, el sinus aumenta y el co-sinus disminuye. Si la cometa se eleva muy alto, el sinus es grande y el co-sinus es pequeño, está casi justo encima de nosotros.

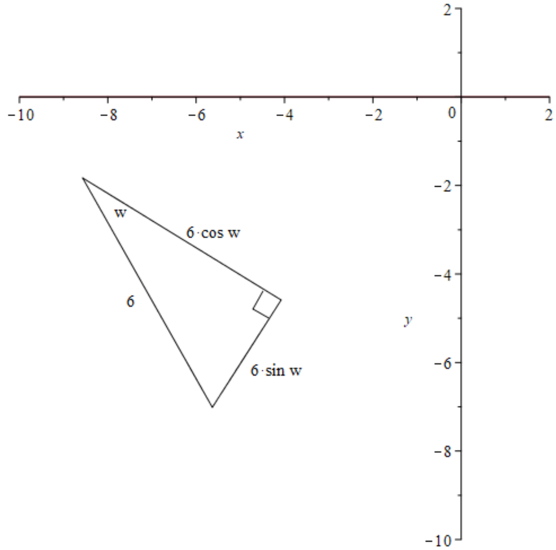
Acortamos sinus y cosinus, y en los cálculos utilizamos las abreviaturas sin y cos.
sen y cos dependen del ángulo v (para vértice). (El ángulo puede tener todo tipo de nombres). Lo mostramos escribiendo $\sin v$ para la altura vertical del arco (dirección y) y $\cos v$ para la distancia horizontal (dirección x).
Si v se hace más grande, P girará en sentido contrario a las agujas del reloj, que es la dirección de rotación positiva (+ rotación), que se muestra en el diagrama con una pequeña flecha y un +.

En otras conexiones, la rotación en el sentido de las agujas del reloj suele ser positiva, pero en matemáticas la rotación + es en el sentido contrario a las agujas del reloj.

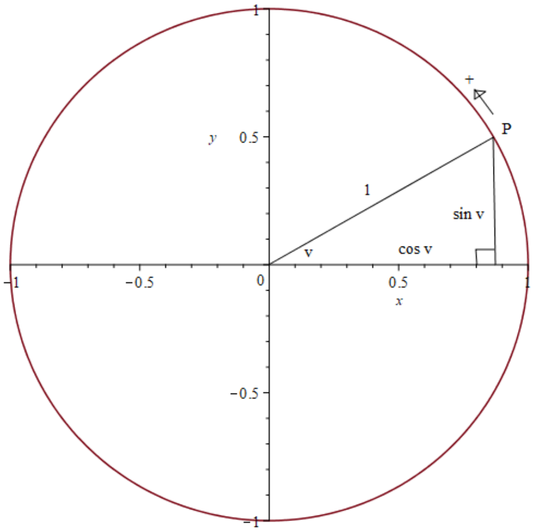
Observado desde el ángulo v, el lado frente a ti (el lado opuesto) siempre será el “lado sinus”, y el lado adyacente que más lejos termina en un ángulo recto (90°) siempre será el “lado cosinus”.
El lado oblicuo largo siempre será la hipotenusa.

Este también es el caso si movemos el triángulo, lo cambiamos (aún en ángulo recto) y lo giramos.

En el siguiente diagrama mostramos un triángulo recto, donde la hipotenusa (el lado más largo) mide 6 de largo y el ángulo se llama w. Entonces el lado sinus seguirá siendo el opuesto, y el lado cosinus seguirá siendo el lado adyacente que más lejos termina en un ángulo de 90°. Sólo que ahora son 6 veces más largos.



Consideremos nuevamente el diagrama que muestra un triángulo recto en el círculo unitario (el nombre de un círculo con radio = 1):



La fracción $\frac{\sin v}{\cos v}$ informa qué tan grande es el sinus en relación con el cosinus. Esta fracción se llama tangente, tan brevemente:

$tan\ v = \frac{\sin v}{\cos v}$

Vemos que *tan v* se hace cada vez más grande (ya que *sin v* aumenta y *cos v* disminuye) a medida que v va de 0° a 90°.
Ya hemos visto un ángulo llano con fracción de dos catetos, que era:

pendiente = a = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

y sí, es lo mismo. La diferencia es que la pendiente es válida para una línea recta en un sistema de coordenadas, mientras que la tangente es válida para un triángulo recto en cualquier posición. Sin embargo, si colocamos nuestro triángulo recto en un sistema de coordenadas, podemos hablar de la pendiente de nuestra hipotenusa. Así, para esta hipotenusa:

$tan\ v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = a = pendiente

----

Si lees un libro de texto antiguo, es posible que tenga otra abreviatura tangente: *tg*

Y ya que hablamos de notaciones:

$(\sin v)^2 = \sin^2 v$ $(\cos v)^2 = \cos^2 v$ $(\tan v)^2 = \tan^2 v$

This book has the first notation. Other books and tables may have the other notation.

Ejemplos

1.

Comencemos usando a Pitágoras en el triángulo del círculo unitario:

$(sin\ v)^2 + (cos\ v)^2 = 1^2$ llamada relación básica

This equation makes it possible to solve for *sin v*

$(sin\ v)^2 = 1 - (cos\ v)^2$ ⇔

$sin\ v = [1 - (cos\ v)^2]^{½}$

donde se utiliza el exponente ½ en lugar de una raíz cuadrada. Usaremos esta relación más adelante.

2.

Usando métodos de medición finos en el círculo unitario, podemos encontrar la magnitud del lado sinus y del lado cosinus de varios ángulos. Estas magnitudes conducen a funciones que se programan en CAS.

Entonces, por ejemplo, podemos ingresar *sin 30°* y obtener la respuesta $\frac{1}{2}$

o podemos ingresar *cos 30°* y obtener la respuesta $\frac{\sqrt{3}}{2}$

A partir de eso podemos calcular *tan 30°* = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

o podemos ingresar tan 30° y obtener la misma respuesta $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Algunos ángulos y los valores correspondientes de sinus, cosinus y tangente son cómodos de memorizar:

Ángulo	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

la tangente a 90° sería 1 dividido por 0, lo cual no se puede hacer.

3.

De la tabla del ejemplo 2 tenemos:

$sin\ 30° = \frac{1}{2}$

Además, podemos usar la tabla al revés teniendo:

$sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$ (en los EE. UU. $\sin^{-1}$ se llama arcsin o invsin)

o

$cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

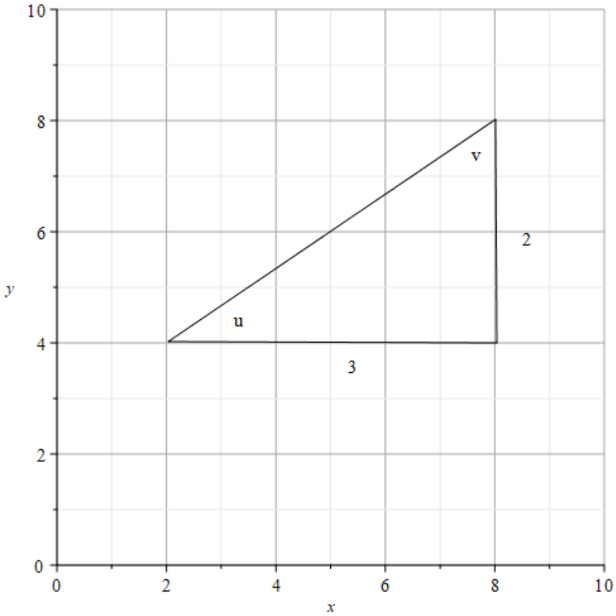
y la función inversa

$cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45°$ (en EE. UU. $\cos^{-1}$ = arccos = invcos)

Las funciones inversas están programadas en la mayoría de los CAS.

4.

Encontremos los ángulos u y v en este triángulo mediante un cálculo comúnmente utilizado por constructores y diseñadores:



$$tan\ u \ = \ \frac{\sin u}{\cos u} \ = \ \frac{2}{3}$$

Mirando la tabla del ejemplo 2, deducimos que el ángulo puede estar entre 30° y 60° (30° más cercano). CAS también tiene la función inversa, por lo que al pedir tan^{-1} a $\frac{2}{3}$ se obtiene 33,69°

Encontramos el ángulo v de la misma manera, sólo que ahora el lado sinus es 3 y el lado cosinus es 2:

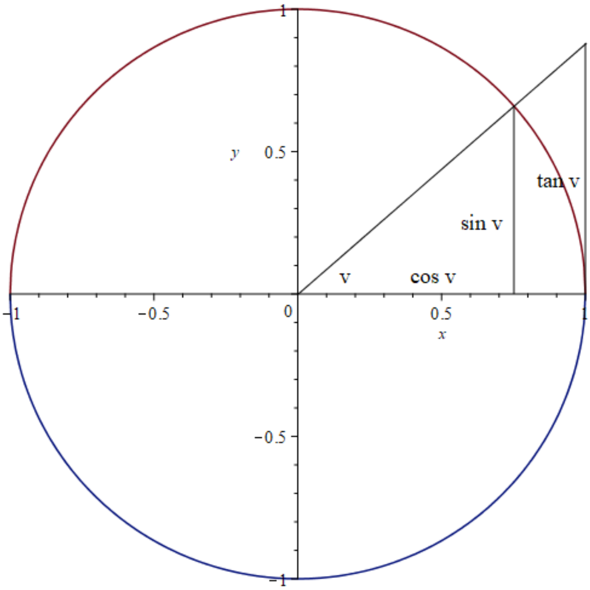
$$tan\ v \ = \ \frac{\sin v}{\cos v} \ = \ \frac{3}{2} \qquad \Leftrightarrow$$

$$v \ = \ \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \ = \ \arctan\left(\frac{3}{2}\right) \ = \ \text{invtan}\left(\frac{3}{2}\right) \ = \ 56{,}31°$$

Controlador: 90° + 33,69° + 56,31° = 180° Ok.

5.

Un ejemplo, para mostrar de dónde tiene su nombre la tangente:



El triángulo pequeño y el triángulo grande tienen un solo ángulo. =>

$$\frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\tan v}{1}$$

y usando el círculo unitario vemos tan v representado.

En tiempos anteriores a CAS, era posible determinar la tangente de esta manera, pero esta no es la definición de tangente, que es:

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$$

Radián

El radio irradia desde el centro hacia la periferia, de ahí el nombre. Radian es la forma propia de la naturaleza de medir un ángulo. El hombre decidió medir un ángulo en grados, pero además, se mide en radianes:
Los antiguos griegos descubrieron que la circunferencia de un círculo es proporcional al radio del círculo. Llamaron al factor de proporcionalidad: 2π

Circunferencia = $2 \cdot \pi \cdot$ radio $\Leftrightarrow$

$O = 2\pi \cdot r$

También encontraron $\pi \approx 3{,}14 \Rightarrow 2\pi \approx 6{,}28$

Por tanto, el radio es la variable que determina el tamaño de la circunferencia de un círculo. Si r se duplica, O también se duplicará, etc.
Entonces, un recorrido alrededor de un círculo tiene 2π radios independientemente del tamaño del círculo. A esto lo llamamos ahora 2π radianes, o brevemente: 2π rad
Un recorrido alrededor de un círculo es también un recorrido de 360°, independientemente del tamaño del círculo. Por lo tanto:

2π radianes = 360 grados

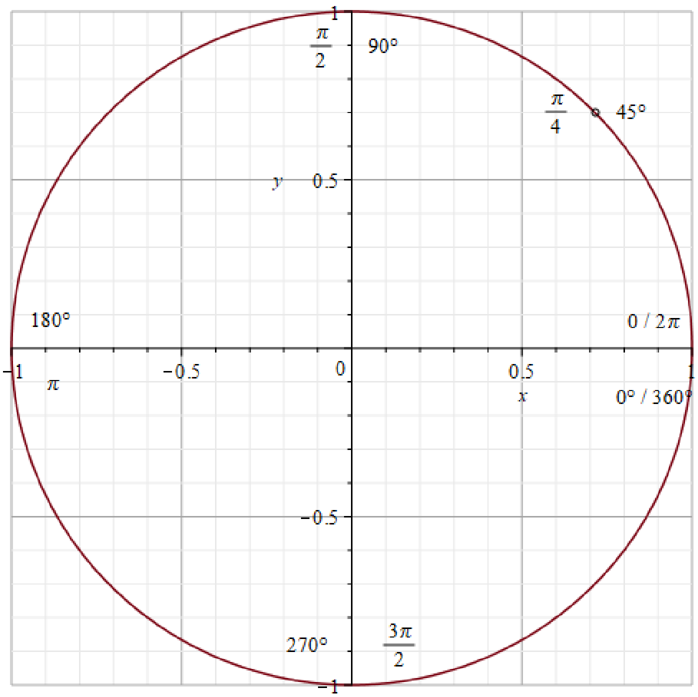
que puede dividirse en, por ejemplo:

π rad = 180° $\Leftrightarrow$

$\frac{\pi}{2}$ rad = 90° $\Leftrightarrow$

$\frac{\pi}{4}$ rad = 45°

etcétera. Véase también la figura:



El cálculo proporcional conduce a esta fórmula de conversión:

$$\frac{\text{ángulo en radianes}}{2\pi} = \frac{\text{ángulo en grados}}{360}$$

Ejemplos

1.

Un ángulo v mide 30°, ¿cuánto mide en radianes?
Respuesta: Ángulo en radianes. ángulo en grados.

$$\frac{\text{ángulo en radianes}}{2\pi} = \frac{\text{ángulo en grados}}{360} \quad \Leftrightarrow$$

$$v_{rad} = 2\pi \cdot \frac{30}{360} \quad \Leftrightarrow$$

$$v_{rad} = \frac{\pi}{6}\,\text{rad}$$

Normalmente, no representamos un número decimal. Dejamos π para ser precisos y mostrar que estamos usando radianes, incluso si también decimos, rad

2.

Un ángulo w mide 60°, ¿cuánto mide en radianes?

Respuesta:

$$\frac{ángulo\ en\ radianes}{2\pi} = \frac{ángulo\ en\ grados}{360} \quad \Leftrightarrow$$

$$w_{rad} = 2\pi \cdot \frac{60}{360} \quad \Leftrightarrow$$

$$w_{rad} = \frac{\pi}{3}\ \text{rad}$$

3.

Un ángulo mide 1 rad, ¿cuanto mide en grados?

Respuesta:

$$\frac{ángulo\ en\ radianes}{2\pi} = \frac{ángulo\ en\ grados}{360} \quad \Leftrightarrow$$

$$u_{gra} = \frac{360 \cdot 1}{2\pi} \quad \Leftrightarrow$$

$$u_{gra} \approx 57{,}3°$$

Aquí solemos escribir un número decimal.

4.

Un ángulo φ (fi) es π rad, ¿cuánto mide en grados?

Respuesta:

$$\frac{\acute{a}ngulo\ en\ radianes}{2\pi} = \frac{\acute{a}ngulo\ en\ grados}{360} \quad \Leftrightarrow$$

$$\varphi_{gra} = \frac{360 \cdot \pi}{2\pi} \quad \Leftrightarrow$$

$$\varphi_{gra} = 180°$$

Ángulo y longitud del arco circular.

Veamos nuevamente la fórmula para la circunferencia de un círculo:

$O = 2\pi \cdot r$ O es la longitud de arco especial llamada circunferencia

y dividir por 2 a cada lado

$\frac{O}{2} = \pi \cdot r$ que es media vuelta

luego dividimos por, por ejemplo, 3 en cada lado

$\frac{O}{6} = \frac{\pi}{3} \cdot r$ y la longitud del arco se vuelve menor

Estas tres expresiones reunidas en una ecuación común:

longitud del arco = ángulo (en rad) · radio

El ángulo y la longitud del arco son directamente proporcionales.

Ejemplo

5.

¿Cuál es la longitud del arco de 45° de un círculo con radio de 9 metros?

Cambiamos de 45° a radianes:

$$\frac{\acute{a}ngulo\ en\ radianes}{2\pi} = \frac{\acute{a}ngulo\ en\ grados}{360} \qquad =>$$

$$\text{ángulo en radianes} = 2\pi \cdot \frac{45}{360} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\text{ángulo en radianes} = \frac{\pi}{4}$$

y: longitud de arco $= \frac{\pi}{4} \cdot 9 \approx 7{,}07$ metros

Fin de sección

Terminemos este capítulo mostrando una tabla del capítulo anterior (sinus, cosinus y tangente), sólo que ahora ampliada con ángulos en radianes:

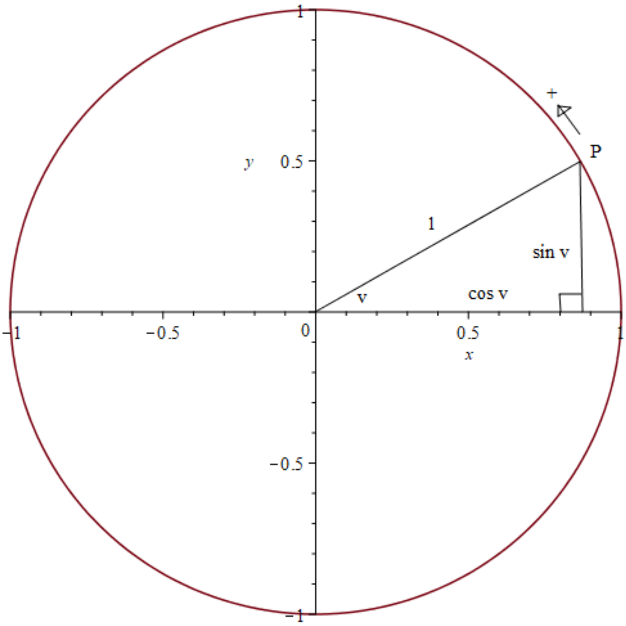
Ángulo	0°	30°	45°	60°	90°
Ángulo	*0 rad*	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

tangente a 90° sería 1 dividido por 0, lo cual no se puede hacer.

En algunos libros y en algunas tablas, v es un ángulo en grados y x es un ángulo en radianes. A menudo necesitamos ser conscientes de los diferentes nombres de cosas similares.

La función sinus y la oscilación sinusoidal.

Volveremos a mirar el círculo unitario:



Lo llamamos círculo unitario porque el radio es 1.

Si el ángulo v es 0, el punto P está en el eje x con las coordenadas (1, 0). Entonces *cos v = 1 y sin v = 0*

Si v aumenta, *sin v* aumentará y *cos v* disminuirá.
si v = 90° ($\frac{\pi}{2}$): *cos v = 0 y sin v = 1*
Si continuamos la rotación en la dirección + (en sentido contrario a las agujas del reloj) en el segundo cuadrante, *cos v* se vuelve más negativo y *sin v* menos positivo.

en v = 180° (π): *cos v = -1 y sin v = 0*

en el tercer cuadrante *cos v* se vuelve menos negativo y *sen v* se vuelve más negativo

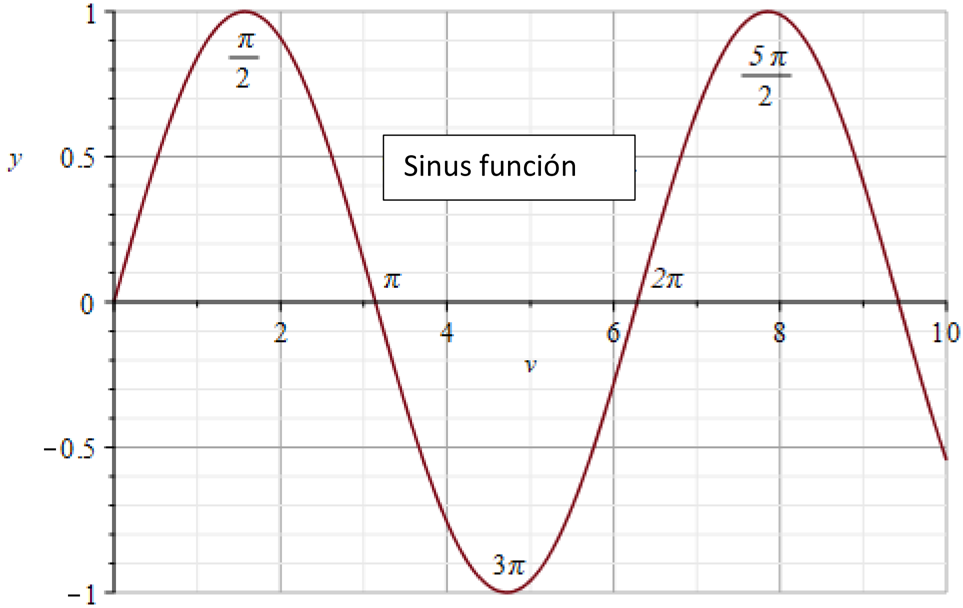
en v = 270° ($\frac{3\pi}{2}$): *cos v = 0 y sin v = -1* en el cuarto cuadrante cos v se vuelve más positivo y sen v se vuelve más negativo

en v = 360° (2π) empezamos de nuevo.

La forma en que varía *sin v* se puede escribir en una función:

$y = \sin v$

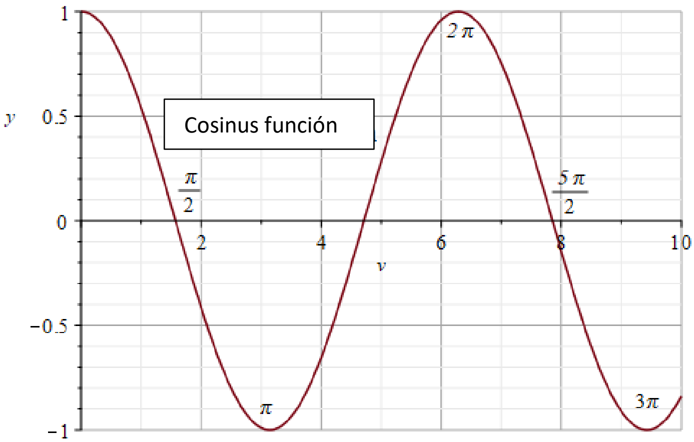
y podemos mostrar la función en un sistema de coordenadas con v en radianes en el primer eje y sen v en el segundo eje:



La curva fluctúa alrededor del eje neutro (aquí el primer eje). La fluctuación máxima se llama amplitud (aquí +1 y -1). Una rotación de 0 a 2π se llama ciclo o período.

También mostramos la función cosinus.

$y = \cos v$



Lo cual es igual solo que se mueve $-\frac{\pi}{2}$ a lo largo del primer eje.
Entonces, solo consideramos la función sinus.
Como hemos visto, la función sinus se puede utilizar para encontrar ángulos y longitudes de arco de segmentos de círculo, y junto con el cosinus y la tangente podemos hacer cálculos en triángulos rectos, lo cual es importante dentro de la geometría.
Podemos afirmar que la función sinus combina círculos, ángulos, longitudes de arco y triángulos rectos.

Sin embargo, la función sinus vale más:

Oscilación sinusoidal

Muchas cosas que giran o fluctúan siguen la función sinus.
Eventos repetidos. Las llamamos oscilaciones sinusoidales. Las oscilaciones sinusoidales aparecen tanto en la naturaleza como en la técnica, y especialmente las oscilaciones técnicas exigen una expansión de la ecuación.
Encontramos oscilaciones sinusoidales en la naturaleza, por ejemplo en nuestro pulso y respiración, fluctuaciones de

temperatura a lo largo del año, el ritmo de 24 horas, marea, sonido, luz, etc.
Ejemplos de oscilaciones técnicas son maquinaria giratoria, técnica de sonido, instrumentos musicales, técnica de iluminación, etc.
Las oscilaciones sinusoidales se aplican cuando algo fluctúa hacia arriba y hacia abajo, hacia adelante y hacia atrás, gira, etc.

Consideremos algo que gira con velocidad constante, por ejemplo la rotación de la Tierra alrededor de su propio eje. Entonces la longitud del arco y el tiempo están relacionados:

En 24 horas la Tierra gira un ángulo de 2π radianes y la longitud del arco de 2πr. En 1 hora la Tierra gira $\frac{2\pi}{24}$ radianes y la longitud del arco es $\frac{2\pi r}{24}$, etc.
Entonces, el ángulo y la longitud del arco son proporcionales.

Ahora necesitamos un tamaño físico llamado velocidad angular (ω), que se define como el giro angular en radianes dividido por el tiempo en segundos (t):

velocidad angular $= \frac{ángulo}{tiempo}$

y en símbolos

$\omega = \frac{v}{t}$ ⇔ v es el ángulo

$v = \omega t$ ω es la omega griega

Ahora nuestro ángulo es ωt y la función sinus es, por tanto, una función del tiempo, t, y se ve de esta manera:

$f(t) = \sin \omega t$

En técnicas es posible que necesitemos cambiar el ángulo. Está escrito como:

$f(t) = \sin (\omega t + \varphi)$ φ es la letra griega fi.

Ahora el ángulo es $(\omega t + \varphi)$

Es posible que también necesitemos cambiar la amplitud. Lo hacemos multiplicando por A, el tamaño de la amplitud. A se mide desde la línea neutral hasta la parte superior o inferior máxima.

Finalmente, es posible que necesitemos mover la curva sinusoidal hacia arriba (o hacia abajo) en el diagrama. Por lo tanto, sumamos k. Si k es positivo, la curva se mueve hacia arriba, y si k es negativo, se mueve hacia abajo:

$f(t) = A \cdot \sin (\omega t + \varphi) + k$

Esta es la función sinus expandida o *la ecuación de una oscilación sinusoidal.*
Estas oscilaciones sinusoidales también se denominan oscilaciones armónicas.

Ejemplos

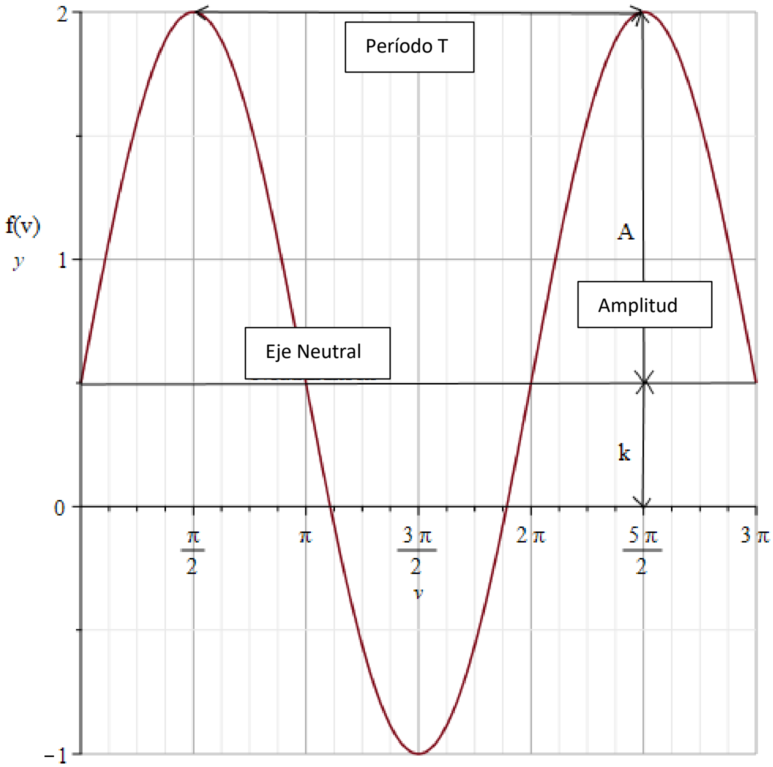
1.

Este diagrama muestra una función sinus parcialmente expandida, donde la curva sigue dependiendo del ángulo v, y donde:

A = 0,5 k = 0,5 =>

f(v) = 1,5 · sin(v) + 0,5

v en el primer eje y f(v) en el segundo eje.



Se lee que el eje neutro ahora es para f(v) = 0,5 ya que k = 0,5 y la amplitud A es igual a 1,5

2.

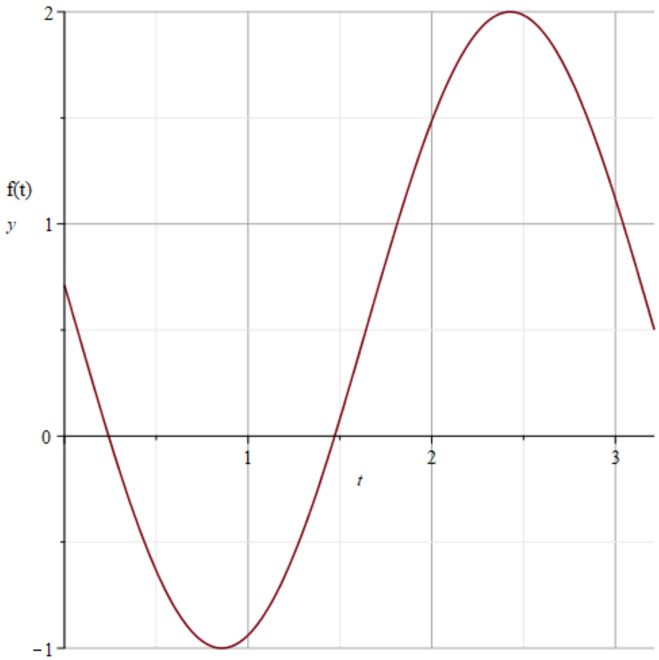
Ahora deseamos considerar la función sinus relacionada con el tiempo en lugar del ángulo. Lo hacemos mediante la inserción de valores numéricos para ω y φ.

El diagrama muestra una función sinus completamente expandida, donde:

A = 1,5 ω = 2 φ = 3 k = 0,5 =>

$f(t) \; = \; 1.5 \cdot \sin(2t + 3) + 0.5$

con t en el primer eje y f(t) en el segundo eje.



Observamos que los valores en el segundo eje muestran una oscilación sin cambios de -1 a 2, mientras que los valores en el primer eje han cambiado de ángulo a tiempo. Esto se debe a los valores insertados para ω y φ.
ω y φ juntos en la fracción $-\frac{\varphi}{\omega}$ mueven la curva en la dirección x sin cambiar su forma. $-\frac{\varphi}{\omega}$ se llama cambio de fase. Esto se prueba a continuación:

Pruebas

El ángulo (ωt + φ) para una oscilación se encuentra entre 0 y 2π radianes:

$0 \;\leq\; (\omega t + \varphi) \;\leq\; 2\pi \qquad \Leftrightarrow$

$- \varphi \leq \omega t \leq 2\pi - \varphi \qquad \Leftrightarrow$

$- \frac{\varphi}{\omega} \leq t \leq \frac{2\pi - \varphi}{\omega}$

Entonces, el valor inicial ha cambiado de 0 a $-\frac{\varphi}{\omega}$, lo que por lo tanto se llama cambio de fase.

El cálculo también muestra que una oscilación va de $-\frac{\varphi}{\omega}$ a $\frac{2\pi - \varphi}{\omega}$

Eso lo vemos al tener:

fin menos inicio $\qquad \Leftrightarrow$

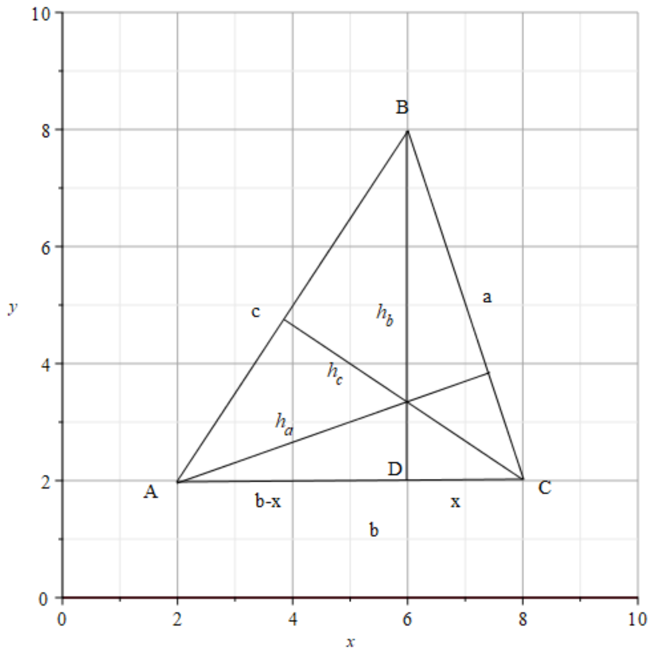
$\frac{2\pi - \varphi}{\omega} - (-\frac{\varphi}{\omega}) = \frac{2\pi}{\omega}$ que se denomina período, T

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

A menudo, t es el tiempo, por lo que T es para una oscilación completa = un ciclo = un período.

Los triángulos no rectángulos

También llamados triángulos arbitrarios.
Este capítulo también comprende los triángulos isósceles y equiláteros, que normalmente no se consideran arbitrarios.



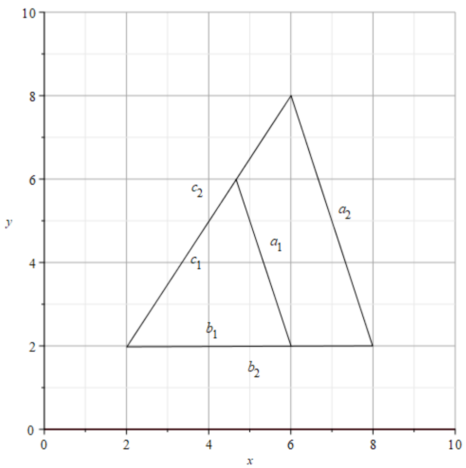
Para todos los triángulos la suma angular es 180°
El área de todos los triángulos es

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{línea base} \cdot \text{altura}$$

Una altura en un triángulo va desde una esquina perpendicularmente al lado opuesto.

Para todos los triángulos de un solo ángulo, se aplica que

$$\frac{a1}{a2} = \frac{b1}{b2} = \frac{c1}{c2} \qquad \text{y} \qquad \frac{a2}{a1} = \frac{b2}{b1} = \frac{c2}{c1}$$



Sin embargo, Pitágoras *no* se aplica a triángulos arbitrarios. En cambio, se aplican las reglas del sinus y las reglas del cosinus:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad\qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2a\cdot b\cdot \sin C$$

Pruebas

El sinus gobierna:
El área de un triángulo se puede escribir de tres formas:

$$A = \frac{1}{2}\cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2}\cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2}\cdot c \cdot h_c$$

En cambio, las alturas pueden verse como lados sinusoidales en los triángulos interiores más pequeños (ver la figura anterior). Por ejemplo

$$h_a = \sin B \cdot c \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cdot a \cdot \sin B \cdot c = \frac{1}{2}\cdot b \cdot \sin C \cdot a = \frac{1}{2}\cdot c \cdot \sin A \cdot b \qquad \Leftrightarrow$$

$$a \cdot \sin B \cdot c = b \cdot \sin C \cdot a = c \cdot \sin A \cdot b \qquad \Leftrightarrow$$

y cuando dividimos todas las partes de la ecuación por $a\cdot b\cdot c$.

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} \qquad \Leftrightarrow$$

O recíproca como se indica en algunas tablas.

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

Las reglas del sinus son las más fáciles, pero si resultan insuficientes, probablemente se aplicarán las reglas del cosinus.

El cosinus gobierna

El segmento de línea b en el primer diagrama se puede dividir en b-x y x y dado que los triángulos internos, más pequeños, son rectos, podemos usar a Pitágoras.
primer triángulo BCD

$x^2 + h_b^2 = a^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad h_b^2 = a^2 - x^2$

luego el triangulo ABD

$(b - x)^2 + h_b^2 = c^2 \qquad =>$

$b^2 + x^2 - 2bx + (a^2 - x^2) = c^2 \qquad h_b^2$ insertada

x es el lado cosinus del ángulo C en el triángulo BCD

$x = a \cdot \cos C \qquad =>$

$a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos C = c^2 \qquad$ x insertada

También podríamos haber considerado los segmentos de línea a y b que producirían:

$b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A = a^2$

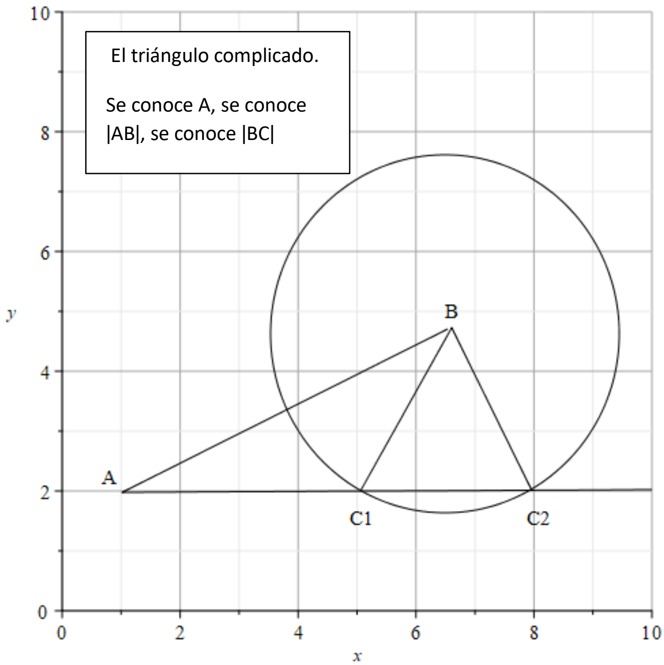
$a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos B = b^2$

Entonces, hay tres reglas para el cosinus, pero normalmente las tablas solo muestran una de ellas.

Más teoría

Necesitamos saber tres cosas sobre un triángulo para poder construirlo. Sin embargo, hay dos excepciones:

- Si conocemos los tres ángulos, el triángulo puede tener todos los tamaños.
- Si conocemos las longitudes de dos lados y un ángulo que no está entre los dos, podría haber un problema, que se ilustra en la figura:



Dibujamos el ángulo A. Marcamos el punto B. |BC| es ahora el radio de un compás, y vemos que C puede tener dos posiciones.

Desafortunadamente, este error es bastante común, por ejemplo al diseñar una viga. El diseñador quiso decir C1 pero tenía C2.

Ejemplos

Para un triángulo B = 82°, b = 14 y c = 13,1

¿Qué es C?

Usamos la parte de las reglas del sinus donde tenemos información:

$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$ $\Leftrightarrow$

sin C $= \frac{c \cdot \sin B}{b}$ =>

sin C $= \frac{13{,}1 \cdot \sin 82°}{14}$ $\Leftrightarrow$

C $= \sin^{-1}\left(\frac{13{,}1 \cdot \sin 82°}{14}\right)$ $\Leftrightarrow$

C = 67,9°

Lado a?

A es 180° - 82° - 67,9° = 30,1°

Podemos usar la regla del sinus una vez más, pero elegimos la regla del cosinus

$b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A = a^2$ =>

$a^2 = 14^2 + 13{,}1^2 - 2 \cdot 14 \cdot 13{,}1 \cdot \cos 30{,}1°$ $\Leftrightarrow$

$a^2 = 50{,}27$ $\Leftrightarrow$

a = 7,09

Funciones exponenciales

Las funciones exponenciales tienen una constante positiva (aquí llamada a) como número base y x como exponente.

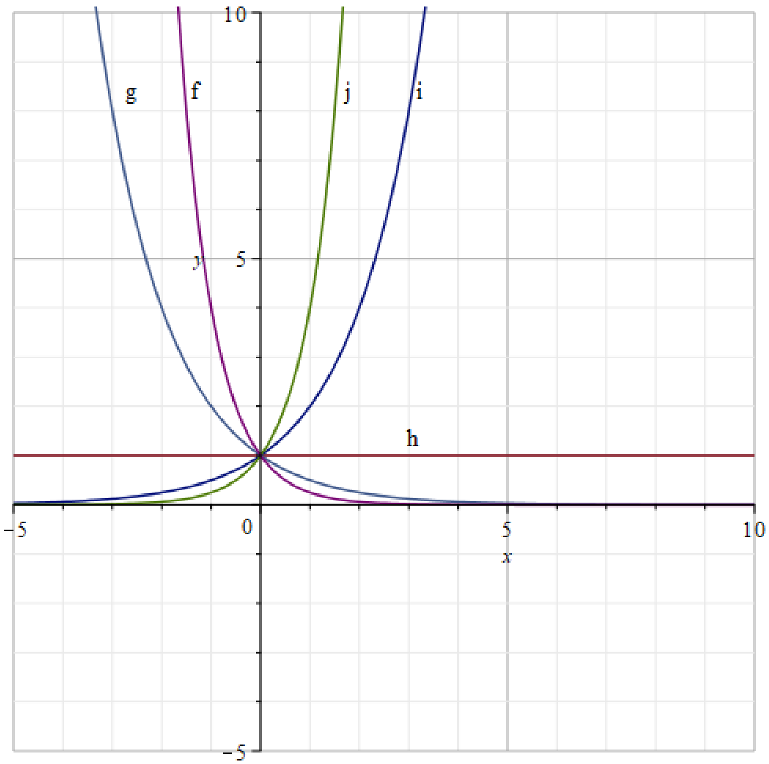
$y = a^x$ o

$f(x) = a^x$

En el diagrama:

$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $h(x) = 1^x$

$i(x) = 2^x$ $j(x) = 4^x$



Esta vez x se omite en f(x) y se acorta a f, g, etc. Está permitido ya que está claro que x está en el primer eje.

Las funciones exponenciales tienen dominio en el intervalo]-∞;∞[y rango en el intervalo]0;∞[y, por lo tanto, se ubican en el primer y segundo cuadrante únicamente. El primer cuadrante suele ser el interesante.
Generalmente, una función exponencial disminuye (vista en la dirección +x) cuando a está entre 0 y 1, y aumenta cuando a es mayor que 1.
La función h tiene a = 1, por lo que es horizontal y separa lo decreciente de lo creciente.
Además, tenga en cuenta que todas las funciones exponenciales pasan por el punto (0, 1), por lo que en el primer cuadrante todas comenzarán aquí.

Las funciones exponenciales son interesantes porque a menudo se aplican en la naturaleza, particularmente la que tiene el número de base 2,7183… o aproximadamente 2,72. Este número base se llama *e* en honor a un conocido matemático llamado Euler:

Número de Euler = $e \approx 2,72$

Las funciones exponenciales con número de base e se muestran en el siguiente diagrama.

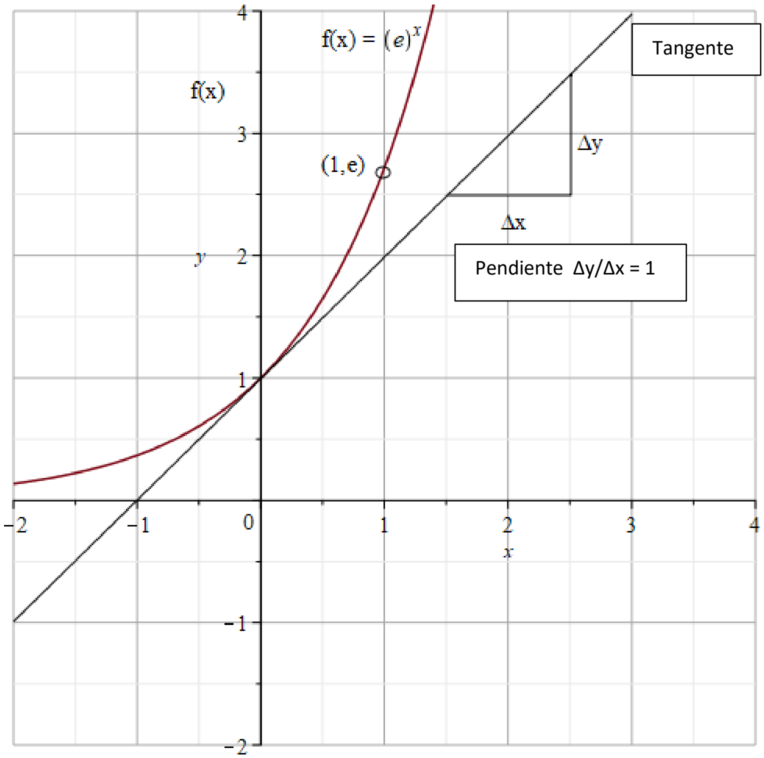
Encontramos $e \approx 2,72$ leyendo f(x) en x = 1. El punto está marcado (1, e)
¿Por qué es tan interesante el número base e? Es por la pendiente de la curva, que primero debemos explicar:

La pendiente informa cuánto aumenta una función (la pendiente es positiva) o disminuye (la pendiente es negativa).

La pendiente cambia, así que si la encontramos en un punto determinado, le ponemos una tangente al punto y encontramos su pendiente, que también es la pendiente de la curva allí mismo. En el punto inicial (0, 1) donde f(x) es 1, nuestra función exponencial ex tiene pendiente 1.

Ahora podemos dar una respuesta:

La función exponencial con número de base e es muy interesante porque para f(x) = 1 la pendiente también es 1. Para f(x) = 2 la pendiente también es 2. Para f(x) = 3 la pendiente es 3, etc. .



Entonces para todas las funciones exponenciales e tenemos:

$f(x) = e^x$ y pendiente tangente = e^x

Ninguna otra función tiene esta capacidad de que el valor de la función y la pendiente tangente sean iguales, es decir, e^x. Una capacidad que se encuentra en muchas conexiones para el crecimiento biológico de bacterias, plantas, animales,... y procesos físicos y químicos.

Por lo tanto, la función se llama: "la función exponencial natural", y el número base *e* (número de Euler) es una de las constantes más significativas en matemáticas.

Mucho más sobre esto en la Parte 3.

Más teoría 1

Primero consideramos la función exponencial ordinaria con la variable a como número base (con la que empezamos). Al igual que antes queríamos expandir la función sinus, ahora queremos expandir la función exponencial para que pueda usarse ampliamente. Nos expandimos desde

$f(x) = a^x$ la función exponencial

a

$f(x) = b \cdot a^{kx}$ la función de crecimiento exponencial

donde b le da a la curva otro punto de intersección con el segundo eje (o punto de partida, si solo consideramos el primer cuadrante), y k hace que la curva sea más o menos pronunciada.
Alternativa: $f(x) = b \cdot c^x$ para $a^k = c$

Ejemplo 1

Consideremos un ejemplo de economía:

$f(x) = b \cdot a^{kx}$ se reorganiza

$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$ cual es la formula de interes

Aquí f(x) ahora se llama K_n, que es un valor futuro.

b se llama K_0 que es el valor inicial

a se llama (1 + r) donde r es la tasa de interés

kx ahora se llama n, el número de plazos, que es el período de tiempo de la tasa de interés real (a menudo en número de años).

Usando esta ecuación, podemos, por ejemplo, calcular el valor futuro del dinero que prestamos hoy en el banco y devolverlo dentro de 5 años. Si prestamos 10.000 libras con un tipo de interés del 4% anual en 5 años, entonces deberemos:

$K_5 = 10.000 \cdot (1 + 0,04)5 = 12.167$ libras

Más teoría 2

De la misma manera ahora consideramos la función exponencial natural con e como número base y expandimos desde

$f(x) = e^x$ la función exponencial natural

hacia

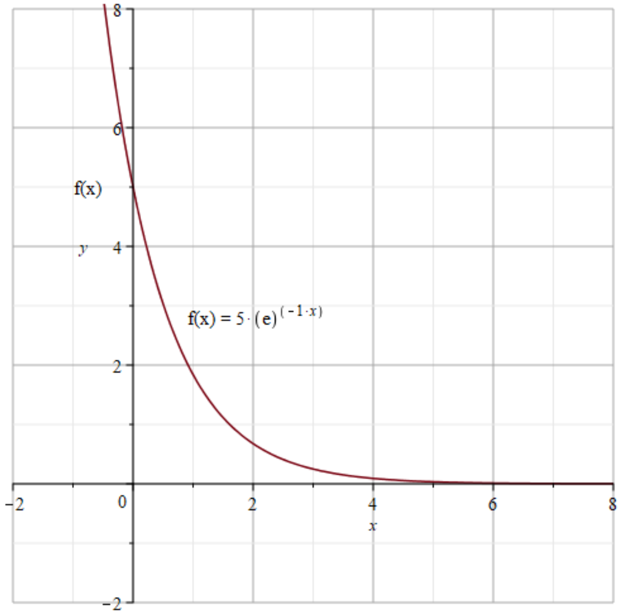
$f(x) = b \cdot e^{kx}$ e función para crecimiento exponencial

donde b le da a la curva otro punto de intersección con el segundo eje (o punto de partida, si solo consideramos el primer cuadrante), y k hace que la curva sea más o menos pronunciada. k es negativo con un crecimiento negativo.

Ejemplo 2

El diagrama muestra una función e para crecimiento exponencial, donde b = 5 y k = -1.
la k negativa hace que la curva disminuya exponencialmente.

Un ejemplo podría ser la desintegración de una materia radiactiva, aquí con el tiempo en el primer eje y la radiactividad en el segundo eje. La curva comenzaría en el punto (0, 5), a menos que queramos retroceder en el tiempo.



Funciones logarítmicas (log y ln)

Logaritmo es latino y significa algo así como "números aritméticos".

Aquí calculamos de una manera nueva.

Las cuatro operaciones aritméticas básicas se pueden utilizar para la mayoría, pero necesitamos más. La primera vez que vimos algo nuevo fueron las funciones sin, cos y tan (pasando del ángulo a la distancia), y sus funciones inversas $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$ - o arcsin, arccos, arctan - o invsin , invcos, invtan (pasando de distancia a ángulo).

Ahora nuevamente tenemos que calcular de una manera nueva. Necesitamos una herramienta para encontrar x en ecuaciones exponenciales como

$y = 10^x$ y $y = e^x$

El logaritmo de las decenas

Consideremos esta fila de números con potencias de 10. A continuación simplemente escribimos los exponentes:

10^x	$\uparrow$	… 10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	…	$\downarrow$	$\log 10^x$
x		… -2	-1	0	1	2	3	4	…		x

Está claro que pasamos de la fila 2 a la fila 1 diciendo:
x se transfiere a 10^x o

$x \longrightarrow 10^x$

Cuando pasamos de la fila 1 a la fila 2, ahora decidimos decir:

$\log 10^x \Rightarrow x$ entonces, definimos eso $\log 10^x = x$

En palabras: El logaritmo de 10^x es x, - y luego podemos insertar un número en lugar de x.

Ahora podemos resolver la ecuación

$y = 10^x$ teniendo el logaritmo a cada lado

$\log y = \log 10^x \quad \Leftrightarrow$

$\log y = x \quad \Leftrightarrow$

$x = \log y$

Si y es un número conocido, por ejemplo 100 (= 10^2), podemos leer en la tabla que acabamos de hacer que $\log 10^2 = 2$ y terminar teniendo

$x = 2$

Nuestra tabla sólo contiene unos pocos números, pero las tablas finas están programadas en CAS. Por ejemplo, podemos ingresar:

$\log 37 \approx 1{,}57$

Tenga en cuenta que todos los números de la fila 1 son positivos. Sólo podemos encontrar el logaritmo de números mayores que cero (> 0).

Hay más ventajas, ya que nos da la oportunidad de cambiar entre la fila 1 y 2. La multiplicación y división en la fila 1 se convierten en suma y resta en la fila 2, y viceversa.

Ejemplo I. $10^2 \cdot 10^3$ en la fila 1 se convierten en 2 + 3 en la fila 2. 2 + 3 es 5. Volviendo a la fila 1 encontramos la respuesta 10^5

Ejemplo II. $10^2 : 10^3$ en la fila 1 se convierte en 2 - 3 en la fila 2. 2 - 3 es -1. Volviendo a la fila 1, encontramos la respuesta 10^{-1}

Rara vez necesitamos lo contrario, pero intentemos:
-1 + 4 en la fila 2 se convierten en 10^{-1} y 10^4 en la fila 1. $10^{-1} \cdot 10^4$ es 10^3. Volviendo a la fila 2, leemos la respuesta: 3

Funciona.

Antes de CAS, usábamos una regla de cálculo basada en el logaritmo de decenas. Hoy tenemos CAS, por lo que ahora los logaritmos se usan principalmente para resolver ecuaciones exponenciales tal como empezamos.

Las reglas de cálculo para logaritmos de decenas son:

En lugar de números en el ejemplo I

$\log(10^2 \cdot 10^3) \;=\; 2 + 3 \;=\; \log 10^2 + \log 10^3$

Nosotras podemos usar letras:

$\log(a \cdot b) \;=\; \log a + \log b$ cual es la regla numero 1

En lugar de números en el ejemplo II

$\log(10^2 : 10^3) \;=\; 2 - 3 \;=\; \log 10^2 - \log 10^3$

Nosotras podemos usar letras:

$\log\left(\frac{a}{b}\right) \;=\; \log a - \log b$ cual es la regla numero 2

La última regla es, si el número de potencia no es 10 (o *e*). lo derivamos

$\log a^x \;=\; \log(10^{\log a})^x \;=\; \log 10^{x\log a} \;=\; x \cdot \log a \quad \Leftrightarrow$

$\log a^x \;=\; x \cdot \log a$ cual es la regla numero 3

Sólo existen estas reglas de cálculo para logaritmos.

El logaritmo natural

O el *e*-logaritmo.

Todo es como el logaritmo de las decenas, sólo que ahora el número base es *e*.

e^x	… e^{-2}	e^{-1}	e^0	e^1	e^2	e^3	e^4 …	$\ln e^x$
x	… -2	-1	0	1	2	3	4 …	x

y lo llamamos ln x que significa "logaritmo natural" o más idiomáticamente: "el logaritmo natural", ya que se encuentra en la naturaleza al igual que su número base *e*. Está claro que pasamos de la fila 2 a la fila 1 diciendo:

x se transfiere a e^x o

$x \longrightarrow e^x$

Cuando pasamos de la fila 1 a la fila 2, ahora decidimos decir:

$\ln e^x \longrightarrow x$ entonces, definimos eso $\ln e^x = x$

En palabras: El logaritmo natural de ex es x, - y luego podemos insertar un número en lugar de x.
Ahora podemos resolver la ecuación.
$y = e^x$ teniendo ln a cada lado

$\ln y = \ln e^x \quad \Leftrightarrow$

$\ln y = x \quad \Leftrightarrow$

$x = \ln y$

Si y es un número conocido, por ejemplo e^2, podemos leer en la tabla que acabamos de hacer que $\ln e^2 = 2$ y terminar teniendo $x = 2$

Nuestra tabla sólo contiene unos pocos números, pero las tablas finas están programadas en CAS. Por ejemplo, podemos ingresar:

$\ln 37 \approx 3{,}61$

Tenga en cuenta que todos los números de la fila 1 son positivos. Sólo podemos encontrar el logaritmo de números mayores que cero (>0).

Las reglas de cálculo son

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ cual es la regla numero 1

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ cual es la regla numero 2

$\ln a^x = x \cdot \ln a$ cual es la regla numero 3

Más teoría

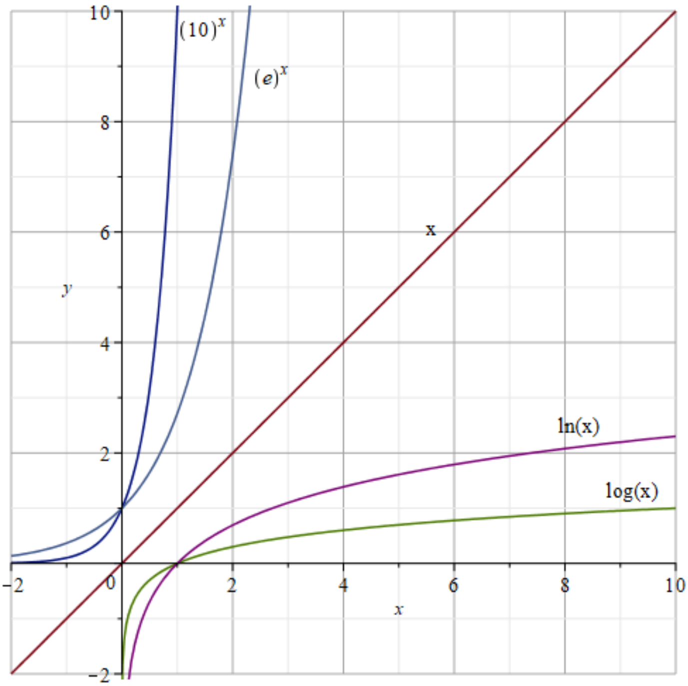
Como aparece arriba, 10^x y $\log x$ son funciones inversas.

$\log 10^x = x$ y $10^{\log x} = x$

En consecuencia, e^x y $\ln x$ son funciones inversas.

$\ln e^x = x$ y $e^{\ln x} = x$

Podemos mostrarlo en un diagrama, donde $y = x$ también se muestra para comparar, y vemos que $y = x$ es el eje de simetría, por lo que las curvas pueden reflejarse en este eje de simetría.



Aquí sólo escribimos el lado derecho de la expresión. No se puede malinterpretar, por eso está permitido.

Las funciones/curvas exponenciales se inclinan cada vez más, mientras que las funciones/curvas logarítmicas se inclinan cada vez menos cuando x aumenta.

Otras notaciones para la función logaritmo elevada a 2:

$(\log x)^2 = \log^2 x \qquad (\ln x)^2 = \ln^2 x$

En este libro utilizamos la primera notación. Algunos otros libros y tablas pueden usar la otra notación.

Ejemplos que utilizan la regla de cálculo 1

El signo ≈ significa que se utilizó CAS.

$\log 3 + \log 4 = \log (3 \cdot 4) = \log 12 \approx 1.079$ (log 12 es precisa)

$\log 4 + \log 25 \ = \ \log (4 \cdot 25) \ = \ \log 100 \ = \ 10$

$\log\left(\frac{2}{3}\right) + \log\left(\frac{3}{4}\right) \ = \ \log\left(\frac{2}{3} \cdot \ \frac{3}{4}\right) \ = \ \log\left(\frac{2}{4}\right) \ \approx \ -0.301$

$\log (10 \cdot \sqrt{10}\,) \ = \ \log 10 + \log \sqrt{10} \ = \ 1 + \log \sqrt{10} \ = \ 1.5$

$\ln 3 + \ln 4 \ = \ \ln (3 \cdot 4) \ = \ \ln 12 \ \approx \ 2.48$

$\ln 4 + \ln 25 \ = \ \ln (4 \cdot 25) \ = \ \ln 100 \ \approx \ 4.605$

$\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) \ = \ \ln\left(\frac{2}{3} \cdot \ \frac{3}{4}\right) \ = \ \ln\left(\frac{2}{4}\right) \ \approx \ -0.693$

$\ln (e \cdot \sqrt{e}\,) \ = \ \ln e + \ln \sqrt{e} \ = \ 1 + \ln \sqrt{e} \ = \ 1.5$

Ejemplos que utilizan la regla de cálculo 2

$\log 3 - \log 4 \ = \ \log\left(\frac{3}{4}\right) \ \approx \ -0.125$

$\log 4 - \log 25 \ = \ \log\left(\frac{4}{25}\right) \ \approx \ -0.796$

$\log\left(\frac{10}{\sqrt{8}}\right) \ = \ \log 10 - \log \sqrt{8} \ = \ 1 - \log \sqrt{8} \ \approx \ 0.549$

$\ln 3 - \ln 4 \ = \ \ln\left(\frac{3}{4}\right) \ \approx \ -0.288$

$\ln 4 - \ln 25 \ = \ \ln\left(\frac{4}{25}\right) \ \approx \ -1.83$

$\ln\left(\frac{e}{\sqrt{8}}\right) \ = \ \ln e - \ln \sqrt{8} \ = \ 1 - \ln \sqrt{8} \ \approx \ -0.0397$

Ejemplos que utilizan la regla de cálculo 3

$\log 3^4 \ = \ 4 \cdot \log 3 \ \approx \ 1.91$

$\log 10^{2x} \ = \ 2x \cdot \log 10 \ = \ 2x \cdot 1 \ = \ 2x$

$1 + \log \sqrt{10} \;=\; 1 + \log 10^{0,5} \;=\; 1 + 0.5 \cdot \log 10 \;=\; 1 + 0.5 \cdot 1 \;= 1.5$

$\log 10^3 - \log 10^2 \;=\; 3 - 2 \;=\; 1$

$\ln 3^4 \;=\; 4 \cdot \ln 3 \;\approx\; 4.39$

$\ln e^{2x} \;=\; 2x \cdot \ln e \;=\; 2x \cdot 1 \;=\; 2x$

$1 + \ln \sqrt{e} \;=\; 1 + \ln e^{0,5} \;=\; 1 + 0,5 \cdot \ln e \;=\; 1 + 0.5 \cdot 1 \;=\; 1.5$

Ejemplos con ecuaciones

$3^x \;=\; 27$	$\Leftrightarrow$	$\ln 3^x \;=\; \ln 27$	$\Leftrightarrow$
$x \cdot \ln 3 \;=\; \ln 3^3$	$\Leftrightarrow$	$x \cdot \ln 3 \;=\; 3 \cdot \ln 3$	$\Leftrightarrow$
$x \;=\; 3$			

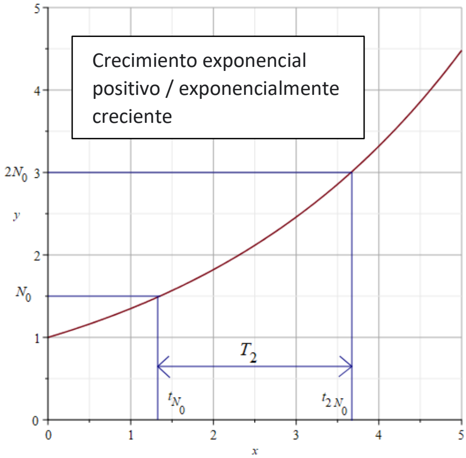
$1,8^{-2x} \;=\; 4$	$\Leftrightarrow$	$\ln (1,8^{-2x}) \;=\; \ln 4$	$\Leftrightarrow$
$-2x \cdot \ln 1.8 \;=\; \ln 4$	$\Leftrightarrow$	$x \;=\; \frac{\ln 4}{-2 \cdot \ln 1.8}$	$\Leftrightarrow$
$x \;\approx\; -1.18$			

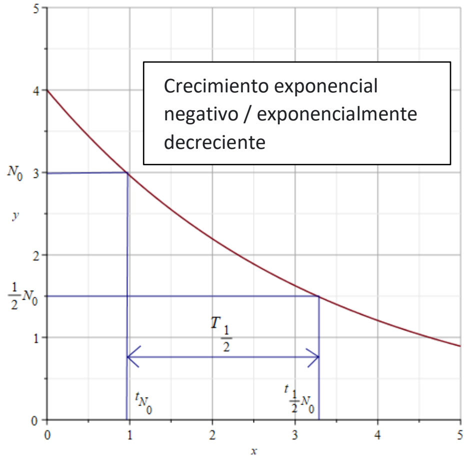
Aislaremos el tiempo, t, en la fórmula para el crecimiento exponencial.

$y \;=\; b \cdot e^{kt}$	$\Leftrightarrow$	$e^{kt} \;=\; \left(\frac{y}{b}\right)$	$\Leftrightarrow$
$\ln e^{kt} \;=\; \ln \left(\frac{y}{b}\right)$	$\Leftrightarrow$	$kt \;=\; \ln \left(\frac{y}{b}\right)$	$\Leftrightarrow$
$t \;=\; \frac{1}{k} \cdot \ln \left(\frac{y}{b}\right)$			

Por ejemplo, ese podría ser el momento del crecimiento de determinadas bacterias.

Más teoría





Ambas funciones mostradas tienen la ecuación $f(x) = b \cdot c^x = b \cdot a^{kx}$

Con funciones exponenciales, suele ser bueno saber cuándo las cosas se duplican o se reducen a la mitad. A menudo, el tiempo está en el primer eje, por lo que la constante de duplicación se denota T_2 y la constante de reducción a la mitad se denota $T_{½}$, y podemos derivar fórmulas para su cálculo. En el segundo eje tenemos aquí N para número. La condición de inicio es

$f(t_2) = 2 \cdot f(t) \quad \Rightarrow \quad b \cdot c^{t_2} = 2 \cdot b \cdot c^t \quad \Leftrightarrow$

$c^{t_2} = 2 \cdot c^t \quad \Leftrightarrow \quad c^{t_2 - t} = 2 \quad \Leftrightarrow$

$ln\, c^{t_2 - t} = ln\, 2 \quad \Leftrightarrow \quad (t_2 - t) \ln c = \ln 2 \quad \Leftrightarrow$

$t_2 - t = \frac{\ln 2}{\ln c} \quad \Leftrightarrow \quad T_2 = \frac{\ln 2}{\ln c} = \frac{\ln 2}{\ln a^k} \quad$ y

$f(t_{½}) = \frac{1}{2} \cdot f(t) \quad \Rightarrow \quad b \cdot c^{t_2} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c^t \quad \Leftrightarrow$

$c^{t_2} = \frac{1}{2} \cdot c^t \quad \Leftrightarrow \quad c^{t_2 - t} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$

$ln\, c^{t_2 - t} = ln\, \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (t_2 - t) \ln c = \ln \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$

$t_2 - t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln c} \quad \Leftrightarrow \quad T_{½} = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln c} = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln a^k}$

Otras funciones

Aquí discutiremos brevemente algunas funciones más raras.

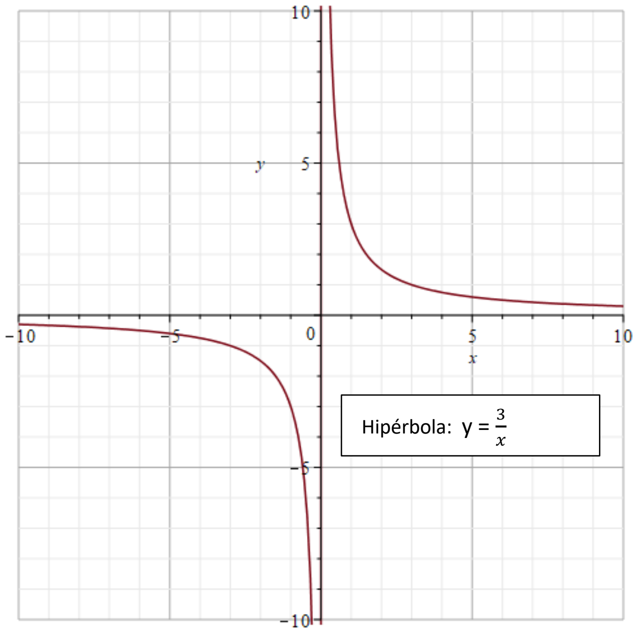
La hipérbola

La hipérbola (griego: exageración) tiene la ecuación

$$x \cdot y = k \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{k}{x} \quad \text{or} \quad x = \frac{k}{y}$$

donde k es una constante.

Se ve que ni x ni y pueden ser 0: la curva no puede pasar x = 0 o y = 0, por lo que el eje x y el eje y se convierten en asíntotas (lo que significa: no hay coincidencia) de la función (curva). La curva todavía se acerca al eje, pero nunca lo alcanzará.



Encontramos la hipérbola en la ley de Boyle-Mariotte (física) en la forma

$p \cdot V = k$ Sólo relevante en el primer cuadrante.

Lo que significa

presión · volumen = constante

válido a temperatura constante.

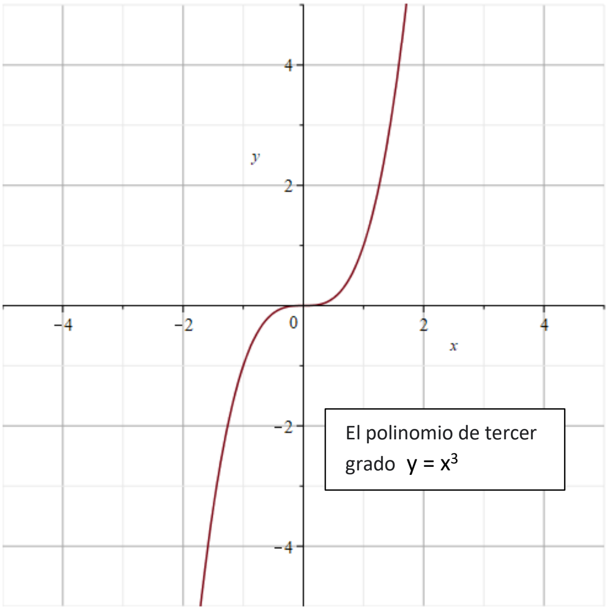
Como ni la presión absoluta ni el volumen pueden ser negativos, la curva sólo es relevante en el primer cuadrante.

En la técnica, la forma de hipérbola se aplica a sensores magnéticos rectificados especiales, y más.

El polinomio de tercer grado

El polinomio de tercer grado viene en muchas versiones, pero la función básica es

$y = x^3$



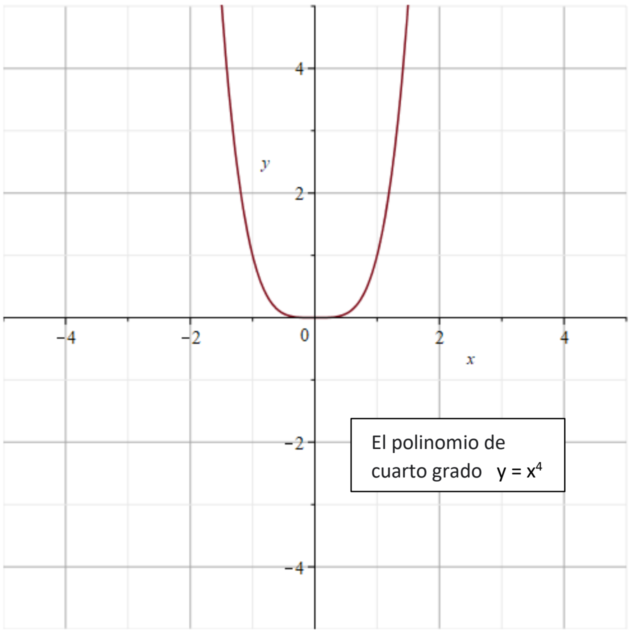
 ISBN 978-87-975307-2-6

Algunas leyes de la naturaleza son ecuaciones de tercer grado. Por ejemplo, la 3. Ley de Kepler que establece que el período, al cuadrado, es proporcional a su distancia promedio al sol, elevado a tres.

$T^2 = k \cdot r^3$ sólo relevante en el primer cuadrante

El polinomio de cuarto grado

$y = x^4$



Un polinomio de cuarto grado es raro. Un ejemplo en física es la Ley de radiación de Stefan-Boltzmann, que establece que la intensidad de la radiación de un cuerpo negro es igual a una constante multiplicada por la temperatura (en Kelvin) elevada a cuatro:

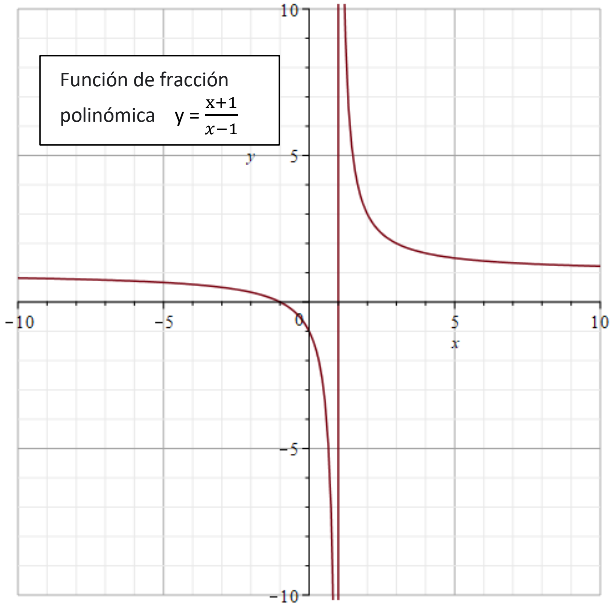
$I = k \cdot T^4$ sólo relevante en el primer cuadrante

Función de fracción polinómica

Algunas funciones son tan raras que es posible que no las conozcas. Sin embargo, pueden poseer características interesantes, lo que merece una breve observación. Por ejemplo, esta función de fracción polinómica:

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

El denominador no puede ser cero, por lo que x no puede ser 1. Por lo tanto, la curva no puede pasar x = 1, lo que en consecuencia se convierte en asíntota.
y = 0 debe ser si x = -1 ya que el numerador así será 0.
Por lo tanto, algunas cosas que podemos ver de antemano y mostrarlas:



Se observa que x = 1 es una asíntota vertical. Además, tenemos la sospecha de que y = 1 es una asíntota horizontal. Lo probaremos insertando y = 1 en la ecuación:

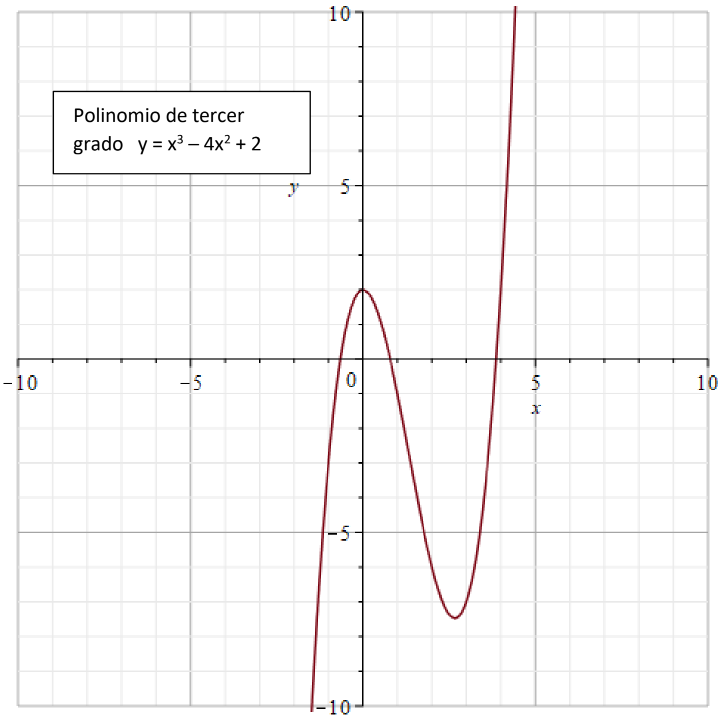
y = 1 => x - 1 = x + 1 ⇔ 0 = 2

lo cual es falso y, por lo tanto, y no puede ser 1. Esto significa que la curva no puede pasar y = 1, que por lo tanto es una asíntota horizontal.

Un ejemplo de un polinomio especial de tercer grado

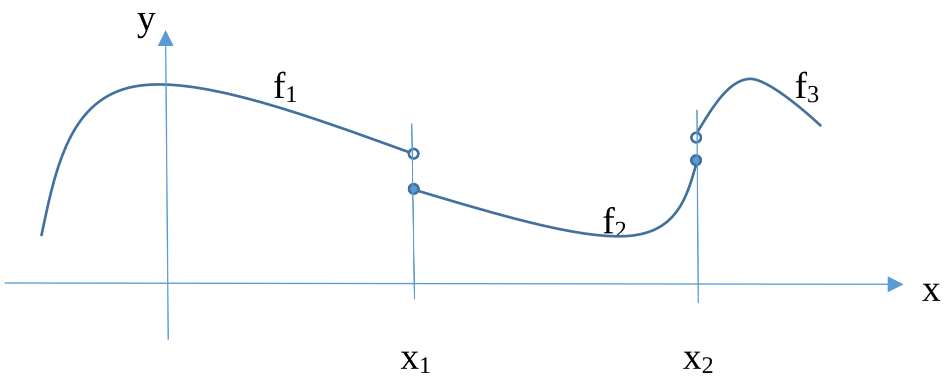
Finalmente, un polinomio de tercer grado, que es interesante porque tiene un máximo local y un mínimo local:

$y = x^3 - 4x^2 + 2$



Podemos leer fácilmente el punto máximo local: (0, 2)
El mínimo local sólo se puede leer de forma aproximada.
Más adelante, en el cálculo diferencial, veremos cómo se pueden calcular estos puntos con precisión.

Funciones parcialmente definidas



Entonces la función que se muestra está en tres partes, donde cada parte se define en un intervalo

$f_1(x)$ = ecuación de función en el intervalo: $]-\infty\ ;\ x_1[$

$f_2(x)$ = ecuación de función en el intervalo: $[x_1\ ;\ x_2\ ]$

$f_3(x)$ = ecuación de función en el intervalo: $]x_2\ ;\ \infty[$

Las partes también pueden tener nombres más diferentes como f, g y h.

Parte 3. Diferenciación e Integración

Introducción

Ahora vamos a rodear el rincón agudo, pero también muy hermoso, de las matemáticas. En concreto, vamos a investigar las cantidades que cambian, así como también cómo cambian. Nos lleva a nuevas formas de cálculo. Anteriormente, pasamos de las cuatro operaciones aritméticas básicas a las funciones trigonométricas (sen, cos, tan) y los logaritmos. Ahora ampliamos aún más y la única manera de entender esta nueva forma de cálculo es entendiendo las pruebas. El cálculo diferencial e integral debe entenderse mediante demostraciones.
Primero, sin embargo, un poco de filosofía e historia matemática. Los antiguos griegos descubrieron que no todo se prueba. Necesitamos un básico, al que llamaron axiomas, que significa básico. Desde lo básico en adelante, tenemos que demostrar que lo que hacemos es correcto.
Un punto no tiene extensión. ¿Existe entonces? Sí, es la respuesta, y por tanto tenemos un axioma. Si un punto no tiene extensión, ¿debe haber un número infinito de puntos en un área? Sí, este es otro axioma. Si el área es mayor, ¿contendrá aún más puntos? Sí. ¿Puede algo infinito ser más grande que otra cosa que también es infinita? Sí.
Una recta no tiene ancho, ni tampoco una parábola, un círculo o cualquier otra curva. Aquí tenemos una diferencia significativa entre las matemáticas y otras ciencias, por ejemplo la física. Imagínese una bola esférica situada sobre un avión. En matemáticas sólo hay contacto en un punto. En física, esto produciría una presión superficial infinita, lo que claramente no es así; ningún material podría soportar eso. El hecho físico es que

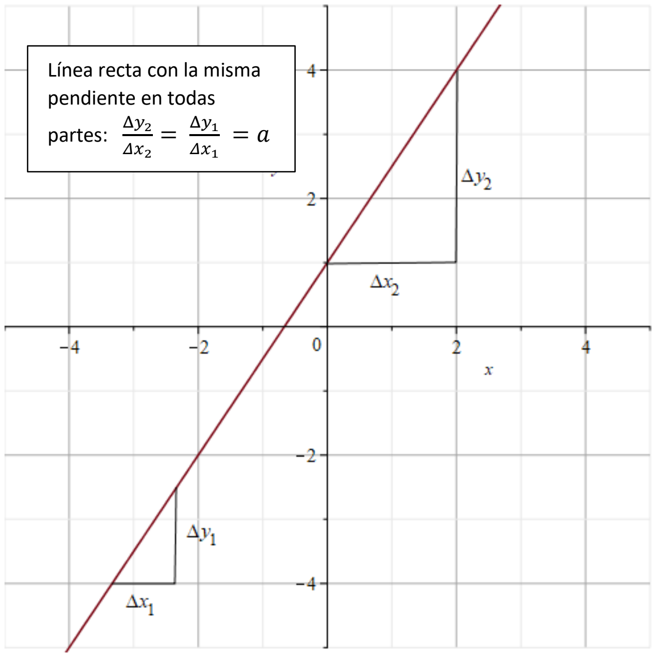
tanto la bola redonda como el avión se volverán se deforman y forman una superficie de contacto, no sólo un punto, y con ello forman una presión superficial que puede calcularse y medirse.
Los antiguos griegos probablemente no fueron los primeros en considerar estos temas, pero sabemos que pensaron en ello.
¿Podemos hablar de la velocidad en un punto o en un determinado momento en el tiempo? ¿Podemos hablar de la velocidad de reacción de una reacción química en un momento determinado? ¿O para el crecimiento biológico? ¿Y podemos hacer cálculos al respecto?
La respuesta es si y si. Los antiguos griegos no lograron encontrar la base matemática. No fue hasta el siglo XVII que lograron hacer demostraciones matemáticas. Sucedió casi al mismo tiempo para el físico Isaac Newton y el matemático Gottfried Leibnitz. Hasta donde sabemos, no se conocían en ese momento y sus enfoques eran diferentes. Newton necesitaba nuevas matemáticas para resolver problemas físicos, mientras que Leibnitz era un matemático teórico. Se trata de calcular diferencias/cambios en las proximidades de un punto, por eso recibe el nombre: cálculo diferencial. A continuación se dará una descripción más detallada del término técnico.
Ahora haremos el largo camino de demostrar el cálculo diferencial e integral, y veremos cuánto nos permite calcular, lo cual es completo.
No lo demostraremos todo, pero sí lo más importante.

A veces, el cálculo diferencial e integral se denomina cálculo infinitesimal, ya que calculamos partes infinitamente pequeñas cuando diferenciamos y recordamos el número infinito de partes infinitamente pequeñas cuando integramos.

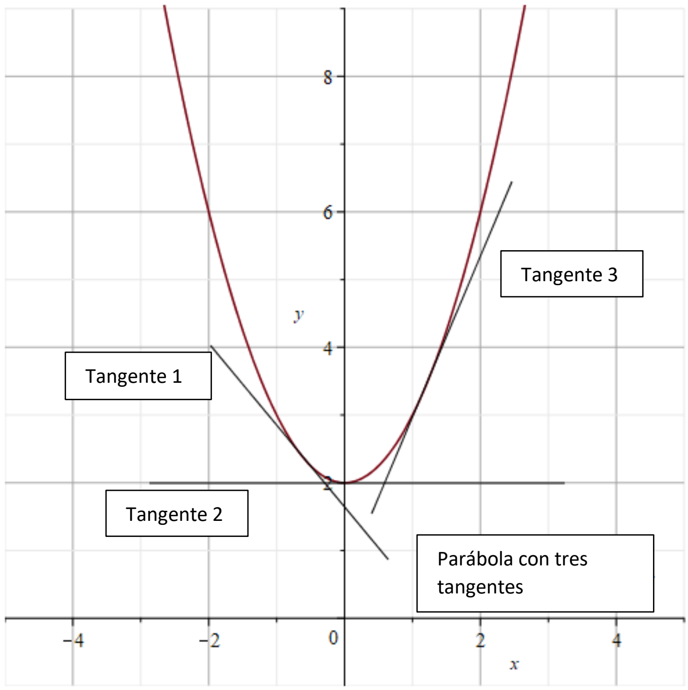
Calculo diferencial

La pendiente de una función/curva en un sistema de coordenadas describe el cambio de la cantidad en cuestión. Si la pendiente es cero (una línea horizontal), no hay cambio; tenemos un valor de y constante independientemente del valor de x.

Comencemos considerando la función lineal, donde la pendiente no cambia sin importar dónde nos encontremos en la recta. En otras palabras, la pendiente es la misma para todo x independientemente de que haya un cambio pequeño Δx_1 o un cambio grande Δx_2



Todas las demás funciones tienen diferentes pendientes en diferentes lugares, por ejemplo la parábola:

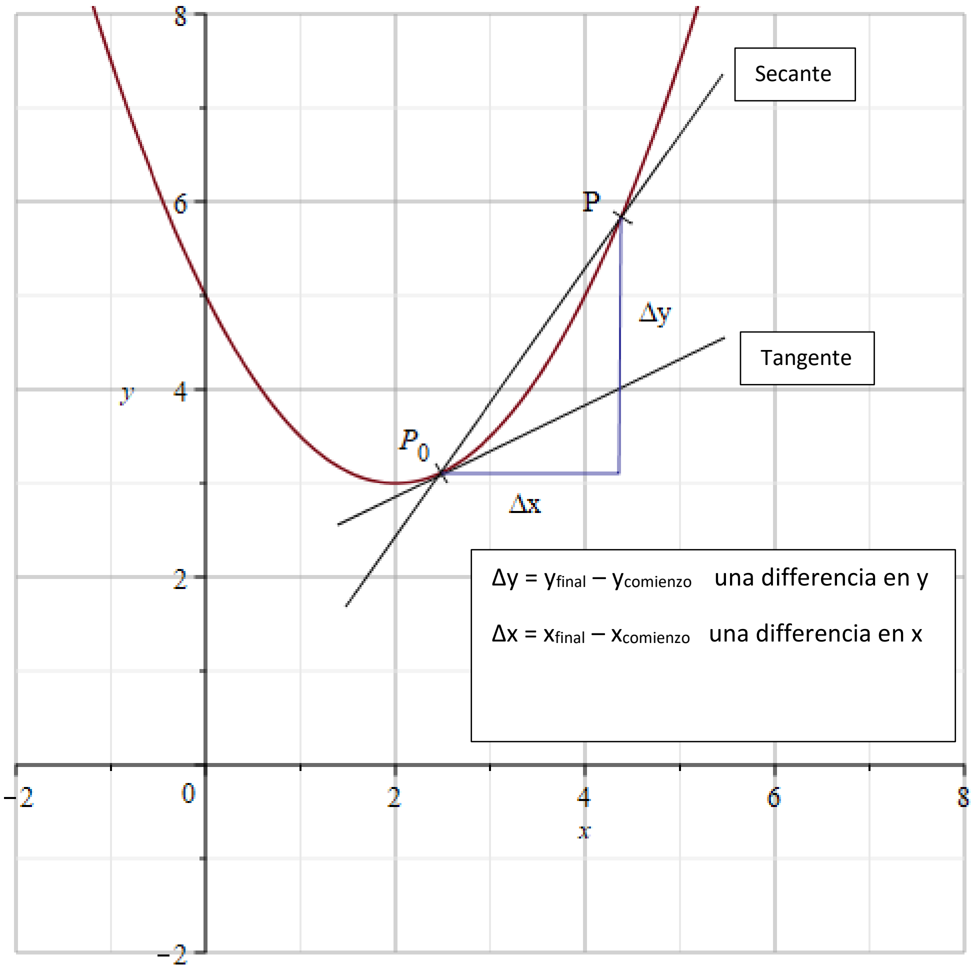


Se observa que, de izquierda a derecha, la parábola que se muestra tiene una pendiente negativa que disminuye a medida que avanzamos hacia el vértice, pendiente cero en el vértice y luego una pendiente positiva y creciente a medida que avanzamos hacia la derecha.

El ojo humano es agudo, por lo que podemos trazar una tangente en un punto de la parábola. La tangente sólo toca a la parábola en un punto. Es una tangente y podemos leer su pendiente con cierta incertidumbre. Sin embargo, nos gustaría ser precisos: ¿podemos encontrar la pendiente de la tangente mediante cálculo?

Si podemos determinar la pendiente de la tangente, también podemos determinar la pendiente de la curva en ese punto. Ellos son iguales. Ah, pero un punto no tiene extensión, entonces, ¿cómo podemos hablar de la pendiente de una curva en un punto y cómo podemos calcularla?

En el siguiente diagrama tenemos una parábola (podría ser cualquier curva) con una secante que se cruza en los puntos P_0 y P.



Además, hay un triángulo azul que muestra la pendiente de la secante $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Ahora imaginamos el punto P deslizándose hacia abajo por la parábola. De este modo la secante se deslizará con ella y tendrá una pendiente menor al acercarse al punto P_0. Cuando casi hemos llegado a P_0, la secante casi se convierte en tangente en P_0. Δx también se hace más pequeño y ahora se llama δx, mientras que Δy se convierte en δy.

Ahora hemos pasado de un mundo macro donde Δx y Δy son grandes y visibles (por eso usamos la letra griega Delta mayúscula, Δ) a un mundo micro donde δx y δy son infinitamente pequeños (por eso usamos la letra griega pequeño delta, δ).
Más tarde, d reemplazó a δ, que es el pequeño delta moderno en nuestro alfabeto. Así, hemos visto esto:

- P se desliza hacia abajo por la parábola y casi coincide con P_0
- La secante casi se vuelve tangente
- Δx se convierte en dx
- Δy se convierte en dy
- La pendiente secante $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se convierte en pendiente tangente $\frac{dy}{dx}$

Aunque P y P_0 están muy, muy cerca, no son el mismo punto. Por lo tanto, no tenemos ningún problema con el axioma que establece que un punto no tiene extensión y, por lo tanto, *en la práctica*, podemos hablar de la pendiente de una función en un punto.

macro $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se llama cociente de diferencias (= fracción de diferencia)

micro $\frac{dy}{dx}$ se llama coeficiente diferencial (= derivada)

En breve: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = pendiente secante = cociente de diferencias

$\frac{dy}{dx}$ = pendiente tangente = coeficiente diferencial

El siguiente paso es calcular la pendiente tangente $\frac{dy}{dx}$ para funciones conocidas siguiendo el mismo procedimiento que se acaba de mencionar.

Pruebas de cálculo diferencial 1

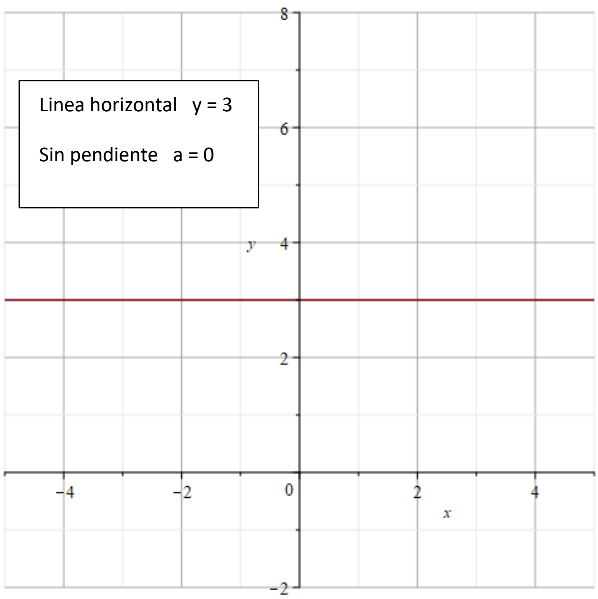
Hay algunos métodos. Usaremos *regla-tres-pasos*:

1. Calcular Δy
2. Calcular $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
3. Deje que Δx vaya hacia cero para encontrar $\frac{dy}{dx}$

We will begin with a horizontal line, of which we already know that the slope is 0. Thus, we expect to find a differential coefficient of 0.

La linea horizontal

$y = b$ o $y = \text{constante}$



1. Calcular Δy aquí: 0
2. Calcular $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ aquí: 0

3. Deje que Δx vaya hacia cero para encontrar $\frac{dy}{dx}$ aquí: 0

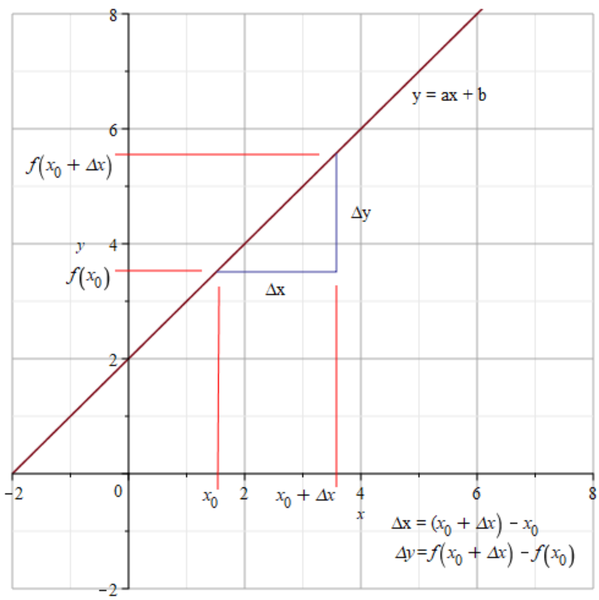
Entonces, cuando diferenciamos una constante obtenemos 0, es decir, pendiente = 0

En otras palabras: La diferencia de una constante es 0, no cambia. Como se esperaba.

La linea recta

Luego consideramos la línea recta, que ya sabemos que tiene la misma pendiente (es decir, a) y, por tanto, el mismo coeficiente diferencial en todas partes.

$y = ax + b$ o $f(x) = ax + b$



El diagrama muestra una línea recta y un triángulo auxiliar con una esquina en el valor de x: x_0. Más a la derecha, el valor de x se convierte en $x_0 + \Delta x$ (ya que estamos la distancia Δx más a la derecha).

Los valores de y correspondientes ahora se denominan valores de función: $f(x_0)$ y $f(x_0 + \Delta x)$

Regla-tres-pasos

1. Calcular Δy

   $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ =>

   Y con nuestros valores de x insertados en la ecuación lineal $y = ax + b$

   $\Delta y = [a(x_0 + \Delta x) + b] - [ax_0 + b]$ ⇔

   $\Delta y = a \cdot \Delta x$

2. Calcular $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

   $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a \cdot \Delta x}{\Delta x} = a$

3. Deje que Δx vaya hacia cero para encontrar dy/dx =>

   Δx se redujo de la ecuación del punto 2, por lo que Δx no tiene influencia en la pendiente. Se vuelve

   $\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$

   Se corresponde perfectamente con lo que ya sabemos, es decir, que una línea recta tiene la misma pendiente en todas partes. Aquí lo llamamos a, en otras ocasiones podemos llamarlo c o k para demostrar que es una constante.

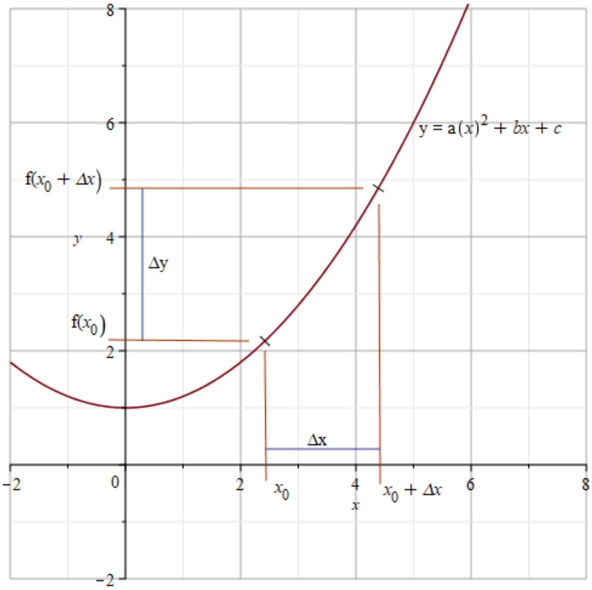
La pendiente tangente de una línea recta, que es igual al coeficiente diferencial $\frac{dy}{dx}$ de una línea recta, es igual al número (la constante) a.

El coeficiente diferencial también se llama f´(x). Entonces:

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = a$ la razón para usar también f´(x) se explica más adelante

La parábola

$y = ax^2 + bx + c \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = ax^2 + bx + c$



Regla-tres-pasos

1. Calcular Δy

   $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

   y con los valores de una parábola

   $\Delta y = (a(x_0+\Delta x)^2 + b(x_0+\Delta x)+c) - (ax_0^2+bx_0+c)$

   $\Delta y = (a(x_0^2+(\Delta x)^2 + 2x_0\Delta x)+bx_0+b\Delta x+c) - (ax_0^2+bx_0+c)$

   $\Delta y = ax_0^2 + a(\Delta x)^2 + 2ax_0\Delta x + bx_0 + b\Delta x + c - ax_0^2 - bx_0 - c$

   $\Delta y = a(\Delta x)^2 + 2ax_0\Delta x + b\Delta x$

2. Calcular $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(\Delta x)(\Delta x) + 2a \cdot x_0 \cdot \Delta x + b\Delta x}{\Delta x} = a\Delta x + 2ax_0 + b$$

3. Deje que Δx vaya hacia cero para encontrar $\frac{dy}{dx}$ =>

$\frac{dy}{dx}$ = 2ax + b   dado que x_0 cambia para que x describa todos los valores de x, no solo el que llamamos x_0

La pendiente tangente de una parábola, que es igual al coeficiente diferencial $\frac{dy}{dx}$, se convierte así en una ecuación:

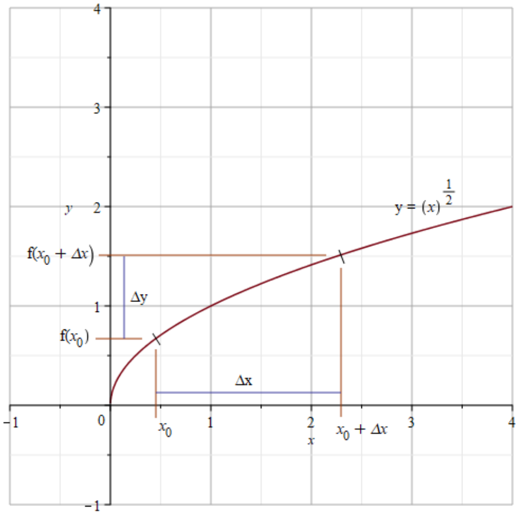
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2ax + b$$

a y b son constantes conocidas, mientras que x es variable.

La pendiente tangente depende de x. En otras palabras: la pendiente tangente depende de dónde nos encontremos en la parábola.

La función de raíz cuadrada

$y = \sqrt{x}$ o mejor $y = x^{½}$ ⇔ $f(x) = x^{½}$



Regla-tres-pasos

1. Calcular Δy

   $\Delta y \;=\; f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

   y con los valores de una función de raíz cuadrada

   $\Delta y \;=\; (x_0 + \Delta x)^{½} - x_0^{½}$

2. Calcular $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\Delta y \;=\; \frac{(x_0 + \Delta x)^{½} - x_0{}^{½}}{\Delta x}$$

Numerador y denominador multiplicado por $((x_0 + \Delta x)^{½} + x_0^{½})$

$$\Delta y \;=\; \frac{((x_0 + \Delta x)^{½} - x_0{}^{½})}{\Delta x} \cdot \frac{((x_0 + \Delta x)^{½} + x_0{}^{½})}{((x_0 + \Delta x)^{½} + x_0{}^{½})}$$

y usamos una regla cuadrada

$$\Delta y \;=\; \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x \cdot ((xo + \Delta x)^{½} + x_0{}^{½})} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Delta y \;=\; \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot ((x_0 + \Delta x)^{½} + x_0{}^{½})} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Delta y \;=\; \frac{1}{(x_0 + \Delta x)^{½} + x_0{}^{½}}$$

3. Deje que Δx vaya hacia cero para encontrar $\frac{dy}{dx}$ $\quad =>$

$$\frac{dy}{dx} \;=\; f'(x) \;=\; \frac{1}{2\,x^{½}} \;=\; \frac{1}{2}\,x^{-½}$$

x_0 cambiado a x

La pendiente tangente depende de x. En otras palabras: la pendiente tangente depende de dónde nos encontremos en la curva.

Polinomios

$y = x^n \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = x^n$ n también se llama a

Acabamos de ver el coeficiente diferencial de dos polinomios: la parábola y la función raíz cuadrada. ¿Qué pasa con los otros polinomios (x^3, x^4, $x^{2.3}$,…)?
Si simplificamos a $y = x^2$ el coeficiente diferencial será:

$$y = x^2 \quad => \quad \frac{dy}{dx} = 2x^1 = 2x$$

y para la función de raíz cuadrada

$$y = x^{½} \quad => \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-½}$$

En la práctica, estas dos funciones se diferencian "poniendo el exponente delante como factor y dejando que el exponente baje 1". Es fácil de ver en la parábola: “2 puesto al frente y dejado caer el exponente: 2 - 1 = 1”. Para la función de raíz cuadrada: “½ puesto al frente, y el exponente se convierte en ½ - 1 = -½”.

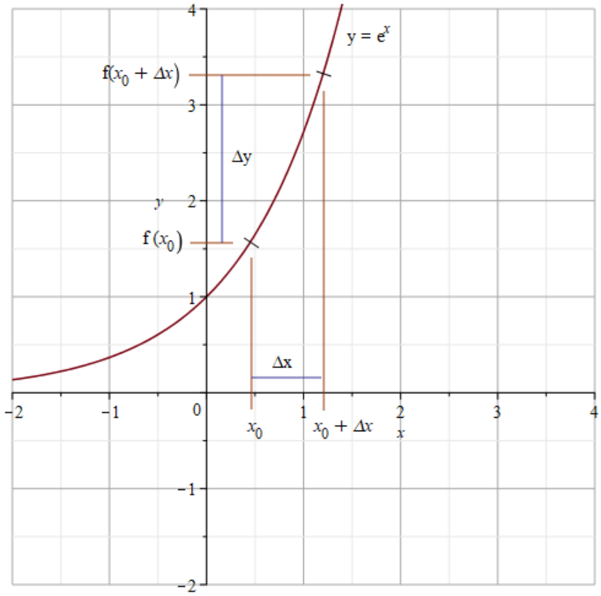
Todos los polinomios se diferencian de la misma manera:

$$y = x^n \quad => \quad \frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$ la regla del poder

Esto no lo probaremos.

La función exponencial natural

$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = e^x$



Regla-tres-pasos

1. Calcular Δy

   $\Delta y \ = \ f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
   y con los valores de la función

   $y \ = \ e^{xo+\Delta x} - e^{xo}$

2. Calcular $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{xo+\Delta x} - e^{xo}}{\Delta x} = e^{xo} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

3. Deje que Δx vaya hacia cero para encontrar $\frac{dy}{dx}$
   En la expresión que encontramos en el punto 2, vemos que exo no cambia si Δx se acerca a 0. Si miramos la fracción $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ y dejemos que Δx vaya hacia 0,

$e^{\Delta x}$ irá hacia 1, y, por tanto, el numerador irá hacia 0.
El denominador también irá hacia 0.
Sin embargo, no podemos ver hacia qué valor se dirige la fracción completa. Necesitamos más información:
Esto lo obtenemos de la definición misma de la función $y = e^x$ donde:

$x_0 = 0$ insertado en $e^{xo} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ es una dependiemte de 1:

$x_0 = 0 \quad => \quad 1 \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$

Eso sólo puede suceder si la fracción se acerca a 1.

Conjunta $e^{xo} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ va hacia $e^{xo} \cdot 1$ cuando Δx va hacia 0 =>

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = e^x$ $\qquad$ x_0 combiado a x

e es el número de Euler (el número base del logaritmo natural) que se conoce, mientras que x es variable.
La pendiente tangente depende de x. En otras palabras: la pendiente tangente depende de dónde nos encontremos en la curva.

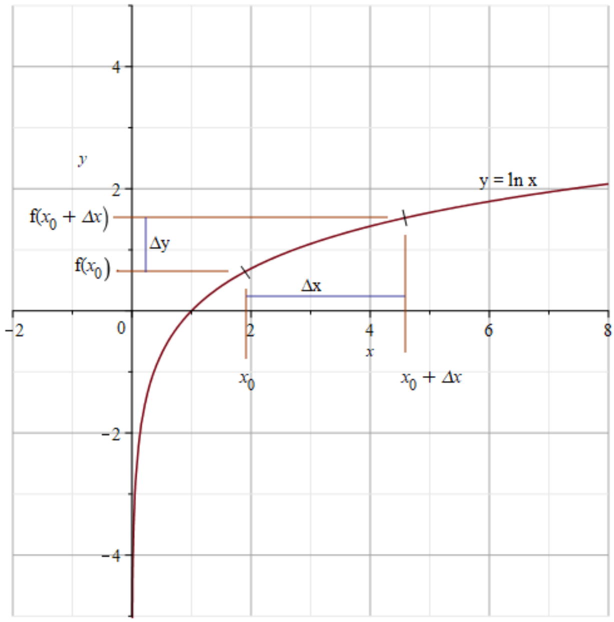
Tenga en cuenta que la pendiente tangente de la función e^x es e^x

$f(x) = e^x$ $\quad$ y $\quad$ pendiente tangente $= \frac{dy}{dx} = f'(x) = e^x$

Ninguna otra función tiene esta característica.

El logaritmo natural

$y = \ln x$ $\quad$ o $\quad$ $f(x) = \ln x$



Regla-tres-pasos

1. Calcular Δy

   $$\Delta y \; = \; f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

   y con los valores de la función

   $$\ln (x_0 + \Delta x) - \ln x_0 \; = \; \ln \left(\frac{x_0+\Delta x}{x}\right)$$

2. Calcular $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln\left(\frac{x_0+\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x}$$

   Aquí debemos separar la fracción $\left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)$ para ver qué sucede cuando dejamos que Δx vaya hacia 0. Lo hacemos llamando a la fracción k:

   $$\frac{\Delta x}{x_0} = k \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta x \; = \; kx_0 \qquad =>$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(1+k)}{kx_0} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln(1+k)}{k}$$

3. Deje que Δx vaya hacia cero para encontrar $\frac{dy}{dx}$ Ahora vemos que cuando Δx va hacia 0, k también irá hacia 0. Esto significa que tanto el numerador como el denominador en $\frac{\ln(1+k)}{k}$ van hacia 0, pero no podemos ver hacia qué valor se dirige la fracción. , entonces necesitamos más información:
Obtenemos esto recordando que la función ln es la inversa de la función ex y, por lo tanto, tiene la pendiente 1 para $x_0 = 1$:
$x_0 = 1$ insertado en $\frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln(1+k)}{k}$ es una pendiente de 1:
$x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{\ln(1+k)}{k} = 1$
Esto sólo puede suceder si la fracción se acerca a 1.
Conjunto $\frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln(1+k)}{k}$ va hacia $\frac{1}{x_0} \cdot 1$ cuando k y por tanto Δx van hacia 0 =>

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ x_0 combiado a x

La pendiente tangente depende de x. En otras palabras: la pendiente tangente depende de dónde nos encontremos en la curva.

Generalmente, otra forma de escribir el paso 3 es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

lim significa limas, que en latín significa límite. Por eso dice:
El valor límite del cociente de diferencias $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx tiende a 0 es el coeficiente diferencial $\frac{dy}{dx}$

Notaciones

Un coeficiente diferencial se puede escribir de muchas maneras. En algunos casos es preferible una forma y en otros es preferible otra.
El núcleo del mismo es:
$\frac{dy}{dx}$ = coeficiente diferencial = ecuación para la pendiente tangente

y luego todas las demás notaciones:
Una función a menudo se llama y o y(x), o f(x), o simplemente f. Por lo tanto, el coeficiente diferencial a menudo se denomina y´, o f´(x), o f´.
Si solo usamos y o f, se entiende que sabemos cuál es el nombre de la incógnita, a menudo x. Por supuesto, la variable puede ser otra cosa, como por ejemplo t para el tiempo, y la función puede llamarse de cualquier otra manera que no sea f.

En CAS a menudo tenemos $\frac{\mathrm{d}}{dx}y$ o $\frac{d}{dx}f(x)$ donde también se puede insertar la función/ecuación, por ejemplo $\frac{\mathrm{d}}{dx}(x^2+x)$.
Combinados tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{d}}{dx}y = \frac{d}{dx}f(x) = y' = f'(x) = f'$$

Todos expresan lo mismo, es decir, el coeficiente diferencial, es decir, la ecuación de la pendiente tangente, que nos informa sobre cómo cambia la función.

En palabras

Coeficiente diferencial = la primera derivada

(como veremos más adelante, podemos derivar una vez más y obtener la segunda derivada).

Diferenciación y las cuatro operaciones aritméticas básicas.

Quizás tengamos una función por partes combinada por las cuatro operaciones aritméticas básicas (suma, diferencia, producto, división). ¿Cómo encontramos la ecuación para la pendiente de la función, es decir, el coeficiente diferencial, en tal caso?

Aquí la función completa se llama y o f, mientras que las partes de una función se llaman u y v, entonces se deben evitar errores.

Suma.

$y(x) = u(x) + v(x)$ ⇔ o breve

$y = u + v$ => se diferencia a

$y' = (u + v)' = u' + v'$

La función se diferencia parte por parte.

$y = u + v$

si x cambia en Δx, toda la función y tendrá un cambio de Δy, mientras que las partes de las funciones tendrán un cambio: Δu y Δv =>

$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v)$ ⇔

$u + v + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$ ⇔

$\Delta y = \Delta u + \Delta v$ => de macro a micro

$dy = du + dv$ ⇔ dividido por dx

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ ⇔ o

$y' = u' + v'$ ⇔

$y' = (u + v)' = u' + v'$ por tanto, diferenciación parte por parte

Ejemplo

$y = 3x^2 + \ln x$ => $y' = 6x + \frac{1}{x}$

Diferencia (resta).

$y(x) = u(x) - v(x)$ o breve

$y = u - v$ => diferenciado

$y' = (u - v)' = u' - v'$

La función se diferencia parte por parte.

La prueba es similar a la prueba de la suma, sólo que v es menos.

Ejemplo

$y = 3x^2 - \ln x$ => $y' = 6x - \frac{1}{x}$

Producto (multiplicación)

$y = u \cdot v$ => diferenciado

$y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ que se llama fórmula del producto

Prueba:

$y = u \cdot v$

si x tiene un cambio de Δx, toda la función y tendrá un cambio de Δy, mientras que las partes de la función cambiarán: Δu y Δv =>

$y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v)$ ⇔

$u \cdot v + \Delta(u \cdot v) = u \cdot v + u \cdot \Delta u + \Delta u \cdot v + \Delta u \cdot \Delta v$ ⇔

$\Delta(u \cdot v) = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$ =>

dado que $\Delta u \cdot \Delta v$ es infinitesimal (ilimitadamente pequeño), la parte puede omitirse. Entonces, cuando pasamos de macro a micro, tenemos

$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$ => dividido por dx

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} \quad =>$$

$y' = (u \cdot v)' = u \cdot v' + v \cdot u'$ the product formula

Ejemplo

$y = 3x^2 \cdot \ln x$ => $y' = 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 6x \cdot \ln x$

División

$y = \frac{u}{v}$ => diferenciado

$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ which is called the quotient formula

Prueba:

$$y = \frac{u}{v}$$

si x tiene un cambio de Δx, toda la función y tendrá un cambio de Δy, mientras que las partes de la función cambiarán: Δu y Δv =>

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} \quad =>$$

$$\frac{u}{v} + \Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v(u + \Delta u)}{v(v + \Delta v)} - \frac{u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot u + v \cdot \Delta u - u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)} \quad \Leftrightarrow$$

$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}$ como $v \cdot \Delta v$ es infinitesimal tenemos

$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v^2}$	=>	de macro a micro
$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$	⇔	Dividida por dx

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$ la fórmula del cociente

Example

$$y = \frac{3x^2}{\ln x} \quad => \quad \frac{6x \cdot \ln x - x^{-1} \cdot 3x^2}{(\ln x)^2}$$

Diferenciación de funciones compuestas.

Si x tiene “roles” más que las cuatro reglas de las operaciones aritméticas, hablamos de una función compuesta.

La forma más sencilla de diferenciar una función compuesta es mediante la regla de la cadena, que derivamos

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy \cdot du}{dx \cdot du}$ ⇔ extensión por factor du

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy \cdot du}{du \cdot dx}$ ⇔

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ la regla de la cadena

Así dividimos la función en los dos “roles” que tiene x, los diferenciamos uno por uno y los reunimos mediante multiplicación.

Ejemplos

1.

$y = (x^2 + 1)^3$

aquí elegimos llamar a la función "interna" u =>

$\frac{du}{dx} = \frac{d(x^2+1)}{dx} = 2x + 0$

y la función exterior y =>

$\frac{dy}{du} = \frac{d(u^3)}{du} = 3u^2 = 3(x^2 + 1)^2$

Combinado

$2x \cdot 3(x^2 + 1)^2$ que se reduce a $6x \cdot (x^2 + 1)^2$

O brevemente:

$y = (x^2 + 1)^3$ ⇔

dif. interior	$2x$
dif. exterior	$3(x^2 + 1)^2$
combinado	$2x \cdot 3(x^2 + 1)^2$

2.

$y = \ln (x^2 - x)$ ⇔

dif. Interior	$2x - 1$
diff. exterior	$\frac{1}{x^2 - x}$
combinado	$\frac{2x-1}{x^2 - x}$

Para obtener información, la regla de la cadena se puede ampliar a, por ejemplo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

lo que lo hace aún más útil. Sin embargo, no vamos más allá.

Más teoría

Con respecto a la notación en algunas tablas, consideramos la función compuesta una vez más usando la regla de la cadena y luego modificamos la notación.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad =>$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x))}{d(g(x))} \cdot \frac{d(g(x))}{dx} \qquad \Leftrightarrow$$

$$y' = \frac{d}{d(g(x))} f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x) \qquad \Leftrightarrow$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Algunas tablas usan f y g tanto para la función completa como para las partes de la función, como es el caso aquí.
Como vemos, la derivación es un poco engorrosa, pero terminamos en lo mismo: sólo tenemos que diferenciar interior y exterior y multiplicar los dos.

Pruebas de cálculo diferencial 2

Utilizando las nuevas fórmulas que acabamos de lograr, ahora podemos realizar algunas pruebas más.

Diferenciación de e^{kx}

$y = e^{kx}$ o $f(x) = e^{kx}$

se diferencia como una función compuesta:

"interior", que es kx dif. a k

"exterior", que es la función e dif. a e^{kx}

Combinado $\frac{dy}{dx} = f'(x) = k \cdot e^{kx}$

La función exponencial

$y = a^x$ o $f(x) = a^x$

reordenada $y = (e^{\ln a})^x \Leftrightarrow y = e^{x \cdot \ln a}$

y diferenciada como una función compuesta:

"interior", que es $x \cdot \ln a$ dif. a $\ln a$

"exterior", que es la función e dif. a $e^{x \cdot \ln a} = a^x$

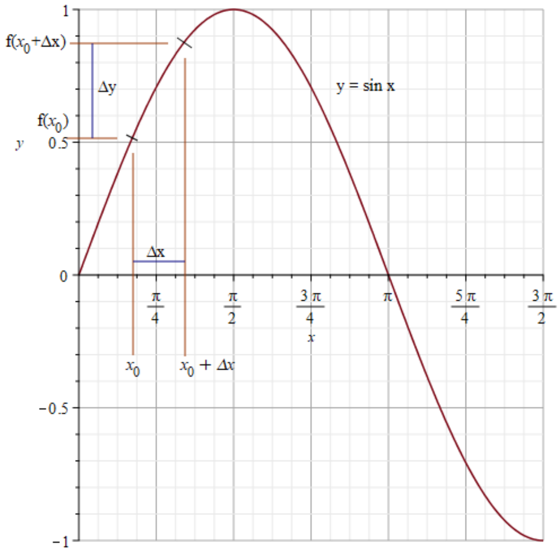
combinado $\frac{dy}{dx} = f'(x) = a^x \cdot \ln a$

La función sinus

$y = \sin v \Leftrightarrow f(v) = \sin v$ ángulo v en grados

o

$y = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \sin x$ ángulo v en radián



Nuevamente usaremos la regla de los tres pasos:

Regla-tres-pasos

1. Calcular Δy

   $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

   y con los valores de la función

   $\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0$

2. Calcular $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x}$$

   Se puede demostrar que (no lo mostramos, solo lo usamos):

   $\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$ =>   aquí

$$\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\cdot\cos\frac{(x_0+\Delta x)+x_0}{2}\cdot\sin\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{2}$$

$$\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\cdot\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$

insertada

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cdot\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

La dividimos por 2 en numerador y denominador.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

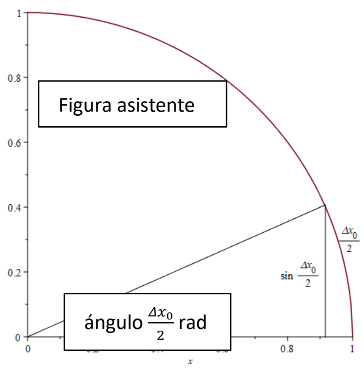
y dividirse en dos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

3. Deje que Δx vaya hacia cero para encontrar $\frac{dy}{dx}$

$\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})$ va hacia $\cos x_0$

$\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ va hacia 1, ya que $\frac{\Delta x}{2}$ en el círculo unitario es tanto un ángulo en radianes como la longitud del arco del ángulo. Cuando Δx va hacia 0 (los ángulos se hacen más pequeños), el sinus del ángulo y la longitud del arco irán hacia el mismo valor. Vea la figura:



Combinados iremos hacia cos x_0 =>

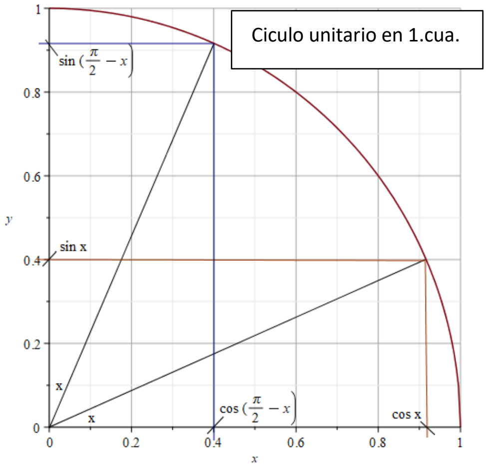
$\frac{dy}{dx}$ = f´(x) = cos x x_0 cambia a x

La pendiente tangente depende del ángulo x (aquí en radianes). En otras palabras: la pendiente tangente depende de dónde nos encontremos en la curva sinus.

La función cosinus

y = cos x ⇔ f(x) = cos x

El sinus y el cosinus están relacionados y uno podría reescribirse como el otro. Aquí hay un ejemplo:



El ángulo x (aquí en radianes) está marcado con respecto al eje x y relacionado con el eje y. Se ve que

cos x = sin $(\frac{\pi}{2} - x)$

Entonces, en lugar de derivar cos x , podemos derivar sin $(\frac{\pi}{2} - x)$. Lo hacemos diferenciando exterior e interior.

$$\frac{dy}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot(-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

como se ve en la figura es igual a - sen x =>

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = -\sin x$$

La pendiente tangente depende del ángulo x (aquí en radianes). En otras palabras: la pendiente tangente depende de dónde nos encontramos en la curva del cosinus.

La funcion tangente

$y = \tan x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \tan x$ ángulo x en radianes

Usamos la definición de tangente.

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

y la fórmula del cociente

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{(\sin x)'\cdot \cos x - (\cos x)'\cdot \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x\cdot \cos x - (-\sin x)\cdot \sin x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} \quad \text{or} \quad 1 + (\tan x)^2$$

Así, hay dos respuestas similares expresadas de manera diferente:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$$

Encuesta

Ahora hemos sentado las bases para el cálculo diferencial demostrando y derivando muchas cosas. Así, también hemos sentado las bases para el cálculo integral, que describiremos más adelante.

La encuesta es:

functión	*derivada de función* *(diferenciación de funciones)*
y o f(x)	$\frac{dy}{dx}$ o f´(x)
constante (c, k, a, o....)	0
ax + b	a
$ax^2 + bx + c$	2ax + b
$x^{½}$ or $\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}x^{-½}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
e^x	e^x
ln x	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
sin x	cos x
cos x	- sin x
tan x	$\frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$

y = u + v	=>	y´ = (u + v)´ = u´+ v´
y = u - v	=>	y´ = (u - v)´ = u´- v´
y = u · v	=>	y´ = (u·v)´ = u´·v + u·v´
$y = \frac{u}{v}$	=>	$y´ = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u´·v - v´·u}{v^2}$
y = y(u(x))	=>	$y´ = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$
y = f(g(x))	=>	y´= (f(g(x)))´ = f´(g(x)) · g´(x)

Las dos últimas fórmulas expresan lo mismo.

Ejemplos

1.

Soluciones con palabras clave. Los primeros ejemplos dan una respuesta en notación alternativa:

$f(x) = 2x^2$	=>	f´(x) = 4x	exponenciación
f = 2x	=>	f´ = 2	exponenciación
y = 2	=>	y´ = 0	exponenciación
f(x) = 2a + 7	=>	f´(x) = 0	constantes
y = 2k + 117	=>	$\frac{dy}{dx} = 0$	constantes
f(x) = 2a + 3b	=>	$\frac{d}{dx}$ f(x) = 0	constantes

$f(x) = 4x^3 + 2 \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 12x^2 + 2\cdot\frac{1}{x}$ termino por termino

$y = 4x^3 + a\cdot\ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 12x^2 + a\frac{1}{x}$ termino por termino

$y = 4x^3 + \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}y = 12x^2 + \frac{1}{x}$ termino por termino

$4x^3 - \ln x \quad \Rightarrow \quad 12x^2 - \frac{1}{x}$ termino por termino

$4x^3 \cdot \ln x \quad \Rightarrow \quad 12x^2 \cdot \ln x + 4x^3 \cdot \frac{1}{x}$ producto

$\frac{4x^3}{\ln x} \quad \Rightarrow \quad \frac{12x^2\cdot\ln x - 4x^3\cdot x^{-1}}{(\ln x)^2}$ cosiente

$x^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}$ exp.

$x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} - 4) = x - 4x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot x^{-\frac{1}{2}} = 1 - 2x^{-½}$ termino p.t.

$\frac{x}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1(x+1)-x(1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$ cosiente

$(e^x - 2x)^3 \quad \Rightarrow \quad 3(e^x - 2x)^2 \cdot (e^x - 2)$ ext. - int.

$6^{-x} \quad \Rightarrow \quad 6^{-x} \cdot \ln 6 \cdot (-1)$ ext. – int.

$xe^x - 1 \quad \Rightarrow \quad (1\cdot e^x + x\cdot e^x) - 0 = e^x(1 + x)$ product

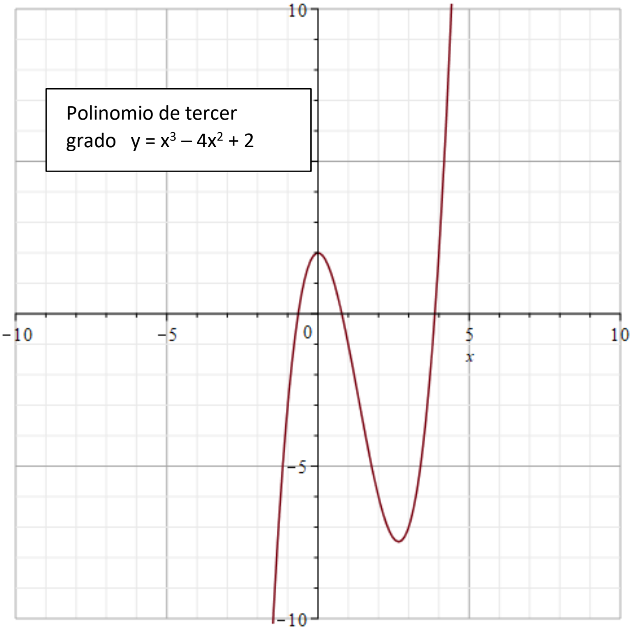
$f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) + k \quad \Rightarrow$

$f'(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)\cdot \omega + 0$ externa, interna y k a 0

2.

Ahora podemos calcular los máximos y mínimos locales (combinados llamados valores extremos), etc. en una función mencionada anteriormente.

(Una investigación de una función consiste en encontrar dónde aumenta/disminuye, tiene un máximo/mínimo y tal vez asíntotas).



Lo hacemos encontrando los lugares donde la pendiente tangente es cero, lo que significa los lugares donde el coeficiente diferencial es cero.

$y = x^3 - 4x^2 + 2$ $\Rightarrow$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2\cdot 4x + 0 = 0$ $\Leftrightarrow$

$3x^2 - 8x = 0$ $\Leftrightarrow$

$x(3x - 8) = 0$ $\Leftrightarrow$

$x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{8}{3}$ e insertado en la función

$y_1 = 2$ y $y_2 = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 2 = -\frac{202}{27} \approx -7.48$ $\Rightarrow$

hay valores extremos en puntos $(0, 2)$ y $\left(\frac{8}{3}, -\frac{202}{27}\right)$

En la curva vemos que (0, 2) es un máximo local y $\left(\frac{8}{3}, -\frac{202}{27}\right)$ es un mínimo local y que se corresponde muy bien con una lectura.

Si CAS no está disponible, debemos investigar la función antes, entre y después de los dos valores de x para decidir si es un mínimo o un máximo. Lo hacemos por

- inserción de, por ejemplo, -1 en el coeficiente diferencial =>
  $y = 3\cdot(-1)^2 - 8(-1) = 11$ que es una pendiente positiva que muestra que la función aumenta
- inserción de, por ejemplo, +1 en el coeficiente diferencial =>
  $y = 3\cdot(1)^2 - 8(1) = -5$ que es una pendiente negativa que muestra que la función disminuye
- e inserción de, por ejemplo, +3 en el coeficiente diferencial =>
  $y = 3\cdot(3)^2 - 8(3) = 3$ que es una pendiente positiva que muestra que la función vuelve a aumentar

Por lo tanto, (0, 2) es un máximo local y $\left(\frac{8}{3}, -\frac{202}{27}\right)$ es un mínimo local.

3.

Anteriormente vimos la parábola.

$h(x) = -x^2 - 3$

y encontramos su vértice: T $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$ = T (0, -3)

También podemos encontrar el vértice mediante el coeficiente diferencial:

En el vértice la pendiente tangente es 0 (horizontal), por lo tanto el coeficiente diferencial es 0. Usamos esta información:

$h'(x) = -2x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0$

que se inserta en la ecuación de la parábola para encontrar el valor de y

$h(x) = -0^2 - 3 = -3 \qquad \Rightarrow \qquad T(0, -3)$

misma respuesta.

4.

Una fábrica produce una herramienta de medición especial que se vende a 300 libras cada una. La ganancia es igual a los ingresos menos los gastos.

$P = I - E$

El mercado no puede saturarse, por lo que I es igual al precio de un artículo multiplicado por el número de artículos, x

I = precio · número de vendidos (= número producido) = 300 · x

Los gastos se dividen en costos fijos (principalmente equipos nuevos) y costos variables (gastos de operación). Se estima que

$E = F + V = (10\,000) + (11 \cdot x + x^2)$

11x son gastos proporcionales a la cantidad de artículos producidos, mientras que x^2 eventualmente se vuelve significativo ya que el equipo de producción está desgastado.

¿Cuál es el gasto por artículo producido?
¿Cuándo será máxima la ganancia por artículo producido?
¿Cuándo la producción será deficitaria?

El gasto por artículo es:

$\frac{E}{x} = \frac{10\,000+11x+x^2}{x}$

La ganancia por artículo producido es máxima cuando

$\frac{E}{x}$ = f(x) es mínimo, lo que ocurre cuando la pendiente, es decir, el coeficiente diferencial es cero: $\left(\frac{E}{x}\right)' = 0$ =>

$\left(\frac{E}{x}\right)' = \frac{(11+2x)\cdot x-1\cdot(10\,000+11x+x^2)}{(x)^2} = 0$ ⇔ CAS

x = 100 (o x = -100 que no se puede utilizar)

Por lo tanto, el beneficio por artículo producido es máximo para el artículo 100.

Seguramente, la producción da un déficit al principio, y luego, cuando el desgaste se vuelve severo. Estos dos puntos se derivan de la igualdad entre beneficio por artículo y gastos por artículo:

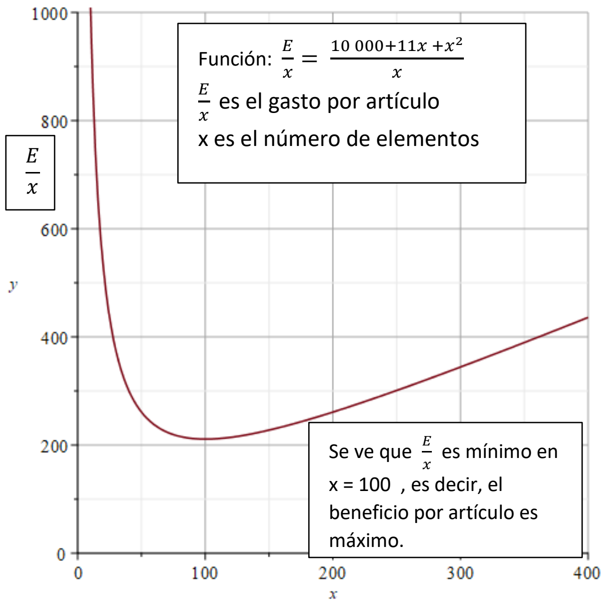
$300 = \frac{E}{x}$ =>

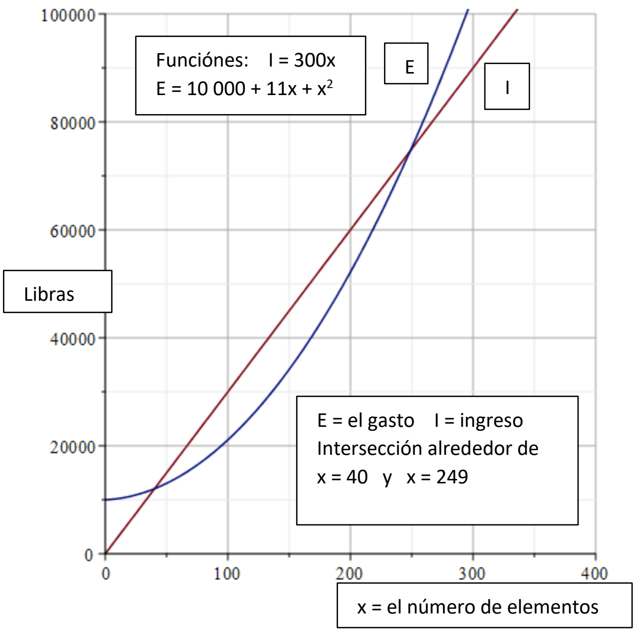
$300 = \frac{E}{x} = \frac{10\,000+11x+x^2}{x}$ ⇔ CAS

x ≈ 40 y x ≈ 249

Por lo tanto, déficit hasta que hayamos producido 40 artículos, ganancia hasta que se produzcan 249 artículos y déficit a partir de entonces.

Veamos una descripción general en diagramas:





Los cálculos y las lecturas coinciden muy bien.

5.

Una caída libre es lineal y con una aceleración constante (dentro de unos límites), si excluimos la resistencia del aire. Galilei dedujo la siguiente ley de la naturaleza alrededor del año 1600: Si tenemos t para el tiempo, s para la posición (estiramiento), v para la velocidad y g para la aceleración de la gravitación, encontró la fórmula

$$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Aproximadamente 100 años después, cuando Newton derivó el cálculo diferencial para que fuera posible calcular en “puntos”, continuó el trabajo de Galilei y comenzó por definir:

La velocidad momentánea: $v = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{ds}{dt}$

y la aceleración momentánea: $a = \frac{\text{velocidad}}{\text{tiempo}} = \frac{dv}{dt}$

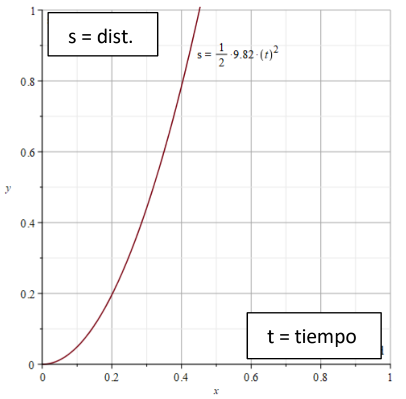
Así, cuando la ecuación de la distancia se deriva una vez con respecto al tiempo, obtenemos la velocidad, y cuando se deriva la segunda vez con respecto al tiempo, obtenemos la aceleración:

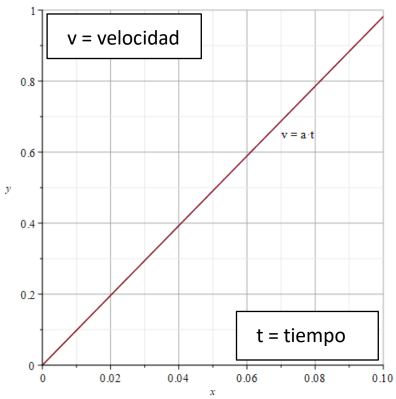
$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ la ecuación de una parábola =>

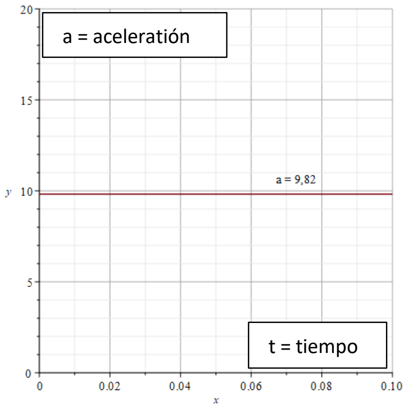
$v = \frac{ds}{dt} = a \cdot t$ la ecuación de una línea recta =>

$a = g$ que es constante (igual a 9,82 m/s^2)

Un diagrama t,s muestra media parábola, donde las pendientes tangentes muestran la velocidad. Un diagrama t,v muestra una línea recta, donde la pendiente es la aceleración. Un diagrama t,a muestra una línea horizontal:







The above may also be written this way:

$$v = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{ds}{dt} = s'$$

que es una derivada de primer orden

y

$$a = \frac{\text{velocidad}}{\text{tiempo}} = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = v' = s''$$

que es una derivada de segundo orden.

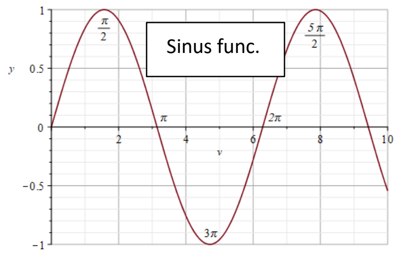
6.

En el ejemplo 5, la segunda derivada significaba algo físico, es decir

a = s´´   aceleración = distancia dif. dos veces con respecto al tiempo

En otros ejemplos, la segunda derivada simplemente significa la pendiente tangente de la curva de la primera derivada. Esto puede usarse en una investigación de una función, como veremos aquí: Consideremos la función sinus.

y = sin v   v es el ángulo en radianes



¿Dónde tiene la pendiente máxima la curva sinus?

(Parece estar en π,2π,..etc., pero calculemos con precisión):

Tiene que estar en el coeficiente diferencial máximo.

La ecuación para la pendiente/coeficiente diferencial es

y´ = cos x

que tiene un máximo, cuando su propio coeficiente diferencial es 0:

y´´ = - sin x = 0

que es para los ángulos π,2π,3π,….p·π donde p es un número entero.

Corresponde con lo que creemos leer en el diagrama.

Más teoría

¿Es posible seguir diferenciando un tercer, un cuarto,….tiempo?

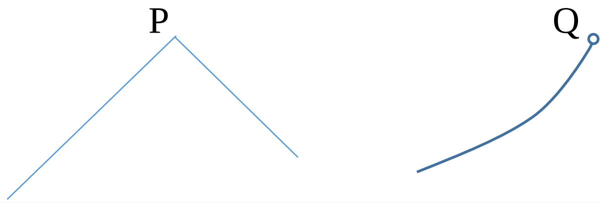
En principio, sí, si nuestra variable x (o como aquí, t) está en una potencia lo suficientemente alta. En el caso de la caída libre tendríamos que diferenciar a respecto del tiempo en una tercera diferenciación. Eso daría 0, y luego se acabó.

Ya hemos mencionado anteriormente que una ecuación de quinto grado es posible en matemáticas, pero difícilmente en ningún otro lugar. Se podrían diferenciar cinco veces, y cada vez encontramos la pendiente de la curva, pero sin ningún otro significado. Las matemáticas son infinitas, pero nuestra parte del mundo no lo es.

Diferenciable - no diferenciable

Podemos calcular coeficientes diferenciales en “puntos” de una curva donde tiene tangentes y afirmamos que la función es derivable.

Si no podemos acercarnos al punto (aquí P y Q) en la misma curva y desde ambos lados, la curva/función es discontinua y no podemos determinar una tangente. Por tanto, tampoco podemos calcular el cociente diferencial y la función no es diferenciable en estos puntos. Algunos ejemplos:



Como no podemos determinar el valor límite en los puntos P y Q, las funciones no son diferenciables en P y Q.

Cálculo integral

En el cálculo de diferenciación cortamos en pedazos muy pequeños para investigar los detalles. En el cálculo de integración, volvemos a juntar las piezas pequeñas para formar un todo, retrocediendo. Entonces, si primero diferenciamos una función y luego la integramos, volveremos a la función original. Sin embargo, puede haber habido una constante que desapareció durante la diferenciación y, en consecuencia, será una incógnita cuando nos integremos nuevamente.

Así, realizamos la integración calculando inversamente. Todas las pruebas se realizan durante la diferenciación, ahora "sólo" tenemos que utilizar la encuesta a la inversa.

Podemos volver de una función diferenciada a la función, es decir, de f´ a f, - o podemos simplemente integrar una función, es decir, de f a F. F se denomina función base (de regreso a la base).

A menudo, dentro de las Ciencias Naturales sabemos más sobre los detalles que sobre el conjunto. Por ejemplo, podemos observar que algo cambia aquí y ahora, pero ¿cómo será con el tiempo? Entonces, necesitamos integración.

Sin embargo, pasará algún tiempo antes de que podamos solucionar problemas como estos. Primero, debemos considerar cómo integrarnos, que es salir por sí solos.

Encuesta:

función derivada *(diferenciación de funciones)*	*función*
$\frac{dy}{dx}$ o f´(x)	y o f(x)

O:

función	*función básica*
f(x)	F(x)

0	Constante (a menudo llamada c k)
a	ax
2ax + b	$ax^2 + bx$
$\frac{1}{2}\, x^{-½}$	$x^{½}$ or $\sqrt{x}$
$x^{½}$	$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$
$n \cdot x^{n-1}$	x^n o:
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$

"Así, aumentamos el exponente en 1 y dividimos por el nuevo exponente"

$\frac{1}{x} = x^{-1}$	ln |x| — |x| dado que x puede ser negativa
ln x	x·ln x - x
e^x	e^x
e^{kx}	$\frac{1}{k} \cdot e^{kx}$
a^x	$\frac{1}{\ln a} \cdot a^x$

cos x	sin x
sin x	- cos x
tan x	-ln |cos x|

Pruebas

Es necesario demostrar las dos nuevas funciones.

ln x se demuestra diferenciando el resultado (producto y término por término):

x·ln x - x dif. => $(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) - (1) = \ln x$

y tan x también se demuestra por diff. del resultado (exterior, interior):

-ln |cos x| dif. => $- \frac{1}{\cos x} \cdot (- \sin x) = \tan x$

Notaciones

Escribimos una integral usando este signo: ∫
Una S estirada para mostrar que encontramos la suma, sumamos, reunimos, integramos. Integrar significa reunir e integración significa reunir. Reunimos todas las piezas muy pequeñas que hicimos por el derivado.

Si nuestra derivada es f´(x) podemos escribir:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad \Leftrightarrow$$

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

Ahora queremos volver al todo. Lo hacemos reuniendo todas las piezas pequeñas dy en el lado izquierdo y reuniendo todas las piezas pequeñas dx multiplicado por f´(x) en el lado derecho:

$$\int dy = \int f'(x) \cdot dx$$

En el lado izquierdo es simple: primero cortamos la macro y, en micro dy, y luego los volvemos a ensamblar en y:

$$y = \int f'(x) \cdot dx \qquad \text{o} \qquad f(x) = \int f'(x) \cdot dx$$

Así es como escribimos una integral normal, llamada integral indeterminada, que produce la solución completa.
Aquí debemos utilizar las reglas de cálculo ya probadas de la encuesta (y de las tablas matemáticas) para calcular el lado derecho.

Ejemplos

1.

Encontramos la derivada de la función.

$f(x) = x^2 + x + 3 \quad\Rightarrow\quad f'(x) = 2x + 1 + 0$

para observar los detalles, que son pendientes en puntos de la curva.
Ahora volvemos al todo. Lo hacemos reuniendo, - integrando:

$y = \int f'(x) \cdot dx$

$y = \int (2x + 1)\, dx$ normalmente omitimos el punto de multiplicación =>

$y = x^2 + x + k$

Si encontramos k, necesitamos más información sobre la función.

En lugar de y podríamos haber escrito f(x).

2.

$f(x) = x^2 + x^3$ =>

$F(x) = \int f(x)\, dx$ =>

$F(x) = \int (x^2 + x^3)\, dx$ ⇔

$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + k$

3.

Haremos algunos ejemplos más. En realidad, podríamos simplemente volver al Ejemplo 1 en el cálculo de derivadas y cambiar el signo de implicación de => a <= y así pasar de la diferenciación a la integración agregando una constante:

$f(x) = 2x^2 + k \quad\Leftarrow\quad f'(x) = 4x$

De todos modos, resolveremos algunos problemas más escribiendo las primeras respuestas de diferentes formas/notaciones:

$\frac{dy}{dx} = 2x + 3$	=>	$y = x^2 + 3x + k$
$y´ = 3x^2 - 2x + 2$	=>	$y = x^3 - x^2 + 2x + k$
$\frac{d}{dx} y = -2x + \frac{3}{x^2} = -2x + 3x^{-2}$	=>	$y = -x^2 - 3x^{-1} + k = -x^2 - \frac{3}{x} + k$
$\frac{d}{dx} f(x) = 5x^{-6}$	=>	$f(x) = -x^{-5} + k$
$f´(x) = 4x^{-½}$	=>	$f(x) = 8x^{½} + k$
$f´ = 2$	=>	$f = 2x + k$

$f(x) = 2\pi$	=>	$F(x) = 2\pi x + k$	π es un número
$f = e^x$	=>	$F = e^x + k$	

$e^7 \cdot e^{-x}$	=>	$e^7 \cdot e^{-x} \cdot (-1) + k$	e^7 es un número
$6^{-2x} = (6^{-2})^x$	=>	$\frac{6^{-2x}}{\ln(6^{-2})} + k$	
$\frac{x^4}{4}$	=>	$\frac{x^5}{4 \cdot 5} + k = \frac{x^5}{20} + k$	
$x^{\frac{3}{4}}$	=>	$\frac{4}{7} \cdot x^{\frac{7}{4}} + k$	
$\ln x$	=>	$(x \cdot \ln x - x) + k$	
$\frac{1}{x}$	=>	$\ln\|x\| + k$	

Integración y las cuatro operaciones aritméticas básicas.

Suma

Al igual que para encontrar derivadas, podemos integrar funciones parte por parte y sumarlas, o podemos hacer la integración bajo el mismo signo de integración:

$$\int u(x)\,dx + \int v(x)\,dx = \int (u(x) + v(x))\,dx$$

Esto lo demostramos calculando la derivada sobre el conjunto del lado izquierdo parte por parte

$$\left(\int u(x)\,dx + \int v(x)\,dx\right)' = \left(\int u(x)\,dx\right)' + \left(\int v(x)\,dx\right)' = u(x) + v(x)$$

Y la derivada del conjunto del lado derecho.

$$\left(\int (u(x) + v(x))\,dx\right)' = u(x) + v(x)$$

da lo mismo (los lados derechos son iguales).

Diferencia

Esta vez escribimos brevemente, implica que u y v son funciones de x

$$\int u\,dx - \int v\,dx = \int (u - v)\,dx$$

Esto lo demostramos calculando la derivada del todo del lado izquierdo parte por parte

$$\left(\int u\,dx - \int v\,dx\right)' = \left(\int u\,dx\right)' - \left(\int v\,dx\right)' = u - v$$

Y la derivada del conjunto del lado derecho.

$$\left(\int (u - v)\,dx\right)' = u - v$$

da lo mismo

Producto

Podemos multiplicar por una constante dentro o fuera de una integral, así podemos moverla. Esto se debe a que una constante no cambia si pasamos de macro a micro o volvemos a macro. Es una constante.

Para evitar confusiones, con la constante de integración k anterior, llamamos a la nueva constante c.

$\int c\cdot u(x)\,dx \;=\; c\cdot\int u(x)\,dx$

nuevamente lo demostramos por diferenciación de todo el lado izquierdo

$\left(\int c\cdot u(x)\,dx\right)' = c\cdot u(x)$

y por diferencia. de todo el lado derecho

$\left(c\cdot\int u(x)\,dx\right)' = c\cdot u(x)$ da lo mismo

Ejemplo

$\int \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) dx \;=\; \int \frac{1}{x}\,dx + \int \ln x\,dx \;=\; (\ln|x|) + (x\cdot\ln x - x) + k$

$\int (\ln x - 117)\,dx \;=\; \int \ln x\,dx - \int 117\,dx \;=\; (x\cdot\ln x - x) - (117x) + k$

$\int c\cdot x\,dx \;=\; c\cdot\int x\,dx \;=\; c\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2 + k \;=\; c_1\cdot x^2 + k$

Dado que c es desconocida de todos modos, podemos juntar c y $\frac{1}{2}$ en una nueva constante que llamamos c_1

$\int a\cdot b\cdot x\,dx \;=\; ab\int x\,dx \;=\; ab\cdot\frac{1}{2}x^2 + k \;=\; cx^2 + k$

nuevamente las constantes se juntan como c

Integración por sustitución

Algunas integrales son difíciles de resolver. Por lo tanto, mostraremos algunos métodos inteligentes que pueden ayudarnos. La primera es la integración por sustitución. Como hemos visto antes, en matemáticas se permite seleccionar algunos tamaños o partes y llamarlas de otra manera: las sustituimos. Luego continuamos calculando con la novedad y normalmente (pero no siempre) terminamos sustituyendo de nuevo. Es un buen método cuando x tiene más "roles".

Ejemplos

1.

$\int (4x - 2)^{½}\, dx$

elegimos sustituir 4x - 2. Lo llamamos t

$\int t^{½}\, dx \qquad$ dónde $\qquad t = 4x - 2$

No podemos reunir dx de una manera t, por lo que dx debe cambiar por dt. Lo hacemos por

$t = 4x - 2 \qquad => \qquad \frac{dt}{dx} = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad dx = \frac{dt}{4}$

que se inserta

$\int t^{½} \frac{dt}{4} \qquad = \qquad \int t^{½} \cdot \frac{1}{4} \cdot dt$

$\frac{1}{4}$ es una constante y se mueve “afuera”

$\frac{1}{4} \int t^{½}\, dt$

Ahora podemos reunir dt de una manera t, por lo tanto, podemos integrar

$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + k_t$

Y, la sustituimos de nuevo por x

$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (4x - 2)^{\frac{3}{2}} + k_x$ cual es la respuesta (puede reducirse)

La constante de integración k_t pertenece a la expresión t y cambia de nombre a k_x en la expresión x.

Y brevemente:

$\int (4x - 2)^{½}\, dx$	choice:	$t = 4x - 2$	=>
		$\frac{dt}{dx} = 4$	⇔
		$dx = \frac{dt}{4}$	
$\int t^{½} \frac{dt}{4}$	=		
$\frac{1}{4} \int t^{½}\, dt$	=		
$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + k_t$	=		
$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (4x - 2)^{\frac{3}{2}} + k_x$		cual es la respuesta (puede reducirse)	

2.

$\int \frac{2x}{x^2-3}\, dx$	elección:	$t = x^2 - 3$	=>

$\frac{dt}{dx} = 2x \qquad \Leftrightarrow$

$dx = \frac{dt}{2x}$

$\int \frac{2x}{t} \cdot \frac{dt}{2x} =$

$\int \frac{1}{t} \cdot dt =$

$\ln|t| + k_t =$

$\ln|x^2 - 3| + k_x$ cual es la repuesta

No existen reglas para lo que podemos llamar t y debemos prepararnos para tomar otra decisión. El autor sugiere elegir “lo más interno” y/o “lo más complicado”, como fue el caso en este ejemplo.

3.

$\int \sin x \cdot (\cos x)^{½} dx$ elección: $t = \cos x \qquad =>$

$\frac{dt}{dx} = -\sin x \qquad \Leftrightarrow$

$dx = \frac{dt}{-\sin x}$

$\int \sin x \cdot t^{½} \cdot \frac{dt}{-\sin x} =$

$-\int t^{½} dt =$

$-\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + k_t =$

$-\frac{2}{3} (\cos x)^{\frac{3}{2}} + k_x$ cual es la repuesta

Integración por partes

Se puede utilizar la integración por partes, cuando x está en dos partes multiplicadas (u y v) de la función completa (f):

$\int u \cdot v \, dx = U \cdot v - \int U \cdot v' \, dx$ U es la función base de u

La fórmula se prueba derivando el lado derecho:

$(U \cdot v - \int U \cdot v' \, dx)' = (U \cdot v)' - (\int U \cdot v' \, dx)' =$ parte por parte

$(U' \cdot v + U \cdot v') - (U \cdot v') =$ regla del producto y ´ deroga ∫

$U' \cdot v = u \cdot v$

Como por integración da el lado izquierdo. Así demostrado.

Ejemplos

1.

$\int x \cdot \sin x \, dx = (-\cos x) \cdot x - \int (-\cos x) \cdot 1 \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + k$

2.

Y ahora una solución avanzada. queremos calcular

$\int e^x \cdot \sin x \, dx$ y hacerlo por integración por partes:

$\int e^x \cdot \sin x \, dx = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \, dx$ *ecuación 1*

Aquí no llegamos a ninguna parte, pero si usamos la integración parcial una vez más en la última parte:

$\int e^x \cdot \cos x \, dx = e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x) \, dx$

e insertarlo en la *ecuación 1*:

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = e^x \cdot \sin x - (e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x) \, dx) \quad \Leftrightarrow$$

y recoge todas las integrales del lado izquierdo:

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx + \int e^x \cdot \sin x \, dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x \quad \Leftrightarrow$$

$$2 \int e^x \cdot \sin x \, dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x + k \quad \Leftrightarrow$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{2} (e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x) + k =$$

$\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + k$ cual es la repuesta.

Otros ejemplos

3.

En el capítulo de diferenciación vimos un ejemplo con fórmulas para la caída libre que tiene una aceleración constante, g.

Ahora consideraremos todos los movimientos lineales con aceleración constante y las fórmulas correspondientes de aceleración, velocidad y posición como funciones del tiempo.

Empezamos con las definiciones.

la velocidad momentánea: $v = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow ds = v \cdot dt$

the aceleración momentánea. $a = \frac{\text{velocidad}}{\text{tiempo}} = \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow dv = a \cdot dt$

A partir de estas expresiones, podemos integrar el paso de aceleración a velocidad y luego a posición de esta manera:

Aceleración $a = \text{constante}$ $\Rightarrow$

Velocidad $dv = a \cdot dt \Leftrightarrow \int dv = \int a \cdot dt \Leftrightarrow$

$$v = a\int dt \quad \Leftrightarrow \quad v = at + k \quad \Leftrightarrow$$

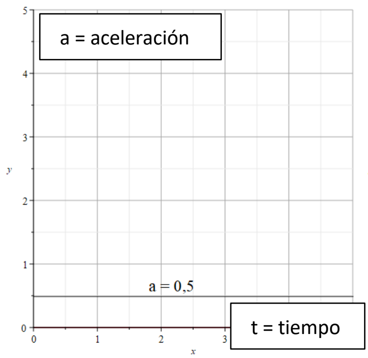
$$v = at + v_0$$

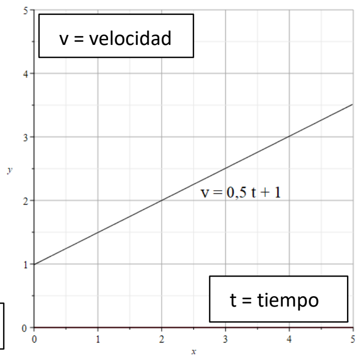
Posición $$ds = v\cdot dt \quad \Leftrightarrow \quad \int ds = \int v\cdot dt \quad \Leftrightarrow$$

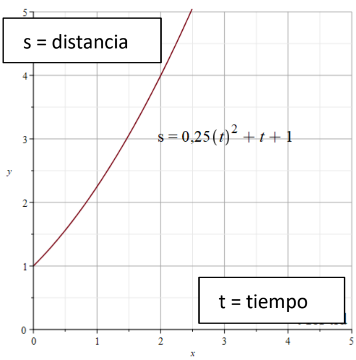
$$s = \int (at + v_0)\, dt \quad \Leftrightarrow$$

$$s = \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 + v_0\cdot t + s_0$$

La constante de integración para la velocidad es la velocidad inicial v_0
La constante de integración para la posición es la posición inicial s_0
La fórmula a representa una línea horizontal en un diagrama t,a.
La fórmula v representa una línea recta con pendiente a y comienza en v_0 en un diagrama t,v.
La fórmula s genera un polinomio de segundo grado con pendiente v y comienza en s_0 en un diagrama t,s.
Vea también estos diagramas de las funciones con números insertados: $a = 0{,}5$ $v_0 = 1$ $s_0 = 1$







La integral específica

Hasta ahora, hemos considerado el retorno de una función diferenciada a la función base. Hemos reunido los pedacitos muy, muy pequeños para formar un todo. El término técnico para esto es *integral indeterminada*, que nos da la solución completa.

Quizás sólo nos interese una parte del todo. Por ejemplo, podemos ignorar el pasado y centrarnos únicamente en el futuro. Luego usamos la *integral específica* que produce una solución específica/particular.

Lo escribimos así.

$$y = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Aquí se afirma que encontramos y reuniendo las partes muy pequeñas $f(x) \cdot dx$ desde $x = a$ (el límite inferior) hasta $x = b$ (el límite superior).
Cuando hemos integrado y encontrado la función base F(x), insertamos b para x y restamos a insertada para x. Lo escribimos de esta manera.

$$y = \int_a^b f(x) \cdot dx = [F(x)]^b{}_a = F(b) - F(a) = \text{repuesta}$$

por ejemplo

$$y = \int_1^3 2x \cdot dx = [x^2]^3{}_1 = 3^2 - 1^2 = 8$$

Aquí hemos integrado la función 2x pasando del 1 al 3.

Las reglas de cálculo son las mismas que para la integral indeterminada. Sin embargo, debemos señalar dos cosas:

Primero, la constante de integración k viene tanto en F(b) como en F(a), pero como tenemos límite superior menos límite inferior, también tenemos k menos k, que es cero. Por tanto, no hay k.

En segundo lugar, si integramos por sustitución, los límites también sustituyen. Lo haremos en un ejemplo.

Ejemplos

1.

$\int_1^2 (\ln x + \ln x^2)\,\mathrm{dx} \;=\; \int_1^2 (\ln x + 2\ln x)\,\mathrm{dx} \;=$ para x > 0

$\int_1^2 (3\ln x)\,\mathrm{dx} \;=\; 3\int_1^2 \ln x\,\mathrm{dx} \;=\; 3\cdot[x\ln|x| - x]^2{}_1 \;=$

superior menos inferior

3((2ln 2 - 2) - (1 ln 1 - 1)) = (6 ln 2 - 6) - (-3) ≈ 1.16

2.

$\int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2-3}\mathrm{dx}$ y $x \neq \sqrt{3}$ sustitución, elección: $t = x^2 - 3$ =>

$\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dx}} = 2x$ ⇔

$\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{dt}}{2x}$

límites cambiantes: $t_{inferior} = (-1)^2 - 3 = -2$

$t_{superior} = 0^2 - 3 = -3$

sustitución de dx y límites:

$\int_{-2}^{-3} \frac{2x}{t} \cdot \frac{\mathrm{dt}}{2x} =$

$\int_{-2}^{-3} \frac{1}{t} \cdot \mathrm{dt} =$ y tenemos una expresión t completa

$[\ln|t|]^{-3}_{-2}$ =

ln |-3| - ln |-2| =

$\ln\frac{3}{2} \approx 0.406$ cual es la respuesta

No necesitamos volver a sustituir una expresión x, ya que también sustituimos los límites e insertamos las cifras.

Ahora resolvemos el mismo problema sustituyendo nuevamente una expresión x:

$\int_{-1}^{0} \frac{2x}{x^2-3}\,dx$ elección: $t = x^2 - 3$ =>

$\frac{dt}{dx} = 2x$ ⇔

$dx = \frac{dt}{2x}$

Ahora sustituiremos de x a t y también deberíamos sustituir los límites de x a t, pero como volveremos más adelante, simplemente llamamos a los límites de t algunos valores desconocidos, como a y b, mientras tanto:

y insertamos

$\int_a^b \frac{2x}{t} \cdot \frac{dt}{2x}$ =

$\int_a^b \frac{1}{t} \cdot dt$ = una expresión t

$[\ln|t|]^b_a$ =

$[\ln|x^2-3|]^0_{-1}$ = volver a x con x límites

$(\ln|0^2-3|) - (\ln|(-1)^2-3|)$ =

ln 3 - ln 2 =

$\ln\frac{3}{2} \approx 0.406$ misma repuesta

3.

Un auto comienza a acelerar

$a(t) \;=\; \frac{\sqrt{t}}{10}$ donde t es el tiempo en segundos

¿Cuál es la velocidad v después de 60 segundos y qué distancia está el automóvil, distancia s, en metros?

Integramos de aceleración a velocidad y luego a distancia:

$a \;=\; \frac{dv}{dt}$ => dv = a dt => función a insertada

$$v \;=\; \int_0^{60} \frac{\sqrt{t}}{10}\, dt \;=\; \frac{1}{10} \int_0^{60} t^{½}\, dt \;=\; \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2}{3} \left[t^{\frac{3}{2}} \right]^{60}_{\;0} \right) \;=$$

$\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2}{3} (60^{\frac{3}{2}}) \right) - (0) \;=\; 31\, \frac{m}{s} \;\left(\approx 110\, \frac{km}{hora} \right)$ cual es la velocidad

$v \;=\; \frac{ds}{dt}$ => ds = v dt => función v insertada

$$s \;=\; \int_0^{60} \left[\frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} (t^{\frac{3}{2}}) \right] dt \;=\; \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} \int_0^{60} t^{\frac{3}{2}}\, dt \;=\; \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \left[t^{\frac{5}{2}} \right]^{60}_{\;0} \right) \;=$$

$\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} (60^{\frac{5}{2}}) \right) - (0) \;\approx\; 744$ m cual es la distancia

Este ejemplo se considerará más detalladamente en el capítulo "Áreas", *ejemplo 4.*

Áreas

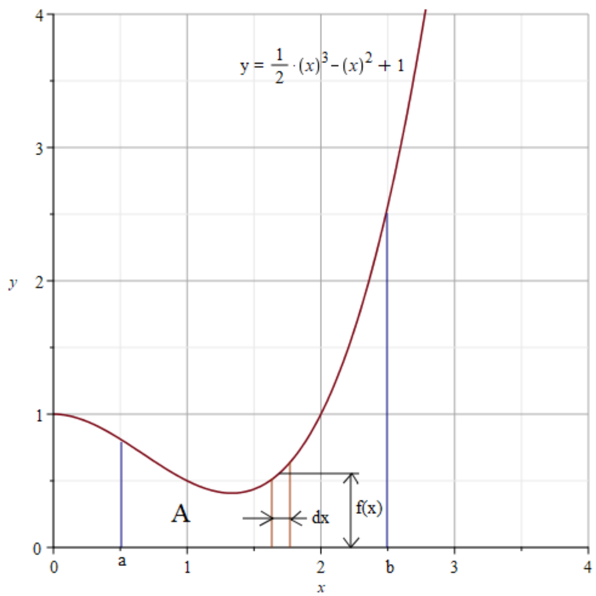
A menudo, en matemáticas, después de derivar una fórmula y desarrollar una herramienta, resulta que la herramienta puede usarse para algo diferente.

La integral específica también se puede utilizar como método avanzado para encontrar áreas de figuras que de otro modo serían "imposibles".

Consideremos esta expresión nuevamente, pero de otra manera:

$A = \int_a^b f(x) \cdot dx$ ahora llamado A

dx es una distancia muy pequeña en la dirección x, mientras que f (x) es la distancia correspondiente en la dirección f (x) (dirección y). Multiplicación: f(x)·dx forman un área muy pequeña. Si juntamos todas las microáreas (franjas muy pequeñas) de a a b, tenemos una macroárea visible. La altura f(x) de las tiras varía con la función, vea el siguiente ejemplo en el diagrama



Como dx es infinitamente pequeño, f(x) en la práctica será la altura de la tira tanto en el medio como en los dos lados. Sólo que aquí dx se muestra lo suficientemente amplio como para que podamos verlo.

El área limitada por el eje x, la curva y las rectas x = a y x = b se puede calcular con precisión utilizando la integral específica.

Ejemplos

1.

El área en el diagrama es

$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx \qquad \Leftrightarrow$$

$$A = \int_{0,5}^{2,5} \left(\frac{1}{2}x^3 - x^2 + 1\right) dx \qquad \Leftrightarrow$$

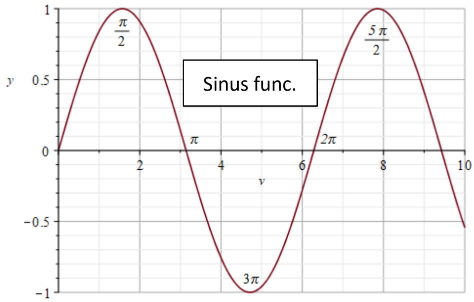
$$A = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x\right]^{2,5}_{0,5} \qquad \Leftrightarrow$$

$$A \approx (4,88 - 5,21 + 2,5) - (0,0078 - 0,0417 + 0,5) \qquad \Leftrightarrow$$

$$A \approx (2,17) - (0,466) \approx 1,704$$

2.

Si estamos debajo del eje x, el valor de la función f(x) es negativo y el área también será negativa. Por lo tanto, hacemos cálculos numéricos si el área está debajo del eje x. Por ejemplo, si encontramos el área entre el eje x y la curva sinus de x = 0 a x = 2π



$$A \;=\; \int_0^{\pi} \sin x \cdot dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \cdot dx \right| \qquad \Leftrightarrow$$

$$A \;=\; (-\cos\pi - (-\cos 0)) + |(-\cos 2\pi - (-\cos\pi))| \qquad \Leftrightarrow$$

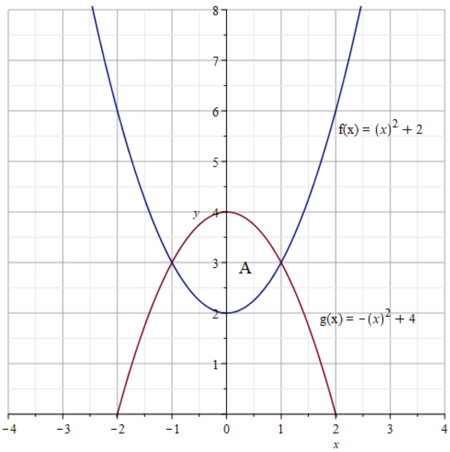
$$A \;=\; (-(-1) - (-1)) + |(-1 - (-(-1))| \;=\; 2 + 2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$A \;=\; 4$$

3.

Encontremos el área común entre estas dos parábolas.

$f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 4$



Encontramos los límites, donde las parábolas se cruzan, es decir

$f(x) \;=\; g(x) \qquad\qquad =>$

$x^2 + 2 = -x^2 + 4$ ⇔

$2x^2 - 2 = 0$ ⇔

$x = -1$ y $x = 1$

Ahora podemos integrar encontrando el área bajo g y restando el área bajo f

$$A = \int_{-1}^{1} (-x^2 + 4)\, dx - \int_{-1}^{1} (x^2 + 2)\, dx \quad \Leftrightarrow$$

$$A = \left[\left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right) - \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x\right)\right]_{-1}^{1} \quad \Leftrightarrow$$

$$A = \left(\left(-\frac{1}{3} + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + 2\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{3} - 4\right) - \left(-\frac{1}{3} - 2\right)\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$A = \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$A = \frac{8}{3}$$

4.

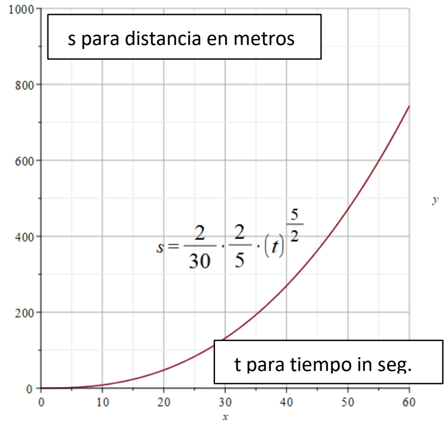
Continuaremos con el *ejemplo 3* del capítulo: “La integral específica”, con un coche acelerando:

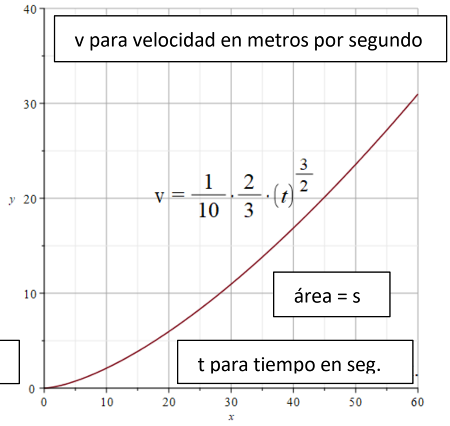
Tuvimos: $a = \frac{\sqrt{t}}{10}$ => $v = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}}$ => $s = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot t^{\frac{5}{2}}$

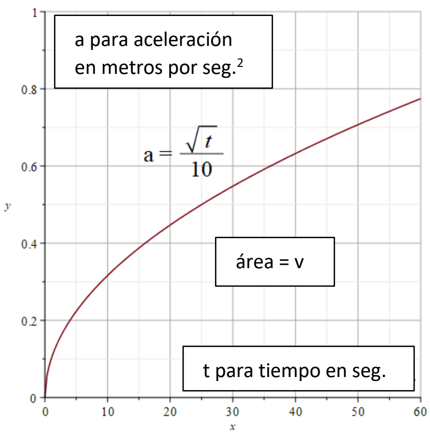
Ahora podemos encontrar la velocidad v gráficamente/numéricamente leyendo el área bajo la curva t,a. De t = 0 a t = 60 segundos, el área corresponde a 31 metros por segundo.

Y podemos encontrar la distancia s leyendo el área bajo la curva t,v. De t = 0 a t = 60 segundos, se observa que el área corresponde a 744 metros.

Claramente, hay incertidumbres en nuestras lecturas, pero observamos correspondencia.



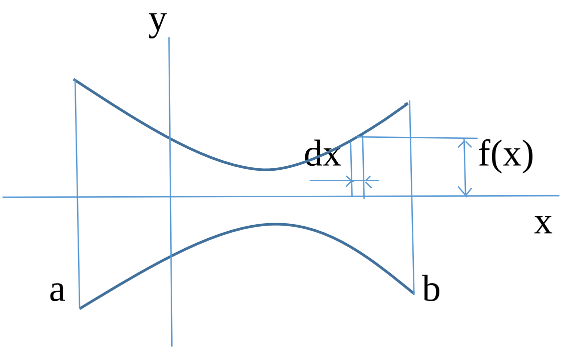




Volúmenes

Podemos rotar un área 2D alrededor del eje x o y y tener un volumen 3D.

La fórmula para la rotación alrededor del eje x deriva



Si giramos nuestra tira infinitamente delgada alrededor del eje x tenemos un microcilindro. Un macrocilindro tiene el volumen

$V = \pi \cdot r^2 \cdot l$ l para longitud

para nuestro microcilindro el volumen es

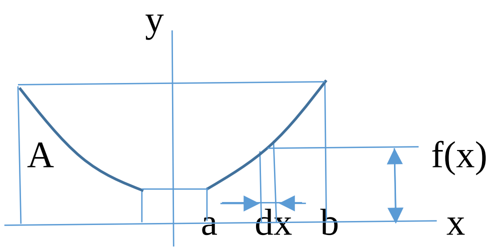
$dV = \pi \cdot f(x)^2 \cdot dx$

por integración (reuniendo todos los microcilindros) de a a b

$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$ el volumen de rotación alrededor del eje x

Así, el volumen se puede calcular cuando tenemos una expresión de la función, que informa cómo varía el radio.

La fórmula para la rotación alrededor del eje y deriva



Al girar nuestra tira infinitamente delgada alrededor del eje y, tenemos una carcasa de cilindro con volumen

dV = altura · circunferencia · microespesor =>

dV = f(x) · 2πx · dx =>

y cuando integramos (juntamos todas las carcasas de microcilindros) de a a b, el volumen, calculado numéricamente (x o f(x) puede ser negativo), es

$V = \left| 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x)\, dx \right|$ el volumen de rotación alrededor del eje y

En la figura que se muestra, el volumen de rotación se parece al espacio debajo de las gradas de un estadio.

También podemos ver el volumen de rotación como el área A rotada alrededor del eje y.

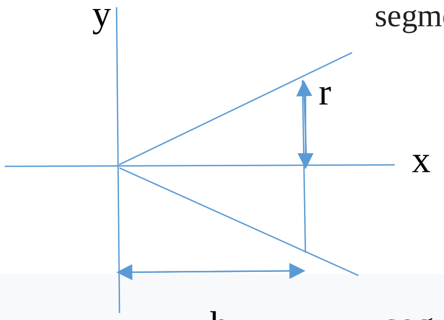
Si a = 0 no habrá ningún agujero en el medio.

Ejemplos

1.

Encontraremos la fórmula del volumen de un cono.

Giramos un segmento de línea una vez alrededor del eje x y tenemos un cono que yace hacia abajo.



segmento de línea: $f(x) = a \cdot x = \frac{r}{h} \cdot x$

segmento de línea rotado

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx \qquad \Rightarrow$$

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 dx \qquad \text{r y h son constantes} \qquad \Leftrightarrow$$

$$V = \pi \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \int_0^h x^2 \, dx \qquad \Leftrightarrow$$

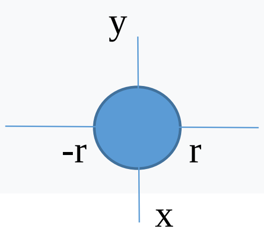
$$V = \pi \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h \qquad \Leftrightarrow$$

$$V = \pi \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \left(\frac{h^3}{3} - 0\right) \qquad \Leftrightarrow$$

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$ cual es la formula para el volumen de un cono

2.

Además, encontremos el volumen de una esfera:



Un círculo en el centro del sistema de coordenadas tiene la ecuacion

$x^2 + y^2 = r^2$

Un círculo completo sólo puede describirse como una función de parámetro (consulte el capítulo sobre funciones vectoriales). Como función "ordinaria", tenemos que hacer la ecuación para un semicírculo sobre el eje x.

$r^2 = x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = (r^2 - x^2)^{½} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (r^2 - x^2)^{½} \quad =>$

Este semicírculo se gira una vez alrededor del eje x, mientras que los límites son -r y r.

$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} f(x)^2 \, dx \qquad =>$

$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} ((r^2 - x^2)^{½})^2 \, dx \qquad \Leftrightarrow$

$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \, dx$ partido en dos $\Leftrightarrow$

$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} r^2 \, dx - \pi \cdot \int_{-r}^{r} x^2 \, dx$ r^2 es una constante $\Leftrightarrow$

$V = (\pi \cdot r^2 \, [x]^{r}_{-r}) - \left(\pi \cdot \left[\frac{1}{3} x^3\right]^{r}_{-r}\right) \qquad \Leftrightarrow$

$V = (\pi \cdot r^3 - (-\pi \cdot r^3)) - (\pi \cdot (\frac{1}{3} r^3 - (-\frac{1}{3} r^3))) \qquad \Leftrightarrow$

$V = 2\pi \cdot r^3 - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \qquad \Leftrightarrow$

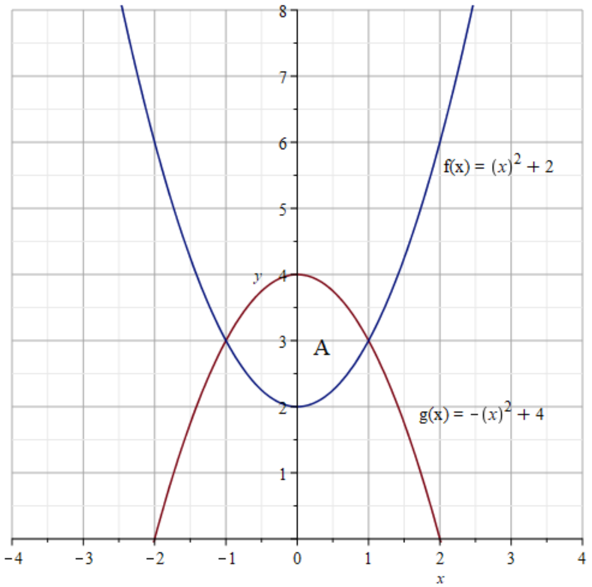
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ cual es el volumen de una esfera

3.
También podemos encontrar el volumen de rotación entre dos curvas. Aquí lo haremos para las dos parábolas del reciente ejemplo 3 del capítulo anterior. Giramos alrededor del eje y:
La función f(x) aquí se convierte en "superior menos inferior":

$(-x^2 + 4) - (x^2 + 2) \qquad =>$

y los límites son de 0 a 1, ya que es la mitad del área común la que se rotará una vez.

$$V = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x)\, dx \qquad =>$$



$$V = 2\pi \cdot \int_{-0}^{1} x \cdot ((-x^2 + 4) - (x^2 + 2))\, dx \qquad \Leftrightarrow$$

$$V = 2\pi \cdot \int_0^1 (-2x^3 + 2x)\, dx \qquad \Leftrightarrow$$

$$V = 2\pi \left[-\frac{1}{2} x^4 + x^2 \right]_0^1 \qquad \Leftrightarrow$$

$$V = 2\pi \left(\left(-\frac{1}{2} + 1 \right) - (0) \right) \qquad \Leftrightarrow$$

$$V = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow$$

$V = \pi \approx 3.14$ cual es el volumen

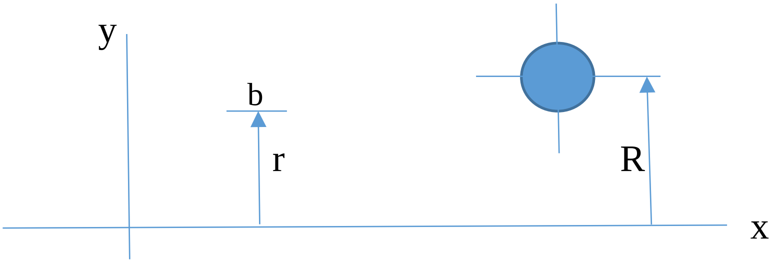
Las reglas de Guldin

Las reglas de Guldin también se basan en girar una figura alrededor de un eje, que no se cruza. Hay dos reglas:

1. Rotación de un segmento de curva, que representará un área.
2. Rotación de un área, que generará un volumen.

Ejemplos

1.



A la izquierda se muestra un segmento de línea. El ancho es b. La rotación alrededor del eje x genera una correa plana. El área del cinturón es

A = b · circunferencia =>

$A = b \cdot 2\pi r$

Esta es la primera regla de Guldin. También es válido para segmentos de curva donde r es el radio de rotación del centro de gravedad de la curva. Sin embargo, la determinación de los centros de gravedad no es un tema de este libro.

Si producimos una correa plana donde $b = 20$ mm y $r_{medio} = 300$ mm, el área promedio (a lo largo de la línea neutra) de la correa se convierte en:

$A_{average} = 20 \cdot 2\pi \cdot 300 \approx 37\ 700$ mm

A la derecha se muestra un círculo con radio r, que se convierte en un anillo llamado toroide (una "rosquilla") al girar alrededor del eje x. El volumen del toroide se vuelve

$V = A \cdot \text{circunferencia} \qquad =>$

$V = A_{\text{círculo}} \cdot 2\pi R \qquad =>$

$V = \pi r^2 \cdot 2\pi R$

Esta es la segunda regla de Guldin. También es válido para áreas asimétricas, donde A calcula en consecuencia y donde R es el radio de rotación del centro de gravedad del área. Sin embargo, la determinación de los centros de gravedad no es un tema de este libro.

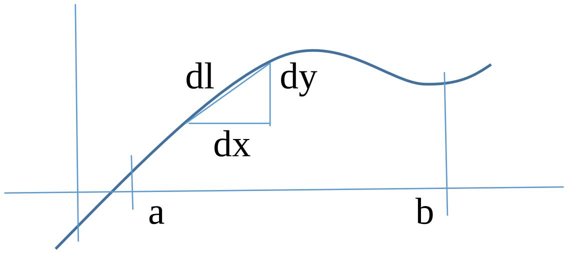
Si vamos a producir juntas tóricas de caucho con un radio de r = 3 mm y un radio de la línea central de R = 25 mm, el volumen de la junta tórica es

$V = (\pi \cdot 3^2) \cdot (2\pi \cdot 25)$

$V \approx 4\,441 \text{ mm}^3$

Por ejemplo, esta información se puede utilizar para calcular cuánto polvo de caucho en bruto se necesita para la producción.

Longitud de la curva



Usamos a Pitágoras en el pequeño triángulo rectangular infinitesimal, donde dl es una secante de la curva:

$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ y $dy = f´(x) \cdot dx$

que se inserta =>

$(dl)^2 = (dx)^2 + (f´(x) \cdot dx)^2$ ⇔

$dl = \sqrt{(dx)^2 + (f´(x) \cdot dx)^2)}$ ⇔

$dl = \sqrt{(1 + f´(x)^2) \cdot (dx)^2}$ ⇔

$dl = \sqrt{1 + f´(x)^2} \cdot dx$ =>

$l = \int_a^b \sqrt{1 + f´(x)^2}\, dx$ o

$l = \int_a^b (1 + f´(x)^2)^{½}\, dx$ cual es la longitud de la curva de a a b

Entonces, aquí, al igual que para áreas y volúmenes, podemos calcular con precisión, siempre que la curva/figura esté escrita como una función.

Ejemplo

Encontraremos la longitud de la curva de la función

$f(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}}$ de $x = 0$ a $x = 2$:

$l = \int_a^b (1 + f'(x)^2)^{½}\, dx$ dónde

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$ =>

$\int_0^2 (1 + (\frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}})^2)^{½}\, dx$ ⇔

$\int_0^2 (1 + \frac{x}{4})^{½}\, dx$ elección: $t = 1 + \frac{x}{4}$

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{4}$

dx = 4·dt

$4 \int_a^b t^{½}\, dt = 4 \left[\frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}}\right]_a^b = 4 \left[\frac{2}{3} (1 + \frac{x}{4})^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = 4\, [(\frac{2}{3} \cdot (\frac{3}{2})^{\frac{3}{2}}) - (\frac{2}{3})]$

≈ 2.24 cual es la longitud de la curva

A menudo es muy difícil calcular las longitudes de las curvas, por lo que normalmente se aplica CAS.

Ecuaciones diferenciales

Una ecuación con una cantidad (y) y su coeficiente diferencial (y´) se llama ecuación diferencial. Describe una cantidad y cómo cambia, generalmente en relación con el tiempo. Hablamos ahora de matemáticas avanzadas para utilizarlas en problemas complicados.

Algunos términos técnicos:

Una ecuación diferencial se resuelve mediante cálculo de integración. Así, al igual que en otras integrales, tenemos una *solución indeterminada* = *solución completa* = *solución general* con una constante de integración desconocida, o una *solución especial* = *solución particular* donde la constante de integración se acorta.

Una ecuación diferencial con y´ (primera derivada) se denomina *ecuación diferencial de primer orden*. Una ecuación diferencial con y´´ (segunda derivada) se denomina *ecuación diferencial de segundo orden*.

Una ecuación diferencial con solo partes y (es decir, con y, y´, y´´…) se llama *homogénea*; de lo contrario, *no es homogénea*.

Ecuaciones diferenciales típicas

Deduciremos y probaremos las fórmulas para resolver una ecuación diferencial básica y cuatro típicas. La cuarta fórmula resuelve muchas ecuaciones diferenciales. Además, derivaremos y probaremos la fórmula para resolver un tipo especial llamado *ecuación diferencial logística*.

La ecuación diferencial básica es

$$\frac{dy}{dx} = k \cdot y \qquad =>$$

que se resuelve separando las variables

$$\frac{dy}{y} = k \cdot dx$$

Aquí lo llamamos teorema 0 y lo usamos en el ejemplo 0:

Ejemplo 0

¿Cómo podemos predecir la desintegración de la materia radiactiva con el tiempo?

Lo hacemos observando pequeños cambios que tienen lugar en el presente y luego los integramos para obtener una imagen completa del pasado y el futuro. Seguramente hay incertidumbre de por medio, pero aquí te presentamos lo básico:

La actividad A de una materia radiactiva es igual a una constante de desintegración k, multiplicada por el número de átomos radiactivos, N, en una muestra.

$A = k \cdot N$

La actividad también es igual al cambio del número de átomos radiactivos, dN, en un tiempo infinitesimal, dt.

$A = -\frac{dN}{dt}$ minus because the activity decreases $\Rightarrow$

los lados derechos son iguales

$-\frac{dN}{dt} = k \cdot N \quad \Leftrightarrow$

aquí separamos las variables, es decir, reunimos N a la izquierda y t a la derecha

$\frac{dN}{N} = -k \cdot dt \quad \Leftrightarrow$

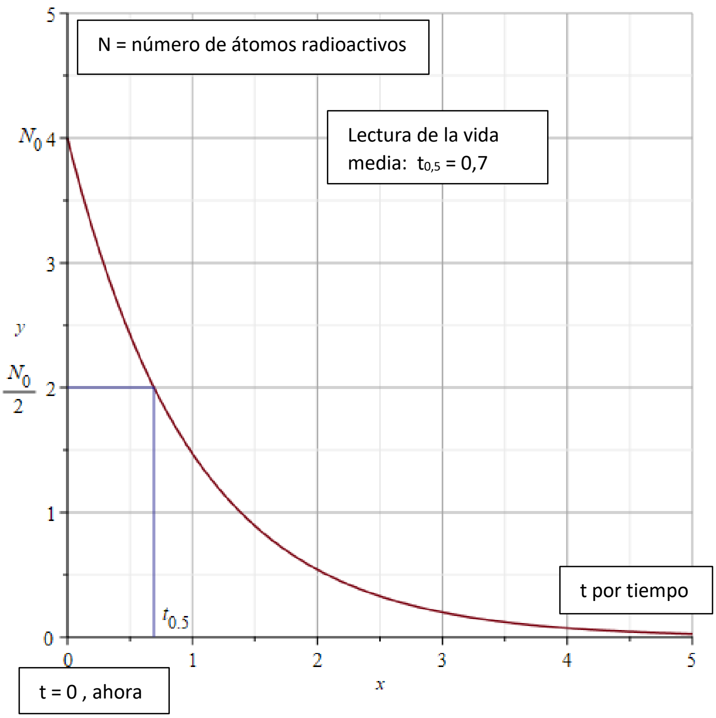
y si N_0 es el número de átomos radiactivos en el momento 0 (ahora) y t es el tiempo por venir, tenemos

$$\int_{No}^{N} \frac{1}{N}\, dN = -k \int_{o}^{t} dt \quad \Leftrightarrow \qquad \ln N - \ln N_0 = -k \cdot t \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln \frac{N}{No} = -k \cdot t \quad \Leftrightarrow \qquad \frac{N}{No} = e^{-k \cdot t} \quad \Leftrightarrow$$

$$N = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$ cual es la respuesta.

En un diagrama, la curva se verá así en principio. La curva se cuantifica cuando/si conocemos k.



La curva es exponencialmente decreciente y asintótica con respecto al primer eje. La radiactividad nunca llega a ser cero. Por lo tanto, es bueno saber cuándo hemos alcanzado la mitad del número de átomos radiactivos $\frac{No}{2}$. La cantidad de tiempo correspondiente se denomina vida media, como se muestra. De esta manera, podemos comparar la vida media de varios materiales radiactivos. Para algunos materiales radiactivos como el platino-178, la desintegración es rápida y se mide en segundos, mientras que otros, por ejemplo ciertos tipos de uranio, se desintegran a lo largo de millones de años.

Más teoría

Las cuatro ecuaciones diferenciales típicas son:

(Tenga en cuenta que se omiten algunos signos de multiplicación (puntos))

Equación		Solución de ecuación
$y' + ay = 0$	=>	$y = c \cdot e^{-ax}$
$y' + ay = b$	=>	$y = \frac{b}{a} \cdot c \cdot e^{-ax}$
$y' + ay = h(x)$	=>	$y = e^{-ax} \int h(x) \cdot e^{ax}\, dx + c \cdot e^{-ax}$
$y' + g(x) \cdot y = h(x)$	=>	$y = e^{-G(x)} \int h(x) \cdot e^{G(x)}\, dx + c \cdot e^{-G(x)}$

Los teoremas 3 y 4 contienen funciones que pueden ser integrales por sí solas. Por lo tanto, podemos hacer cálculos sobre sistemas/modelos muy complicados como modelos económicos, modelos climáticos, etc.

Es más fácil presentar las fórmulas de solución en orden inverso.

Teorema 4

$y' + g(x) \cdot y = h(x)$ y multiplicado por $e^{G(x)}$ a cada lado =>

$y' \cdot e^{G(x)} + g(x) \cdot y \cdot e^{G(x)} = h(x) \cdot e^{G(x)}$

Aquí utilizamos una fórmula conocida para diferenciar un producto:

$(y \cdot e^{G(x)})' = y' \cdot e^{G(x)} + y \cdot g(x) \cdot e^{G(x)}$

Donde el lado derecho es igual al lado izquierdo arriba. Por lo tanto, el lado derecho de arriba también debe ser igual al lado izquierdo de abajo. Seguimos con este último:

$(y \cdot e^{G(x)})' = h(x) \cdot e^{G(x)}$

e integrar en ambos lados (recordando la constante de integración c)

$(y \cdot e^{G(x)})' = h(x) \cdot e^{G(x)} \quad \Leftrightarrow$

$y \cdot e^{G(x)} = \int h(x) \cdot e^{G(x)}\, dx + c \quad \Leftrightarrow$

$y = e^{-G(x)} \int h(x) \cdot e^{G(x)}\, dx + c \cdot e^{-G(x)}$ *teorema 4*

Teorema 3

$y' + ay = h(x)$

Ahora g(x) es una constante a, por lo tanto, G(x) = ax que se inserta directamente en el teorema 4

$y = e^{-ax} \int h(x) \cdot e^{ax}\, dx + c \cdot e^{-ax}$ *teorema 3*

Teorema 2

$y' + ay = b$

Ahora h(x) también es igual a una constante b, que se inserta directamente en el teorema 3

$y = e^{-ax} \int b \cdot e^{ax}\, dx + c \cdot e^{-ax} \quad \Leftrightarrow$

$y = e^{-ax} \cdot b \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + c \cdot e^{-ax}$

$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$ *teorema 2*

Teorema 1

$y' + ay = 0$

$b = 0$ insertado en el teorema 2

$y = c \cdot e^{-ax}$ *teorema 1*

En algunas tablas, ay se mueve hacia el lado derecho y -a se llama k, lo que representa:

$y' = ky \quad \Rightarrow \quad y = c \cdot e^{kx}$ *teorema 1*

Tenga en cuenta que escrita de esta manera, la ecuación diferencial en el teorema 1 es igual al teorema 0 de la ecuación diferencial básica, que se resolvió separando las variables (y que se usó en el ejemplo 0). Así, existen dos métodos de solución:

1.

Ahora resolveremos la ecuación diferencial del ejemplo 0 usando el teorema 1.

$-\frac{dN}{dt} = k \cdot N \quad \Leftrightarrow \quad N' = -k \cdot N \quad \Rightarrow$

$N = c \cdot e^{-kt}$

cual es la solución para la integral indeterminada.

En el ejemplo 1 teníamos

$N = N_0 \cdot e^{-kt}$

resolviendo una integral específica.

La diferencia es que conocemos el valor inicial de N, N0, que utilizamos en la integral específica. Esta información no la teníamos para la integral indeterminada, por lo que aquí solo pudimos continuar con nueva información. Sin embargo, encontramos que las soluciones son en principio las mismas.

Además, aquí obtenemos la explicación del hecho de que la integral indeterminada produce una solución completa, mientras que la integral específica produce una solución específica.

Seguimos con la solución indeterminada insertando el valor inicial de N, N_0, en t = 0

$t = 0 \Rightarrow N = N_0$	insertado		=>
$N_0 = c \cdot e^{-k0} = c \cdot 1$	=>	$c = N_0$	=>
$N = N_0 \cdot e^{-kt}$	misma repuesta		

2.

Una taza grande de café con una temperatura de 83°C, que se encuentra en una habitación con una temperatura constante de 22°C, sigue la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - 22)$$

donde T es la temperatura en °C, t es el tiempo en minutos y k es una constante.
Se midió que el café estaba a 65° después de 20 minutos.

¿Cuál es la ecuación para T en función del tiempo?

¿Cuándo está el café a 45°?

Reordenamos la ecuación

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T-22) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{dT}{dt} + k \cdot T = k \cdot 22$$

y encuentra que se corresponde con el teorema 2

$y' + ay = b$ => $y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$

que en nuestro caso se convierte

$\frac{dT}{dt} + k \cdot T = k \cdot 22$ => $T = \frac{k \cdot 22}{k} + c \cdot e^{-kt} = 22 + c \cdot e^{-kt}$

Encontramos c a partir de la información: $T = 83$ dónde $t = 0$ =>

$T = 22 + c \cdot e^{-kt}$ => $83 = 22 + c \cdot e^{0}$ =>

$c = 61$ => $T = 22 + 61 \cdot e^{-kt}$

Encontramos k a partir de la información: $T = 65$ cuando $t = 20$

$T = 22 + 61 \cdot e^{-kt}$ => $65 = 22 + 61 \cdot e^{-k \cdot 20}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{65-22}{61} = e^{-20k}$

$\Leftrightarrow$ $\ln 0.7049 = -20k$

$\Leftrightarrow$ $k = \frac{-0.3497}{-20} = 0.0175$ =>

$T = 22 + 61 \cdot e^{-0.0175 \cdot t}$ que es la función de enfriamiento.

Y para $T = 45°$

$45 = 22 + 61 \cdot e^{-0.0175 \cdot t}$ $\Leftrightarrow$ $\ln \frac{45-22}{61} = -0.0175 \cdot t$ $\Leftrightarrow$

$t = \frac{-0.9754}{-0.0175} = 55.7$ minutos qual es la repuesta

3.

En una cervecería se produce agua mineral. En un recipiente a presión, el CO_2 se disuelve en el agua, como se describe en esta ecuación diferencial

$$\frac{dC}{dt} = k \cdot (C_s - C)$$

Donde $\frac{dC}{dt}$ es el crecimiento de la concentración por unidad de tiempo, k es una constante, C_s es la concentración de saturación y C es la concentración variable.
Encontraremos una expresión para la concentración C en función del tiempo (es decir, la solución indeterminada) resolviendo la ecuación diferencial.

Reorganizamos para que podamos corresponder con las fórmulas.

$$\frac{dC}{dt} = k \cdot (C_s - C) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dC}{dt} = k \cdot C_s - k \cdot C \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{dC}{dt} + k \cdot C = k \cdot C_s$$

Encontramos correspondencia con el teorema 2.

$$y' + ay = b \quad => \quad y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$$

que en nuestro caso se convierte

$$\frac{dC}{dt} + k \cdot C = k \cdot C_s \quad => \quad C = \frac{k \cdot C_s}{k} + c \cdot e^{-kt} = C_s + c \cdot e^{-kt}$$

Encontramos c a partir de la información: C = 0 cuando t = 0 =>

$$0 = C_s + c \cdot e^{-k \cdot 0} \quad \Leftrightarrow \quad c = -C_s \quad =>$$

$$C = C_s - C_s \cdot e^{-kt}$$

Cuál es la ecuación para el crecimiento de la concentración.

4.

Ahora resolveremos un problema difícil:

En el lanzamiento de un cohete se midieron datos que cumplían con la siguiente ecuación diferencial que describe la velocidad en función del tiempo (v = f(t)), válida para los primeros 14 segundo:

$\frac{dv}{dt} - \frac{1}{15-t} \cdot v = \frac{300}{15-t} - 9.81$ *(equación de: www.studieportalen.dk)*

v es la velocidad del cohete en metros por segundo y t es el tiempo en segundos. Al inicio: t = 0 y v = 0

Encontraremos una expresión para la velocidad v en función del tiempo, es decir, resolveremos la ecuación diferencial.

Comparamos con el teorema 4.

$y' + g(x) \cdot y = h(x)$ => y en nuestro caso:

$v' + g(t) \cdot v = h(t)$ que se compara con

$v' - \frac{1}{15-t} \cdot v = \frac{300}{15-t} - 9.81$ que corresponde cuando

$g(t) = -\frac{1}{15-t}$ y $h(t) = \frac{300}{15-t} - 9.81$ =>

por lo tanto la fórmula de la solución es

$v = e^{-G(t)} \int h(t) \cdot e^{G(t)} \, dt + c \cdot e^{-G(t)}$

Para continuar tenemos que calcular G(t) que es la integral de (la función base para) g(t)

$G(t) = \int \left(-\frac{1}{15-t}\right) dt$ sustitución, elección $s = 15 - t$

=> $\frac{ds}{dt} = -1$

⇔ $dt = -ds$

$G(t) = \int \left(-\frac{1}{s}\right)(-ds)$

$G(t) = \ln|s|$ =>

La constante de integración no se suma porque ya se tuvo en cuenta cuando se derivó el teorema 4.

sustituir de nuevo

$G(t) = \ln|15 - t|$

Como sabemos que t max. es 14, 15 - t debe ser positivo, por lo que el paréntesis numérico se convierte en un paréntesis ordinario.

$G(t) = \ln(15 - t)$

y insertamos

$v = e^{-G(t)} \int h(t) \cdot e^{G(t)} dt + c \cdot e^{-G(t)}$ =>

$v = e^{-\ln(15-t)} \int \left(\frac{300}{15-t} - 9.81 \right) \cdot e^{\ln(15-t)} dt + c \cdot e^{-\ln(15-t)}$ ⇔

reducir

$v = \frac{1}{15-t} \int (300 - 9.81(15 - t))\, dt + c \cdot \frac{1}{15-t}$ =>

integrar

$v = \frac{1}{15-t} \left(300 \cdot t - 147.15 \cdot t + \frac{9.81}{2} \cdot t^2 \right) + c \cdot \frac{1}{15-t}$

$t = 0$ => $v = 0$ => $c = 0$ =>

$$v = \frac{152.85 \cdot t + 4.905 \cdot t^2}{15-t}$$

cual es la ecuación/expresión para la velocidad

La velocidad después de 14 segundos es:

$$v = \frac{152.85 \cdot 14 + 4.905 \cdot 14^2}{15-14}$$

v $\approx$ 3101 metros por segundo o hacia 11,165 kilometros por hora

La ecuación diferencial logística

La ecuación diferencial logística describe un crecimiento limitado. La variable (aquí y) puede alcanzar un valor máximo y no más. La ecuación es

$$\frac{dy}{dx} = ay(m - y) \qquad \text{o} \qquad y´ = ay(m - y)$$

donde m es el valor máximo. Observamos que el crecimiento $\frac{dy}{dx}$ es directamente proporcional a la distancia de y y del valor máximo.

La solucion es $\quad y = \frac{m}{1+c\cdot e^{-amx}}$

Lo cual se demuestra de una manera peculiar: Adivinamos la solución mencionada y controlamos si es cierta:

Diferenciamos la solución $\quad y = \frac{m}{1+c\cdot e^{-amx}} \quad =>$

$$y´ = \frac{0 - m(c\cdot e^{-amx}(-am))}{(1 + c\cdot e^{-amx})^2} = \frac{am^2(c\cdot e^{-amx})}{(1 + c\cdot e^{-amx})^2}$$

que, junto con la solución adivinada, insertamos en la ecuación diferencial original

$$y´ = ay(m - y) \qquad =>$$

$$\frac{am^2(c\cdot e^{-amx})}{(1 + c\cdot e^{-amx})^2} = a \cdot \frac{m}{1+c\cdot e^{-amx}} \cdot (m - \frac{m}{1+c\cdot e^{-amx}}) \qquad \Leftrightarrow$$

$$\frac{am^2(c\cdot e^{-amx})}{(1 + c\cdot e^{-amx})^2} = \frac{am^2}{1+c\cdot e^{-amx}} - \frac{am^2}{(1+c\cdot e^{-kmx})^2} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\frac{am^2(c\cdot e^{-amx})}{(1 + c\cdot e^{-mx})^2} = \frac{am^2 + am^2ec^{-amx} - am^2}{(1+c\cdot e^{-amx})^2} \qquad \Leftrightarrow$$

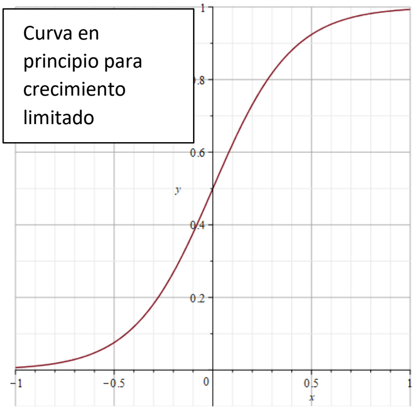
$$\frac{am^2(c \cdot e^{-amx})}{(1 + c \cdot e^{-amx})^2} = \frac{am^2 ec^{-amx}}{(1+c \cdot e^{-amx})^2} \quad \Leftrightarrow$$

cual es verdad.

Por simplicidad elegimos c = 1, a = 5 y m = 1 en la ecuación

$$y = \frac{m}{1+c \cdot e^{-amx}}$$

y puede dibujar esta curva



En la primera mitad hay un crecimiento progresivo y en la segunda mitad hay un crecimiento reducido. El valor de la función 1 (= 100%) es una asíntota horizontal de la función; nunca llegamos a 1.

Ejemplo 5

Los biólogos han introducido 50 loros en una isla donde antes no había loros. Los biólogos estiman que en la isla pueden vivir hasta 2.000 loros, y después de 24 meses había 100 loros.
¿Cuál es la función de crecimiento y cuánto tiempo pasará hasta que haya 1500 loros en la isla?

$y´ = ay(m - y)$ => $y = \frac{m}{1+c \cdot e^{-amt}}$

Aquí y = número de loros, x ahora se llama t para el tiempo en número de meses, m es 2000, mientras que c y k se deben encontrar a partir de la información

$t = 0$ y $y = 50$ => $50 = \frac{2000}{1+c \cdot e^{0}}$ => $c = 39$

$t = 24$ y $y = 100$ =>

$100 = \frac{2000}{1+39 \cdot e^{-a \cdot 2000 \cdot 24}}$ =>

$1 + 39 \cdot e^{-a \cdot 2000 \cdot 24} = 20$ ⇔

$e^{-a \cdot 2000 \cdot 24} = \frac{19}{39}$ ⇔

$-a \cdot 2000 \cdot 24 = \ln \frac{19}{39}$ ⇔

$a = \frac{-0.7191}{-48\,000} = 0.000014981$

Insertada encontramos la función de crecimiento de los loros.

$y = \frac{2000}{1+39 \cdot e^{-0.00001498 \cdot 2000 \cdot t}}$

y esperamos 1500 loros después

$1500 = \frac{2000}{1+39 \cdot e^{-0.00001498 \cdot 2000 \cdot t}}$ ⇔

$39 \cdot e^{-0.00001498 \cdot 2000 \cdot t} = \frac{2000}{1500} - 1$ ⇔

$e^{-0.00001498 \cdot 2000 \cdot t} = \frac{1}{3 \cdot 39}$

$-0.00001498 \cdot 2000 \cdot t = \ln 0,0085$ ⇔

$t = \frac{-4.7677}{-0.03} \approx$ 158 meses o aproximadamente 13 años.

Campos en pendiente

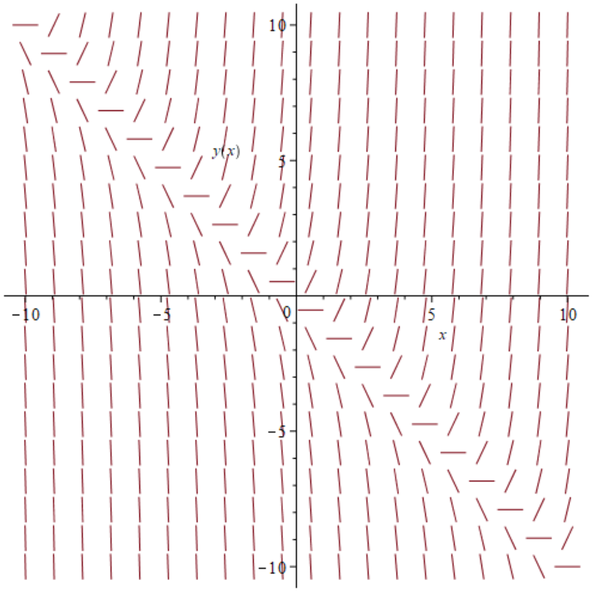
Aquí hay una breve descripción de un concepto bastante raro dentro de las ecuaciones diferenciales, a saber, campos de pendientes. Los campos de pendientes son un diagrama que ofrece un panorama de posibles soluciones a una ecuación diferencial. Consideremos un ejemplo simple sin ninguna función constante (como c, k, t,…):

$y´ = 2y + 2x$

Aquí podemos insertar coordenadas de puntos (x, y) que representan la pendiente de la curva en ese mismo punto, por ejemplo:

$(x, y) = (0, 0) \Rightarrow y´ = 0$ o $(1, 1) \Rightarrow y´ = 4$ y así sucesivamente.

Entonces podemos trazar una pequeña tangente (= elemento lineal) en muchos puntos y, en consecuencia, tenemos un campo de pendientes. Un trabajo agotador apto para CAS. Aquí se muestra para $y´ = 2y + 2x$



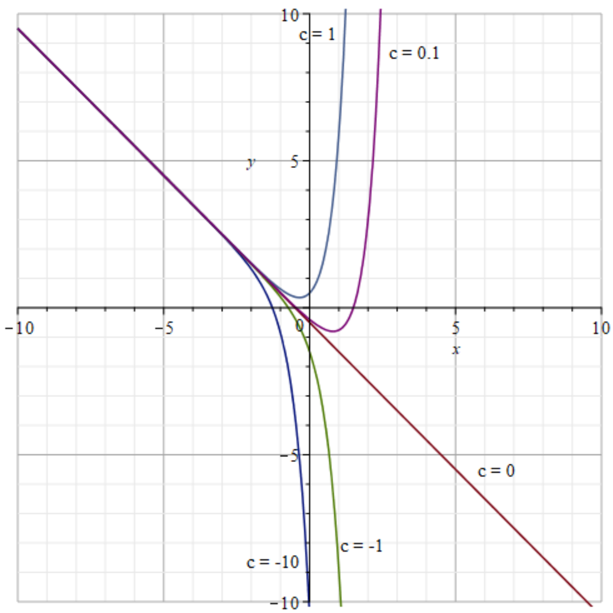
Si seguimos una serie de elementos lineales pequeños, tenemos una determinada curva solución. Existe un número infinito de curvas solución. Entonces, el campo de pendientes muestra el número infinito de posibles soluciones completas.

También podemos resolver la ecuación diferencial.

$y' - 2y = 2x$ que se corresponde con el teorema 3 y tiene la solución =>

$y = -x - \frac{1}{2} + c \cdot e^{2x}$ el cálculo no está enfocado y no se muestra

y muestre este diagrama con algunos valores c (varias soluciones específicas):



Los dos diagramas muestran lo mismo en principio:

El primer diagrama se basa en la ecuación diferencial y muestra el campo de pendientes, lo que proporciona un panorama (algo aproximado) de las posibles curvas de solución.

El otro diagrama se basa en la solución completa y muestra algunas curvas de solución precisas (soluciones específicas) para algunos valores de c. Se puede decir que hemos extraído cinco curvas del campo de pendientes.

Por lo general, resolvemos la ecuación diferencial para encontrar la solución completa y luego insertamos valores conocidos para encontrar c, y luego tenemos la solución específica (tal como lo hicimos en el capítulo anterior).

Sin embargo, es posible que deseemos que una determinada curva solución pase por un determinado punto, por ejemplo (0, 0). Entonces:

- miramos el campo de pendiente y encontramos que parece posible
- inserte (0, 0) en la solución y encuentre c = 1
- regresar y cambiar los datos (si es posible) para que c se convierta en 1.

Visto desde una perspectiva global, puede ser posible retroceder y cambiar las condiciones para llegar a una solución determinada.

También aprendemos del campo de pendientes lo importante que es tener las condiciones adecuadas. De lo contrario, podemos terminar teniendo una solución incorrecta o incierta.

Funciones de dos variables.

Hasta ahora hemos visto funciones de una variable (y depende de x o t o…). Así, hemos descrito la mayoría de los casos. Sin embargo, a veces una cantidad z depende de (es función de) dos variables, x e y. Sí, puede haber incluso más variables, pero como veremos, se tratan de la misma manera.

Expresiones de funciones

Si tenemos una función z = f(x, y) y vemos cómo z cambia cuando solo cambia x, es decir $\frac{dz}{dx}$, cambiamos la notación a $\frac{\partial z}{\partial x}$. Se llama derivada parcial.

De esta manera afirmamos que existen otras variables, pero ahora solo nos centramos en z relacionado con x.

Diferenciamos como antes considerando y (y/u otras variables) como constantes. Todas las reglas de cálculo para la diferenciación son las mismas.

Ejemplo 1

$z = 2x + 3y$ =>

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 + 0 = 2$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 3 = 3$

2.

$z = x^2 + y^3$ =>

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$

De esta manera consideramos solo una variable.

figuras 3D

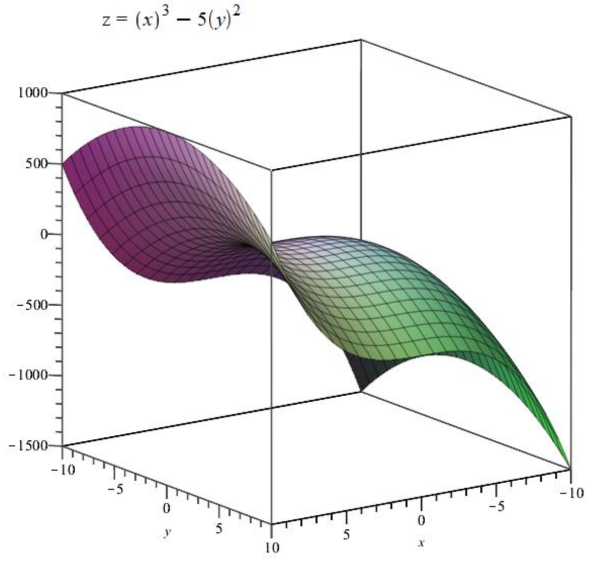
Las figuras espaciales tienen ecuaciones del tipo

z = f(x,y)

Entonces, si conocemos la ecuación de la figura y las coordenadas (x, y) de un punto, podemos calcular la coordenada z del punto.

Ejemplo 3.

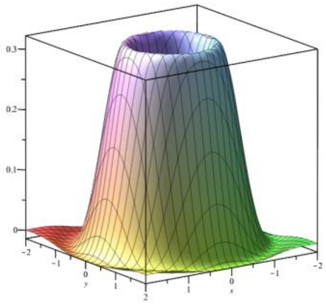
$z = f(x,y) = x^3 - 5y^2$

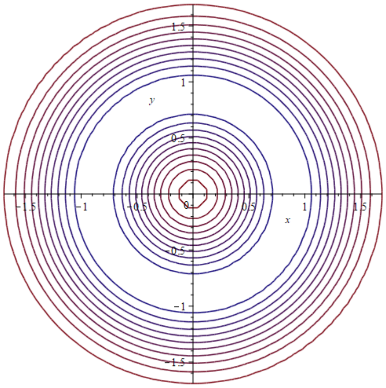


En la práctica, el CAS muestra cifras complicadas como ésta. Sólo se pueden dibujar a mano figuras simples.

4.

La geometría de las formas en la naturaleza es complicada y probablemente no sea posible encontrar ecuaciones útiles, por lo que las curvas de nivel del paisaje normalmente se dibujan como pequeñas líneas/curvas a través de puntos medidos de la misma altitud, por ejemplo, 41 metros sobre el nivel del mar. nivel. Aquí mostramos una figura 3D con curvas de nivel vista desde arriba:





Se observa que la figura es empinada en el interior, como se muestra por pequeñas distancias entre las curvas de nivel, - no empinada en la parte superior - y nuevamente empinada en el exterior.

La razón principal para mostrar esta figura es que ahora consideraremos el gradiente. El gradiente es mayor en curvas de nivel cercano.

El gradiente

La palabra en realidad significa pendiente, pero aquí en 3D el significado se amplía un poco. El gradiente describe tanto la dirección como el tamaño de la pendiente (por lo tanto, es un vector; hablaremos más sobre esto en la Parte 4).

$\frac{\partial z}{\partial x}$ muestra la pendiente de la figura espacial en la dirección x

$\frac{\partial z}{\partial y}$ muestra la pendiente de la figura espacial en la dirección y

Justo como antes.

Pero ¿qué pasa con la pendiente intermedia?

Ese es el gradiente.

Consideramos la pendiente en x y la pendiente en y combinadas y escribimos

$$\text{grad.(z)} = \text{grad.(f(x,y))} = \begin{pmatrix} pendiente\ en\ x \\ pendiente\ en\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dif.\ partial\ en\ x \\ dif.\ partial\ en\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}$$

que es la definición del gradiente.

Pitágoras encuentra el tamaño del gradiente:

$$|\text{grad.}| = \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right)^{½}$$

Por lo tanto, el tamaño por sí solo es la pendiente sin conocimiento de la dirección.

Usamos a Pitágoras porque la pendiente en la dirección x es ortogonal a la pendiente en la dirección y.

Esto corresponde a un vector (donde la dirección combinada se decide por la "relación de fuerza" de los dos coeficientes diferenciales) y su longitud. El gradiente es un vector. Vea más sobre vectores en la Parte 4.

Ejemplo 1

Mostramos la función

$z = f(x,y) = x^2 + y^2$ que tiene

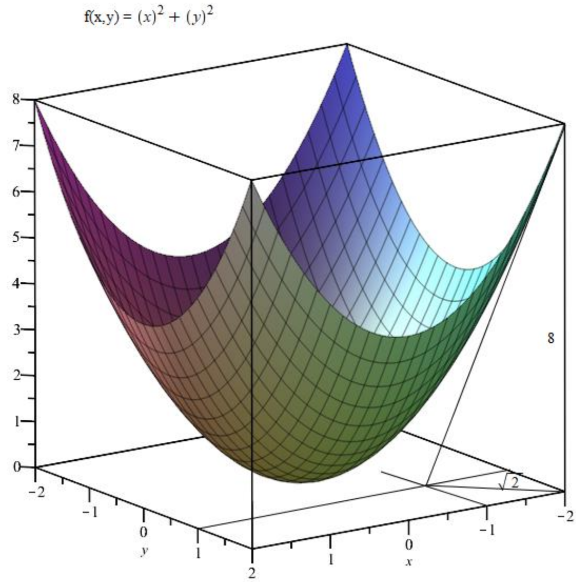
la pendiente en x $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$

la pendiente en y $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$ =>

el gradiente $= \binom{2x}{2y}$ por ejemplo $x = |2|$ y $y = |2|$ da

el gradiente $= \binom{4}{4}$ con el tamaño

$|\text{grad.}| = \sqrt{4^2 + 4^2} \approx 5.66$



Si nos arrastramos hacia el interior en la esquina derecha donde x = |2| e y = |2|, la pendiente es 5,66.

También podemos considerarlo de esta manera:

En la figura está dibujada la tangente de la figura en la “esquina” donde x = |2| e y = |2|.

Las líneas de ayuda muestran un paso en x: $\Delta x = 1$

y un paso en y: $\Delta y = 1$

que por Pitágoras da un paso “común” de $\sqrt{2}$

En la altura, la dirección z, leemos $\Delta z = 8$

Calculamos la pendiente “común” (= longitud de la pendiente):

|grad.| $= \frac{8}{\sqrt{2}} \approx 5.66$ misma respuesta.

Comparemos la pendiente al trepar por la “esquina” (que se calculó como 5,66) con la pendiente si trepamos 8 metros por “el medio”:

En el medio llegaremos al punto:

z = 8, x = 0, y = ?

$z = x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = 8^{½} \approx 2.83$

que no es visible en la figura. El punto se encuentra fuera del cuadro que se muestra.

el gradiente $= \binom{2x}{2y}$ cual para x = |0| y y = |2.83| da

el gradiente $= \binom{0}{5.66}$ con el tamaño

|grad.| $= \sqrt{0^2 + 5.66^2} \approx 5.66$

Por lo tanto, la misma pendiente, como se esperaba para esta figura simétrica de rotación.

El gradiente también se puede escribir con el símbolo ∇

Parte 4. Vectores

Vectores 2D en el plano

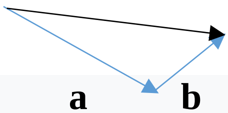
Un vector describe el tamaño y la dirección y se dibuja como una flecha (larga o corta).

Por ejemplo, puede ser el tamaño y la dirección de fuerzas físicas como la fuerza y dirección del viento, la fuerza y dirección de las corrientes marinas y muchas más, - cosas que no sólo tienen un tamaño (como una masa o una cantidad de dinero), pero también una dirección.
Las matemáticas vectoriales son una herramienta de cálculo. Por lo tanto se permite mover un vector en el cálculo, siempre y cuando mantenga longitud y dirección. ¡En matemáticas!
¡En física y otros campos, no se puede mover un vector! No debe alejarse del lugar de actuación.
Vectores es una herramienta con las correspondientes reglas de cálculo diseñadas para habilitar y/o facilitar algunos cálculos, particularmente en 3D. Algunos de los métodos pueden parecer extraños al principio, aunque seguramente son útiles. Si queremos utilizar la herramienta de vectores, los hacemos nosotros mismos y hacemos cálculos con ellos de la forma que vamos a explicar.
Los vectores bidimensionales (2D) no nos permiten hacer cálculos que no podemos hacer ya, pero son necesarios en geometría 3D. Así, construimos el sistema en 2D y recibimos la recompensa en 3D.
Normalmente llamamos a los vectores de la misma manera que a los lados de un triángulo, por ejemplo $\vec{a}$ o $\overrightarrow{AB}$, sólo que con una pequeña flecha en la parte superior. En otros libros tal vez se escribe a o AB, y finalmente se usa **a** o **AB**. Elegimos este último.

Podemos sumar vectores y restarlos. Podemos multiplicarlos y dividirlos con una constante, pero no podemos multiplicarlos y dividirlos entre sí. Sin embargo, aquí se aplicarán las herramientas especiales del producto escalar y el determinante (más sobre esto más adelante).

Lo esencial

Podemos sumar vectores de dos maneras. Una forma es poniéndolos en extensión uno del otro:

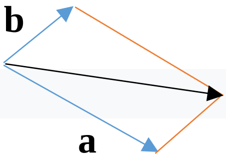


c

a **b**

El negro es la "resultante", aquí:
el vector suma c.

La otra es dejar que comiencen en el mismo punto y formen un paralelogramo:



b

c

a

El negro es la "resultante", aquí:
el vector suma c (el mismo que antes).

Para diferenciarse de escribir coordenadas para puntos (en una fila), las coordenadas vectoriales se escriben en una columna. Imaginamos que todos los vectores comienzan en Origo, (x, y) = (0, 0), de modo que las coordenadas del vector son el punto final, la punta de flecha. Los vectores mostrados podrían ser:

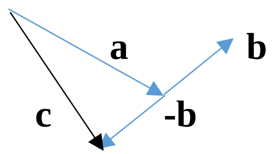
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \binom{5}{-3} + \binom{2}{2} = \binom{7}{-1}$$

También se ve que sumamos las coordenadas x por separado y sumamos las coordenadas y por separado.

O en letras para coordenadas desconocidas:

a + **b** = **c** => $\binom{a_1}{a_2} + \binom{b_1}{b_2} = \binom{a_1+b_1}{a_2+b_2} = \binom{c_1}{c_2}$

Restamos un vector sumando el vector negativo/opuesto:



El negro es la resultante **c**

a - **b** = **c** => $\binom{5}{-3} - \binom{2}{2} = \binom{3}{-5}$

O en letras para coordenadas desconocidas:

a - **b** = **c** => $\binom{a_1}{a_2} - \binom{b_1}{b_2} = \binom{a_1-b_1}{a_2-b_2} = \binom{c_1}{c_2}$

Podemos multiplicar un vector por una constante (número o letra):

$k \cdot \binom{a_1}{a_2} = \binom{k \cdot a_1}{k \cdot a_2}$ o sacar $\binom{k \cdot a_1}{k \cdot a_2} = k \cdot \binom{a_1}{a_2}$

k puede ser todo (grande, pequeño, positivo, negativo) excepto 0. Si k > 1 el vector se hace más largo. Si k < 1 el vector se acorta; en realidad, esto es lo mismo que dividir el vector por un número. Si k es negativo (k < 0) se dirigirá en sentido opuesto.

En lugar de multiplicar/dividir vectores, se creó/definió el producto escalar. A menudo se le llama producto escalar, porque se utiliza un punto (similar a un punto de multiplicación). La técnica consiste en multiplicar x por x e y por y, y terminar sumando los dos resultados:

$$\binom{5}{-3} \cdot \binom{2}{2} = 10 + (-6) = 4$$

Entonces comenzamos con vectores y obtenemos un número.

O con letras como coordenadas desconocidas:

Producto escalar: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \binom{a_1}{a_2} \cdot \binom{b_1}{b_2} = a_1b_1 + a_2b_2 =$ un número

Resulta útil.

Y ahora a algo aún más especial: el determinante de dos vectores. Un determinante nos determina algo, pero veamos primero la técnica de cálculo:

El determinante: $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 =$ un número

Colocamos las coordenadas del vector a en la primera columna y las coordenadas del vector b en la segunda columna. Luego multiplicamos en forma de "cruz": $a_1 \cdot b_2$ menos $a_2 \cdot b_1$ y obtenemos un número como respuesta.
Entonces aquí también comenzamos con vectores y obtenemos un número.

Para divertirnos calculamos el producto escalar (â se explica en la página siguiente)

$$\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} = \binom{-a_2}{a_1} \cdot \binom{b_1}{b_2} = -a_2b_1 + a_1b_2 = a_1b_2 - a_2b_1 = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Esto también resulta útil.

Encontramos un poco más de diversión útil en este cálculo:

$$-\det(\mathbf{b},\mathbf{a}) = -\begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = -(b_1a_2 - b_2a_1) = a_1b_2 - a_2b_1 = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

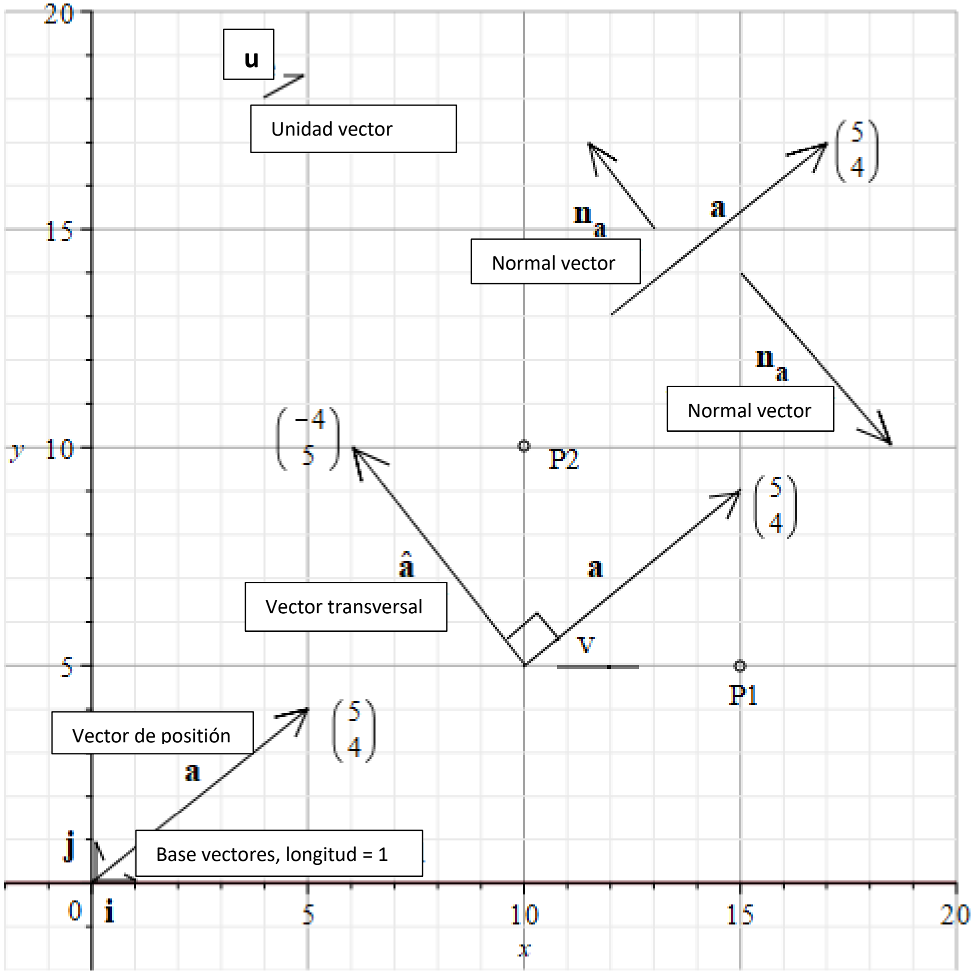
Y ahora un viejo amigo: encontramos la longitud de un vector de Pitágoras:

$|\mathbf{a}|^2 = x^2 + y^2$ o $|\mathbf{a}|^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2$ =>

aqui: $|\mathbf{a}| = [5^2 + (-3)^2]^{½} = 34^{½}$

Vectores especiales

Algunos vectores especiales se muestran en este diagrama:



En matemáticas, como se mencionó, imaginamos que todos los vectores comienzan en Origo = (0, 0), por lo que la coordenada del vector es el punto final: la punta de flecha. Aquí **a** se muestra en tres lugares, pero los tres son el mismo vector y tiene las coordenadas $\binom{5}{4}$. Para los que no empiezan en Origo (0, 0), las coordenadas se encuentran teniendo: fin menos inicio. Para **a**:

$$\binom{15-10}{9-5} = \binom{5}{4} \qquad \text{y} \qquad \binom{17-12}{17-13} = \binom{5}{4}$$

El ángulo de un vector con el eje x es

$$v = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{para } \mathbf{a}\text{:} \qquad v = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 38{,}7°$$

Si giramos un vector 90° positivamente (en el sentido contrario a las agujas del reloj), obtenemos su vector transversal mostrado con un pequeño sombrero. Sus coordenadas están invertidas con un menos en la coordenada x. el vector cruzado de **a** es

$$\hat{\mathbf{a}} = \binom{-4}{5}$$

Se ve por un punto de ayuda P1 que también gira 90° y se convierte en P2. El valor x de P1 de 5 se convierte en el valor y de P2 de 5, y la distancia y de P1 al vector, que es 4, se convierte en la distancia x de P2 al vector transversal, que es -4.

Otros vectores ortogonales a a se llaman vectores normales. Normal aquí significa ortogonal. La posición, dirección y longitud de los vectores normales no son cruciales si solo el vector es ortogonal a nuestro vector, es un vector normal. Hay un número infinito de vectores normales, pero sólo un vector transversal.

Arriba a la izquierda se muestra un vector con longitud 1. Todos los vectores con longitud 1 se llaman vectores unitarios y escribimos |**u**| = 1

Finalmente se muestran dos vectores unitarios especiales: **i** en el eje x y **j** en el eje y. Están dibujados justo al lado del eje para que podamos verlos. Se llaman vectores base.

En todas las matemáticas necesitamos cero. En matemáticas vectoriales necesitamos un vector cero: **0**. Si, por ejemplo, restamos **a** de **a** obtenemos el vector cero:

a - **a** = **0**

Ejemplos

1.

Un vector dos veces más largo y en dirección opuesta (-) tiene las coordenadas:

$-2 \cdot \binom{5}{4} = \binom{-10}{-8}$

2.

Calculemos el producto escalar de dos vectores ortogonales, por ejemplo un vector y su vector transversal, aquí, **a** y **â** :

$\binom{5}{4} \cdot \binom{-4}{5} = -20 + 20 = 0$

En letras y multiplicado por una constante, k, es válido para todos los vectores:

$\binom{h}{i} \cdot k\binom{-i}{h} = \binom{h}{i} \cdot \binom{k(-i)}{kh} =$ -hki + ikh $= 0$

Esto prueba que un vector punteado por uno de sus vectores normales es 0.

3.

Comprobaremos si dos paredes son ortogonales. Formamos dos vectores en las direcciones de las paredes en algunos lugares lógicos: un vector va desde la esquina de las paredes hasta una ventana a 3 metros de distancia y tiene las coordenadas en milímetros.

$\binom{0}{3000}$

el otro conduce desde la esquina de las paredes en la otra dirección hasta una puerta a 1,76 metros de distancia y tiene las coordenadas en milímetros

$\binom{1760}{10}$

Comprobamos si el producto escalar da 0:

$\binom{0}{3000} \cdot \binom{1760}{10} = 0 + 30000 = 30000$ cual es $\neq 0$

No, las paredes no son ortogonales. Es fácil ver que el error es de 10 mm.

Los dos vectores que formamos también se llaman vectores de dirección. Pueden tener otras longitudes, siempre y cuando estén en la dirección correcta.

4.

a se puede dividir en dos componentes, uno en la dirección x y otro en la dirección y. Está escrito de esta manera:

$\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} = \binom{5}{4}$

Entonces si nos paramos en Origo, caminamos 5 pasos en x y 4 pasos en y, estaremos en el punto final del vector (en la punta de flecha).

En realidad, podemos dividir un vector en las direcciones que queramos, por ejemplo:

$$\binom{5}{4} = \binom{4}{2} + \binom{1}{2}$$

Cuál es la regla del depósito.

Si en cambio a se llama **OP** (porque va del punto O al punto P) e introducimos un punto Q en (4, 2) tenemos:

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QP} = \binom{4}{2} + \binom{1}{2} = \binom{5}{4}$$

O si la encontraremos **QP**:

$$\mathbf{QP} = \mathbf{OP} - \mathbf{OQ} = \binom{5}{4} - \binom{4}{2} = \binom{1}{2}$$

Un vector que comienza en O (0, 0) y conduce a un punto conocido (por ejemplo, P o Q) también se denomina vector de posición porque conduce de una posición a otra.

Reglas de cálculo

Hay cuatro reglas de cálculo para vectores. Se parecen a las reglas estándar de las matemáticas, sólo que debemos recordar que un punto entre dos vectores no significa multiplicación, significa punto.

1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$
2. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$
3. $(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot(k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$
4. $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

El teorema 4 no se parece a ningún otro, así que lo demostraremos. El lado correcto

$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2$ y el lado izquierdo

$|\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$ Da la misma

Ángulo

La fórmula para el ángulo, v, entre dos vectores se encuentra usando el producto escalar o el determinante. La fórmula que utiliza el producto escalar se deriva mediante la regla del cosinus:

$a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos C = c^2$ => aqui:

$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos v = |\mathbf{a}\text{-}\mathbf{b}|^2$ donde $|\mathbf{a}| = a$, $|\mathbf{b}| = b$, etc.

Regla 4 da $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}^2$

Regla 4 da $|\mathbf{b}|^2 = \mathbf{b}^2$

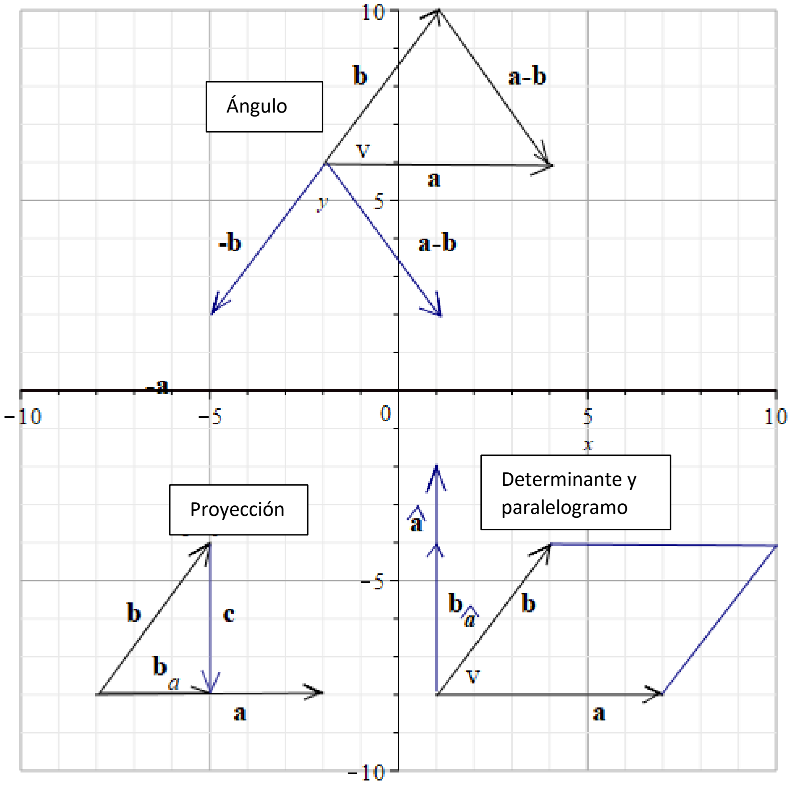
Regla 4 y 2 da $|\mathbf{a}\text{-}\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}\text{-}\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

Insertado $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos v = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

Reducido $\cos v = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$

Cuál es la fórmula del ángulo entre dos vectores. Observe también la figura superior del diagrama (página siguiente) donde se muestra que el lado opuesto al ángulo v es a-b.

Más adelante presentaremos otra fórmula que utiliza el determinante para calcular el ángulo entre dos vectores.



Proyección

Además, en este diagrama mostramos el vector **b** proyectado en ángulo recto sobre el vector **a**. La resultante es $\mathbf{b_a}$ y sus coordenadas dependen de **b** y **a**, que son conocidas.

Encontramos las coordenadas del vector $\mathbf{b_a}$ formando el vector auxiliar c azul y luego observamos que:

$\mathbf{b_a} = k \cdot \mathbf{a}$ *(I)* $\mathbf{b_a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ y

$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$ Ya que ellas son ortogonales

Luego, encontraremos k seguido de encontrar $\mathbf{b_a}$:

$$0 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{b_a} - \mathbf{b})\cdot\mathbf{a} = (k\mathbf{a} - \mathbf{b})\cdot\mathbf{a} = k\mathbf{a}^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = k|\mathbf{a}|^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

$\Leftrightarrow \quad k|\mathbf{a}|^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad k = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \quad \Rightarrow$

k se inserta en *(I)* y produce:

$$\mathbf{b_a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \cdot \mathbf{a}$$

que es la fórmula para las coordenadas del vector proyectado.

Su longitud se encuentra mediante el valor numérico de los vectores:

$$|\mathbf{b_a}| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|^2} \cdot |\mathbf{a}| \qquad \Leftrightarrow$$

$$|\mathbf{b_a}| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$$

que es la fórmula de longitud de proyección.

Determinante, área y ángulo

Ahora veremos cómo utilizar el determinante:
En la parte inferior del diagrama y hacia la derecha, se muestra un paralelogramo expandido por los vectores **a** y **b**. En un cálculo habitual el área es

$$\text{Área} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}_{\hat{\mathbf{a}}}|$$

Ahora tenemos dos formas de continuar:

$\text{Área} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}_{\hat{\mathbf{a}}}| = |\mathbf{a}| \cdot \dfrac{|\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{b}|}{|\hat{\mathbf{a}}|}$ y dado que **a** y **â** son igualmente largas

$\text{Área} = |\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{b}|$ que es igual al determinante

$$\text{Àrea}_{\text{paralelogramo}} = |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})|$$

Entonces, no necesitamos saber $|\mathbf{b}_{\hat{\mathbf{a}}}|$ para encontrar el área. Podemos encontrarlo directamente a partir de los vectores (**a** y **b**) que expanden el paralelogramo.

También podemos encontrar el área por:

$|\mathbf{b}_{\hat{a}}| = |\mathbf{b}| \cdot \sin v$ =>

$\text{Área} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}_{\hat{a}}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin v$

o brevemente

$\text{Área}_{\text{paralelogramo}} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin v$

Dado que ambos métodos representan el área, deducimos que

$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin v$ ⇔

$\sin v = \dfrac{\det(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$ lo que nos da otro método para encontrar el ángulo entre dos vectores.

El primer método es a través del producto escalar.

$\cos v = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\mathbf{b}|}$ La que encontramos antes.

Hay más. Nuevamente consideramos la expresión

$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin v$

que es 0 si v es 0. Esto significa que si el determinante es 0, **a** y **b** son paralelos:

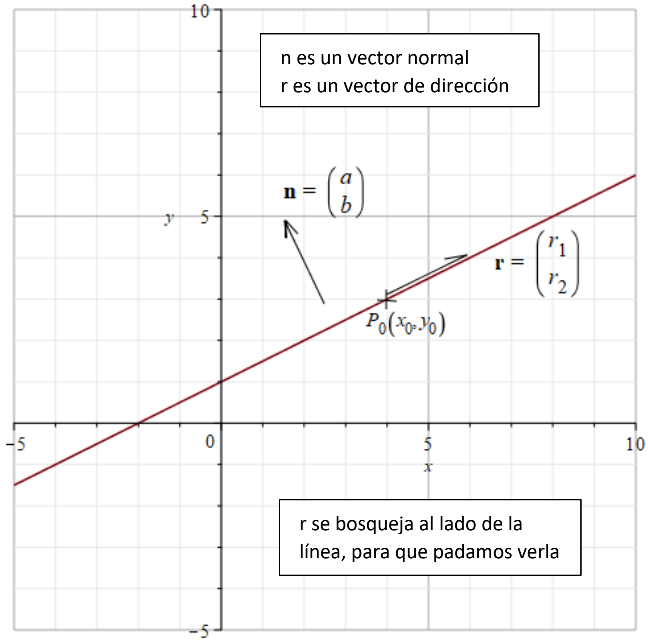
$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

Aún hay más. También podemos encontrar el área del triángulo expandido por los vectores **a** y **b**:

$\text{Area}_{\text{triangle}} = \frac{1}{2} \cdot \text{Area}_{\text{parallelogram}} = \frac{1}{2} \cdot \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin v$

La línea recta en forma vectorial

La ecuación de la línea recta también se puede escribir en dos formas vectoriales. Como antes, necesitamos dos datos sobre la línea. Debemos conocer un punto y un vector director o un punto y un vector normal.



Cada punto conocido de la línea servirá. Aquí llamamos al punto P_0 con las coordenadas (x_0, y_0), que determinarán la recta si también conocemos la dirección.

La dirección se describe con un vector de dirección. Cualquier vector de dirección servirá (corto, largo, apuntando hacia adelante o hacia atrás, colocado en la línea o no) siempre que sea paralelo a la línea.

En realidad, la dirección también puede estar determinada por un vector normal (ortogonal a la recta). Cualquier vector normal servirá.

Si imaginamos girar la línea, los vectores normales seguirán. Por tanto, cada línea recta tiene su(s) propio(s) vector(es) normal(es).

Usando el vector de dirección, la línea recta se puede escribir como una función vectorial, que rara vez se aplica en 2D, pero que es la única posibilidad en 3D (más adelante). Esta función vectorial se ve directamente en la figura: comenzando en P0, el vector de dirección puede mover un punto (la punta de la flecha) hacia arriba y hacia abajo en la línea multiplicando por un parámetro llamado t, que puede ser cualquier número. "Parámetro" es griego y aquí significa "a lo largo de lo medido".

$\binom{x}{y} = \binom{x_0}{y_0} + t\binom{r1}{r2}$ cual es la función vectorial 2D de la recta

Al utilizar el vector normal, la derivación es más complicada, pero el resultado es más útil:

Observamos de la figura.

$\mathbf{n} = \binom{a}{b}$

Si formamos un vector transversal de **n**, obtenemos un vector director para la recta:

$\mathbf{r} = \binom{-b}{a}$

que insertamos en la función vectorial de la recta:

$\binom{x}{y} = \binom{x_0}{y_0} + t\binom{-b}{a}$

Aquí dividimos una ecuación para la coordenada x y una ecuación para la coordenada y:

$x = x_0 + t(-b)$ y $y = y_0 + ta$

Se trata de dos ecuaciones con dos incógnitas. Aislamos en la ecuación y:

$t = \frac{y-y_0}{a}$ e inserte en la ecuación x:

$x = x_0 + \frac{y-y_0}{a} \cdot (-b)$ ⇔

$x - x_0 = \frac{y-y_0}{a} \cdot (-b)$ ⇔

$a(x - x_0) = -b(y - y_0)$ ⇔

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

Esta es la ecuación en forma vectorial de la línea recta. a y b son las coordenadas de un vector normal y (x_0, y_0) es un punto de la recta.

Podemos continuar con la multiplicación entre paréntesis:

$ax - ax_0 + by - by_0 = 0$

Y si la sustituimos $- ax_0 - by_0$ by c, tenemos:

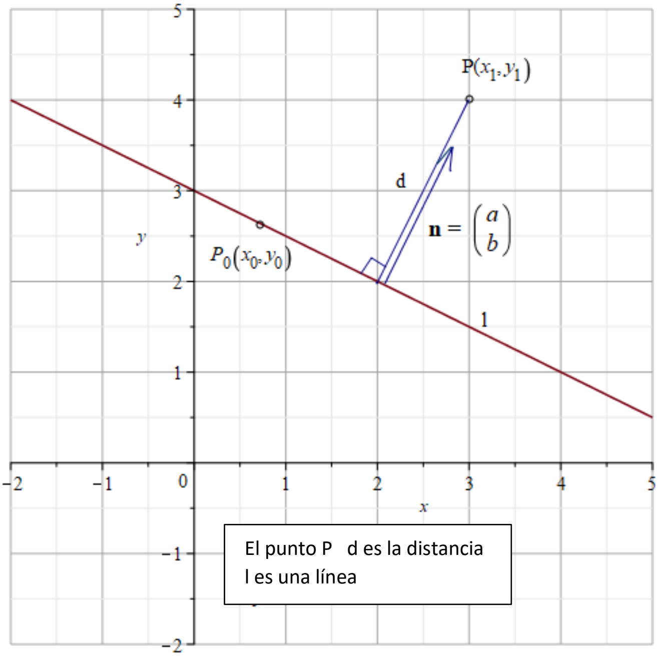
$ax + by + c = 0$

lo cual es más fácil en algunos casos y que a menudo se enumera en tablas. Pronto lo usaremos de esta forma en la fórmula de distancia.

Así, tenemos dos ecuaciones para la línea recta en matemáticas "ordinarias" y dos (o tres) ecuaciones en matemáticas vectoriales. Tenga en cuenta que a y b no significan lo mismo en los dos sistemas.

Línea de puntos de distancia

Las matemáticas vectoriales también se pueden utilizar para encontrar la distancia más corta (perpendicular) d desde un punto P hasta una línea l.



Para la derivación necesitamos un punto arbitrario en la recta, al que llamamos $P_0(x_0, y_0)$, y un vector normal para la recta

$$\mathbf{n} = \binom{a}{b}$$

Por simplicidad dibujamos el vector normal de l a P, pero se puede utilizar cualquier vector normal.

Imaginemos un vector de P_0 a P (no esbozado). Si proyectamos $\mathbf{P_0P}$ sobre $\mathbf{n}$ obtenemos un vector de longitud d. Luego, aplicando la fórmula de proyección derivada anteriormente:

$$|\mathbf{b_a}| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} \qquad \text{aqui}$$

$$d = \frac{|\mathbf{P_\circ P} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$$

numerador: $\binom{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} \cdot \binom{a}{b} = ax_1 - ax_0 + by_1 - by_0$

P_0 está en l, por lo que $- ax_0 - by_0$ se sustituye por c, como antes.
y denominador: $\sqrt{a^2 + b^2}$
insertado en la expresión de d produce una fórmula para la distancia entre el punto y la línea (d para distancia)

$$d = \frac{|\,ax_1 + by_1 + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

x_1 e y_1 son coordenadas del punto, y a, byc son de la ecuación de la línea recta en forma vectorial.

Ejemplos

1.

Encontremos el ángulo entre las dos paredes en un ejemplo anterior, donde los vectores de dirección eran

$\binom{0}{3000}$ y $\binom{1760}{10}$ en millímetros

Primero tenemos

$\cos v = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\boldsymbol{a}|\ |\mathbf{b}|}$ donde

numerador $\binom{0}{3000} \cdot \binom{1760}{10} = 0 + 30{,}000 = 30{,}000$

denominador $(0^2 + 3000^2)^{½} \cdot (1760^2 + 10^2)^{½} = 5{,}280{,}085$

conjunta $v = \cos^{-1}\left(\frac{30{,}000}{5{,}280{,}085}\right) = 89.67°$

Lo que muestra una pequeña asimetría.

----

luego en metros

$\binom{0}{3}$ y $\binom{1.760}{0.01}$

y ahora usando

$\sin v = \frac{\det(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$ donde

numerador $\begin{pmatrix} 0 & 1.76 \\ 3 & 0.01 \end{pmatrix} = 0 - 3 \cdot 1.76 = -5.28$

denominador $(0^2 + 3^2)^{½} \cdot (1.760^2 + 0.01^2)^{½} = 5.280085$

conjunta $v = \sin^{-1}\left(\frac{-5.28}{5.280085}\right) = (-)\ 89.67°$

Mismo ángulo que antes. Naturalmente. El motivo del menos es el orden de **a** y **b**, al calcular el determinante. En **b** antes de **a**, habría sido más. Por lo tanto, necesitamos interferir e interpretar la respuesta: las dos fórmulas dan la misma respuesta. Si no es así, habíamos cometido un error.

2.

Nosotras proyectaremos un vector **b** $= \binom{1}{5}$ en línea recta con la ecuación $y = x + 3$
¿Cuáles serán las coordenadas del vector proyectado y cuánto mide?
Usamos la fórmula de proyección, que tiene b proyectado sobre a:

$\mathbf{b_a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \cdot \mathbf{a}$

nuestra **b** es $\binom{1}{5}$

nuestra **a** debemos formarla a partir de un vector director de la recta. La pendiente es 1, por lo que $\binom{1}{1}$ es un vector director y ahora es nuestra a:

numerador $\quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \binom{1}{1} \cdot \binom{1}{5} = 1 + 5 = 6$

denominador $\quad |\mathbf{a}|^2 = ((1^2 + 1^2)^{½})^2 = 2$

Combinada con **a** rendimiento

$\mathbf{b_a} = \frac{6}{2}\binom{1}{1} = 3\binom{1}{1} = \binom{3}{3}$

Longitud

$|\mathbf{b_a}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$

numerador $\quad |6| = 6$

denominador $\quad (1^2 + 1^2)^{½} = \sqrt{2}$

conjunta $\quad |\mathbf{b_a}| = \frac{6}{\sqrt{2}} \approx 4.24$

Controlando, podemos usar Pitágoras para las coordenadas de $\mathbf{b_a}$:

$|\mathbf{b_a}| = (3^2 + 3^2)^{½} = \sqrt{18} \approx 4.24$ misma repuesta

3.

Un paralelogramo se expande por los vectores $\binom{5}{3}$ y $\binom{3}{4}$
¿Cuál es el área?

$\text{Área}_{\text{paralelogramo}} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ =>

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 20 - 9 = 11$

y si cambiamos el orden de los vectores:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 - 4 \cdot 5 = 9 - 20 = -11$

Aquí debemos intervenir, ya que un área sólo puede ser positiva.

$|A| = 11$

Entonces tenemos la misma respuesta.

4.

Un triángulo se expande por los vectores $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
¿Cuál es el área?

$\text{Área}_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2} \cdot \det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ =>

$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 4 - 3 \cdot 3) = \frac{11}{2} = 5{,}5$

5.

Una recta pasa por el punto (6,8) y tiene un vector normal $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
¿Cuál es la ecuación de las rectas?

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ =>

$3(x - 6) + 4(y - 8) = 0$ ⇔

$3x - 18 + 4y - 32 = 0$ ⇔

$3x + 4y - 50 = 0$ cual es la respuesta

La ecuación en matemáticas "ordinarias" será:
$y = ax + b$

donde a ahora es la pendiente y b ahora es el valor de y donde la línea cruza el eje y!

$3x + 4y - 50 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$4y = -3x + 50 \quad \Leftrightarrow$

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{2}$

Por lo tanto, una línea con la pendiente $-\frac{3}{4}$ y con intersección del eje y en el punto $(0, \frac{25}{2})$.

6.

¿Cuál es la distancia entre el punto (2,1) y la recta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{2}$?

Necesitamos la línea en forma vectorial, así que la cambiamos

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{2} \quad \Leftrightarrow$

$4y = -3x + 50 \quad \Leftrightarrow$

$3x + 4y - 50 = 0$

y usa la fórmula de la distancia

$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad =>$

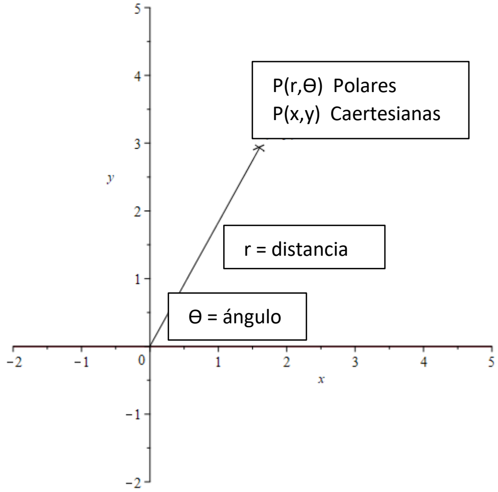
$d = \frac{|3\cdot 2 + 4\cdot 1 - 50|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \quad \Leftrightarrow$

$d = \frac{|-40|}{\sqrt{25}} \quad \Leftrightarrow$

$d = 8$

Coordenadas polares en 2D

Las coordenadas también se pueden especificar como coordenadas polares que son: (distancia desde Origo, ángulo con el eje +x), consulte la figura:



Esto puede ser un avance en las técnicas de aviación, etc., particularmente cuando nos expandamos al 3D.

En esta tabla se muestra la conversión entre coordenadas cartesianas (ordinarias), coordenadas de vector de posición y coordenadas polares:

	Coordenadas	Longitud/distancia
Cartesian	P(x,y)	$r = (x^2 + y^2)^{½}$
Pos. vector	$\mathbf{OP} = \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\Theta \\ r \cdot \sin\Theta \end{pmatrix}$	$\lvert\mathbf{r}\rvert = \lvert\mathbf{OP}\rvert = (x^2 + y^2)^{½}$
Polar	P(r,Θ)	$r = [(r \cdot \cos\Theta)^2 + (r \cdot \sin\Theta)^2]^{½}$

Parece que longitud/distancia es Pitágoras en los tres casos.

En otra literatura se hace referencia a las coordenadas polares, pero se considerarán un poco más cuando se trate de números complejos al final de este libro.

Funciones vectoriales (curvas paramétricas) en 2D

Si consideramos una función que va y viene en la dirección x (por ejemplo, una función circular), ya no hay un solo valor de y para cada valor de x. Luego debemos describirla como una función vectorial, y su curva en un sistema de coordenadas se llama curva paramétrica. Introducimos un parámetro, generalmente llamado t, ya que el parámetro suele ser temporal o proporcional al tiempo. Por tanto, el parámetro define dónde nos encontramos en la curva.

Escribimos la función vectorial de esta manera.

$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ cual es la definición de una función vectorial

Una función vectorial en 2D puede verse como una ecuación que describe x como función de t y otra ecuación que describe y como función de t.

La función vectorial para una línea recta.

Consideremos un ejemplo que ya conocemos: la línea recta

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ la función vectorial de una recta en 2D $\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t \cdot r_1 \\ y_0 + t \cdot r_2 \end{pmatrix}$$

o como dos ecuaciones

$x(t) = x_0 + t \cdot r_1$ y $y(t) = y_0 + t \cdot r_2$

Una línea recta no avanza ni retrocede en la dirección x, por lo que realmente no necesitamos esta función vectorial, pero es un buen ejemplo.

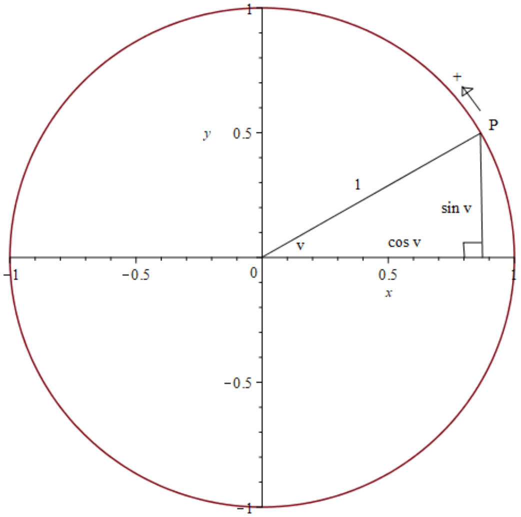
La función vectorial de un círculo.

Conocemos la ecuación de los círculos.

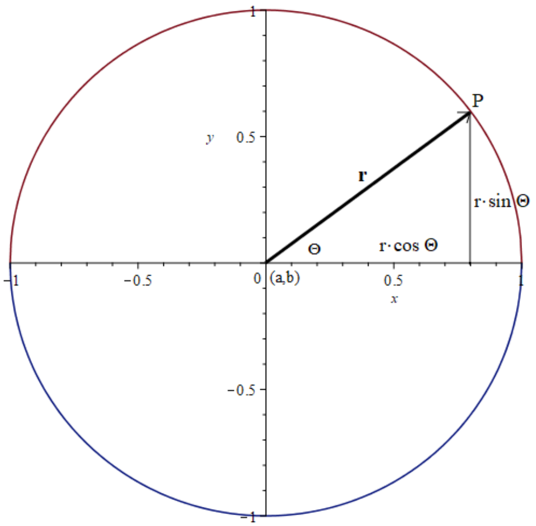
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

que encontramos por Pitágoras y que nos da una imagen fija de las coordenadas (x,y) de un punto del círculo. Pero si, por ejemplo, conocemos a, b, y y r, y aislamos x, tenemos una ecuación de segundo grado con dos raíces para x. Si queremos una sola raíz, tenemos que encontrar la función vectorial de círculos:

Nuevamente consideramos el círculo unitario.



y cambiar los símbolos



Ahora, Origo es el centro local de una máquina no giratoria (inmóvil) ubicada en un edificio. En relación con el sistema de coordenadas del edificio, nuestro Origo tiene las coordenadas O(a,b).

El punto P (un punto pintado en el rotor) tiene la distancia r (radio) desde el centro (O) y está descrito por el vector de posición (también llamado vector de radio), **r**.

El ángulo v, medido en grados, es ahora el ángulo Θ (la letra griega teta) medido en radianes.

En relación con *el propio sistema de coordenadas local de la máquina*, P tiene las coordenadas

P(r·cos Θ, r·sen Θ)

y la función vectorial con vector de posición **r** se convierte en

$$\mathbf{r}(\Theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos\theta \\ r\cdot\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \text{ahora } \Theta \text{ es el parámetro}$$

En relación con *el sistema de coordenadas de los edificios*, **r** tiene las coordenadas

$$\mathbf{r}(\Theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + r \cdot \cos\Theta \\ b + r \cdot \sin\Theta \end{pmatrix}$$

que es la función vectorial completamente expandida del círculo (o función paramétrica).

Tenga en cuenta que ahora Θ es la variable. La posición r depende del ángulo (el parámetro) Θ.

Diferenciación de funciones vectoriales.

Las curvas paramétricas de funciones vectoriales tienen tangentes. La pendiente de una tangente se encuentra derivando ya que estamos acostumbrados a seguir las mismas reglas de cálculo. La novedad es dividir en una ecuación para x y una ecuación para y, que se diferencian por separado con respecto a t. Entonces: ¿cómo cambia x cuando cambia t? ¿Y cómo cambia y cuando cambia t? Observamos esto por el coeficiente diferencial.

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

Las funciones vectoriales pueden tener tangentes *verticales*.

Diferenciación de la función vectorial de una recta

Veamos de nuevo el ejemplo que ya conocemos, la línea recta. Sabemos que el coeficiente diferencial dará como resultado la pendiente constante, a. Dejanos ver:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$x(t) = x_0 + t \cdot r_1$ y $y(t) = y_0 + t \cdot r_2$ =>

$x'(t) = 0 + r_1$ y $y'(t) = 0 + r_2$ =>

$\begin{pmatrix} x´(t) \\ y´(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ que es un vector de dirección que da la pendiente:

$$\text{pendiente} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\mathrm{y´(t)}}{\mathrm{x´(t)}} = \frac{r_2}{r_1} = \mathrm{a}$$

Así, cuando diferenciamos la función vectorial de la recta, podemos obtener la pendiente, que normalmente llamamos a. Entonces, se corresponde con lo que ya sabemos.

Diferenciación de la función vectorial del círculo

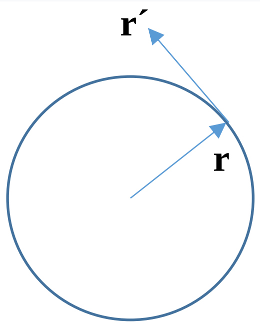
$\mathbf{r}(\Theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{a + r \cdot cos\ \theta} \\ \mathrm{b + r \cdot sin\ \theta} \end{pmatrix}$ Θ es el parámetro =>

Diferenciamos con respecto a Θ y obtenemos

$\mathbf{r}´(\Theta) = \begin{pmatrix} x´ \\ y´ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{r \cdot sin\ \theta} \\ \mathrm{r \cdot cos\ \theta} \end{pmatrix}$

Vemos que (a,b) desaparece (lo que corresponde al hecho de que la posición del círculo en el edificio seguramente no tiene influencia en la pendiente tangente del círculo). Además, vemos que **r**´ tiene una coordenada x similar a la coordenada y de **r**, solo que opuesta (menos), y que **r**´ tiene una coordenada y similar a la coordenada x de **r**. Por lo tanto, r´ se gira 90° con respecto a **r** (lo que corresponde con la dirección de la tangente).

Mostrado en una figura simplificada:

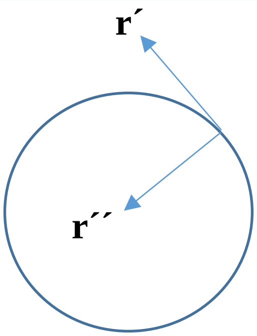


Si diferenciamos una vez más (el coeficiente diferencial de segundo orden, la derivada de segundo orden) obtenemos

$$\mathbf{r}''(\Theta) = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\,r\cdot\cos\theta \\ -\,r\cdot\sin\theta \end{pmatrix}$$

que es un vector **r´´** dirigido en sentido opuesto (debido al signo negativo tanto para x como para y) a **r**.

Mostrado en una figura simple:



La primera derivada es tangente a la circunferencia, como se esperaba.

La segunda derivada no tiene un significado inmediato en matemáticas, pero sí en física, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1

Ahora la máquina gira con velocidad constante (velocidad angular constante) y observamos el punto P (el punto pintado).
Además, definimos la velocidad angular constante:

velocidad angular constante $= \dfrac{\text{ángulo girado en radianes}}{\text{tiempo en segundos}}$ =>

$$\omega = \frac{\theta}{t} \quad \Leftrightarrow \quad \Theta = \omega t$$

Como ω es constante, la variable cambia de Θ a t, y las tres ecuaciones son

$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + r\cdot\cos\omega t \\ b + r\cdot\sin\omega t \end{pmatrix}$ =>

$\mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega\cdot\sin\omega t \\ r\omega\cdot\cos\omega t \end{pmatrix}$ dif. "externa, interna" =>

$\mathbf{r}''(t) = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega^2\cdot\cos\omega t \\ -r\omega^2\cdot\sin\omega t \end{pmatrix}$ dif. "externa, interna"

r es la posición

r´ se llama velocidad tangencial $\mathbf{v}_{\mathbf{tan}}$

r´´ se llama aceleración centrípeta $\mathbf{a}_{\mathbf{c}}$

Como se observa, la aceleración centrípeta se dirige hacia el centro del círculo, como ocurre con todos los movimientos circulares con velocidad constante.

El movimiento circular con velocidad variable también tiene una aceleración centrípeta dirigida hacia el centro (de lo contrario no habría movimiento circular), que, con una aceleración tangencial, comprende la aceleración completa (dos componentes).

2.

Intentemos encontrar las fórmulas para el tamaño de v_{tan} y a_c:

Pitágoras para v_{tan}

$v_{tan} = [(-r\omega\cdot\sin\omega t)^2 + (r\omega\cdot\cos\omega t)^2]^{½}$ ⇔

$v_{tan} = [(r^2\omega^2((\sin\omega t)^2 + (\cos\omega t)^2)]^{½}$ ⇔

y por la relación base: $(\sin v)^2 + (\cos v)^2 = 1^2$

todo se vuelve mucho más corto: =>

$v_{tan} = \omega r$ Cuál es la fórmula para el tamaño de la velocidad tangencial

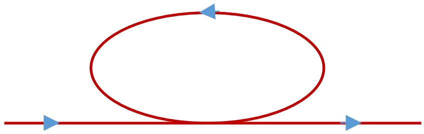
Pitágoras para a_c

$a_c = [(- r\omega^2 \cdot \cos \omega t)^2 + (- r\omega^2 \cdot \sin \omega t)^2]^{½}$ ⇔

$a_c = [(r^2\omega^4((\sin \omega t)^2 + (\cos \omega t)^2)]^{½}$ ⇔ relación básica

$a_c = r\omega^2$ Cuál es la fórmula para el tamaño de la aceleración centrípeta

Puntos Dobles



Si la curva de una función vectorial se corta a sí misma, tenemos un punto doble. Es más fácil encontrar el punto doble dibujando la curva en un diagrama y leyendo las coordenadas, es decir, una solución gráfica. Una tarea para el CAS.

La definición de punto doble es

$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$ => $\begin{pmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_2) \\ y(t_2) \end{pmatrix}$

Un punto doble tiene los mismos valores de x y los mismos valores de y. La diferencia es t.

Ejemplo

Investigaremos si hay puntos dobles y encontraremos las coordenadas en la función vectorial.

$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$ =>

$\mathbf{r}(t_1) = \begin{pmatrix} t_1{}^3 - t_1 \\ t_1{}^2 - 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{r}(t_2) = \begin{pmatrix} t_2{}^3 - t_2 \\ t_2{}^2 - 1 \end{pmatrix}$

En el punto doble tenemos

$x_1 = x_2$ => $t_1^3 - t_1 = t_2^3 - t_2$ *equación 1* y

$y_1 = y_2$ => $t_1^2 - 1 = t_2^2 - 1$ *equación 2*

Por tanto, dos ecuaciones con dos incógnitas. Si resolvemos por CAS tenemos $t_1 = \pm 1$ y $t_2 = \pm 1$

Entonces llegamos al punto doble en $t = -1$ y nuevamente en $t = 1$

Las ecuaciones son difíciles de resolver manualmente, pero intentaremos:

2. $t_1^2 - 1 = t_2^2 - 1$ ⇔ $t_1^2 = t_2^2$

Al principio $t_1 = t_2$ pero eso es falso, ya que las raíces deben ser diferentes. La única respuesta verdadera es:

$t_1 = -t_2$

La que insertamos en la *ecuación 1*

1. $t_1^3 - t_1 = t_2^3 - t_2$ => $(-t_2)^3 + t_2 = t_2^3 - t_2$ ⇔

$-t_2^3 - t_2^3 = -t_2 - t_2$ => $-2t_2^3 = -2t_2$ ⇔

$t_2^3 = t_2$

que es una ecuación de tercer grado con hasta tres raíces, que se encuentra adivinando: 0 está bien, 1 está bien, -1 está bien. Insertado en la *ecuación 2*:

2. $t_2 = 0$ => $t_1 = 0$ $t_2 = 1$ => $t_1 = -1$ $t_2 = -1$ => $t_1 = 1$

Como t_1 y t_2 deben ser diferentes, 0 no es raíz. A la izquierda están las raíces: $t_1 = \pm 1$ y $t_2 = \pm 1$.

La misma respuesta que usar CAS.

Así llegamos al punto doble en t = -1 y nuevamente en t =1

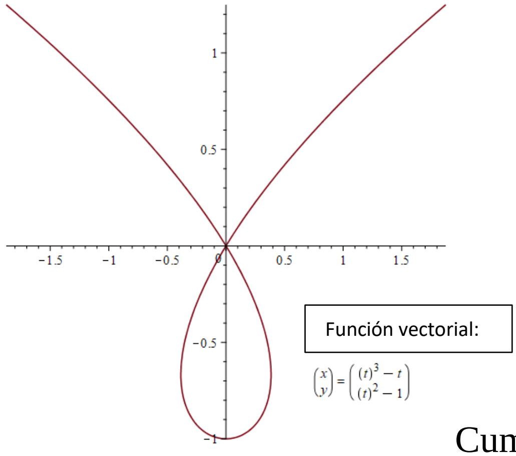
Luego encontramos las coordenadas x e y del punto doble:

insertamos $t = 1$ => $\mathbf{r}(t_1) = \binom{0}{0}$ y $\mathbf{r}(t_2) = \binom{0}{0}$

y insertamos $t = -1$ => $\mathbf{r}(t_1) = \binom{0}{0}$ y $\mathbf{r}(t_2) = \binom{0}{0}$

Por tanto, un punto doble con coordenadas (x, y) = (0, 0)

Terminemos el ejemplo mostrando la curva en un diagrama:



Cumplimiento.

Las funciones vectoriales pueden tener tangentes horizontales y/o verticales para:

horizontal: $\frac{dy}{dt} = y'(t) = 0$ y vertical: $\frac{dx}{dt} = x'(t) = 0$

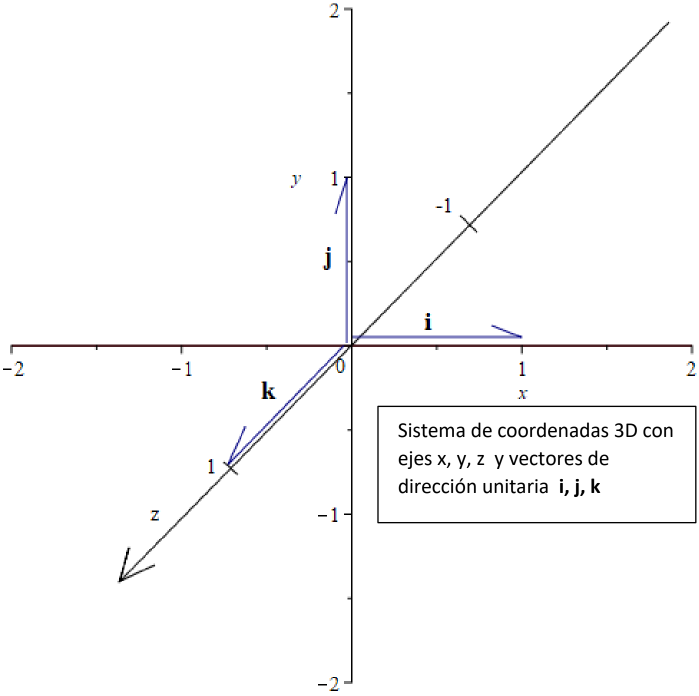
En el ejemplo:

Tangente horizontal en el punto: $y'(t) = 2t = 0$ => $t = 0$ => $(x,y) = (0,-1)$

Vertical: $x'(t) = 3t^2 - 1 = 0$ => $t = \pm 0.58$ => $(x,y) = (0.38 ; -0.67)$ and $(-0.38 ; -0.67)$

Vectores 3D en el espacio

La herramienta vectorial es muy útil trabajando en 3D, en el espacio. Aquí con el eje z (el tercer eje) fuera del plano del papel:



Los vectores unitarios base están dibujados ligeramente al lado del eje, para que podamos verlos.

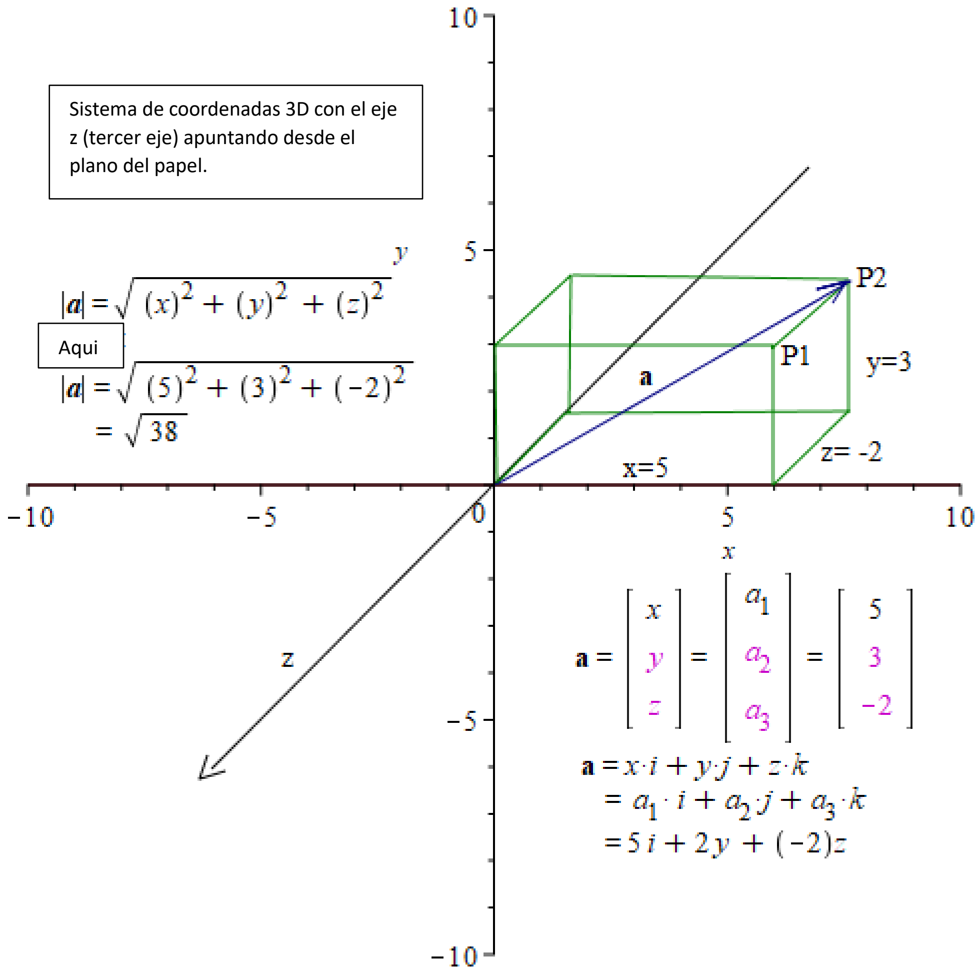
El sistema de coordenadas se puede dibujar en otras posiciones, siempre que el orden sea x, y, z en dirección positiva (en el sentido contrario a las agujas del reloj).

La mayoría de las fórmulas son las mismas que para 2D. Sólo necesitan expandirse en la tercera coordenada que llamamos z, entonces es 3D. La técnica de cálculo también es la misma.

Las diferencias son:

- El determinante no existe en 3D
- El vector transversal no se utiliza en 3D.
- Ahora se puede encontrar un vector normal a partir de una herramienta novedosa, un poco extraña, llamada producto cruzado o producto vectorial.

En el diagrama, mostramos un vector de posición **a** en 3D en un sistema de coordenadas.



También vemos una versión 3D de Pitágoras, con la coordenada z agregada. Se deriva de esta manera:

a se puede dividir en un vector de O (Origo) a P1 con la longitud $(x^2 + y^2)^{½}$ más un vector en la dirección z de P1 a P2 con la longitud z. Estos dos vectores son ortogonales, por lo que aplica Pitágoras:

$|\mathbf{a}|^2 = [(x^2 + y^2)^{½}]^2 + z^2 \quad\Rightarrow$

$|\mathbf{a}|^2 = (x^2 + y^2) + z^2 \quad\Leftrightarrow$

$|\mathbf{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad\Leftrightarrow$

$|\mathbf{a}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{½}$

Que también se puede escribir como raíz cuadrada, como se muestra en el diagrama.

Distancia punto-punto

La distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y, z_2)$ también se encuentra en Pitágoras.

$|P_1P_2| = ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2)^{½}$

Ejemplos

1.

Nosotras tenemos dos vectores $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$

Su suma es $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

y diferencia $\quad$ **a** - **b** = $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}$

y $\quad$ **b** - **a** = $\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}$

Coordenadas x solas, solo y y solo z.

2.

Un vector dos veces (2) de largo que a en el diagrama y en dirección opuesta (-) tiene las coordenadas

$-2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ = -2**a**

3.

Calculemos el producto escalar de dos vectores 3D, por ejemplo **a** y -2**a**

$\mathbf{a} \cdot (-2)\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ = (-50) + (-18) + (-8) = -76

4.

a se puede dividir en tres componentes, uno en la dirección x, uno en y, y otro en z. Lo escribimos de esta manera:

a = 5**i** + 3**j** + (-2)**k** = $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Entonces, si nos paramos en Origo y caminamos 5 pasos en x, 3 pasos en y y 2 pasos en -z, estaremos en el punto final del vector (punta de flecha).
También en 3D, podemos dividir un vector en los componentes que queramos, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

La regla del depósito.

Si en lugar de a utilizamos el nombre **OP** (porque lleva del punto O al punto P) e introducimos un punto Q en (1, 0, 2), tenemos:

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Pasamos de O a Q y luego a P. Combinados de O a P.

O si encontraremos **QP**:

$$\mathbf{QP} = \mathbf{OP} - \mathbf{OQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

5.

La distancia entre dos puntos A(1, -1, 8) y B(-2, 3, -3) es

$|P_1P_2| = ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2)^{½}$ => aqui

$|AB| = ((-2) - 1)^2 + (3 - (-1))^2 + ((-3) - 8)^2)^{½} \approx 12{,}08$

Más teoría

El producto cruzado (el producto vectorial)

El producto cruzado de dos vectores se escribe de esta manera:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{23} \\ d_{31} \\ d_{12} \end{pmatrix}$$

d para determinante.

y se calcula poniendo 3 determinantes uno encima del otro y multiplicando en forma de "cruz" (igual que el determinante en 2D):

$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2 = d_{23} =$ un número para los nuevos vectores valor x

$\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} = a_3b_1 - a_1b_3 = d_{31} =$ un número para los nuevos vectores valor y

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = d_{12} =$ un número para los nuevos vectores valor z

Representando un nuevo vector con las coordenadas calculadas.

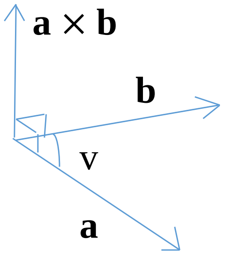
Es curioso, pero en cuanto al producto escalar y el determinante 2D resulta útil.

Es decir, resulta que el vector transversal es ortogonal en ambos vectores originales, aquí: a y b. Esto encontramos, porque los productos escalares son cero:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} =$$

$(a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2) + (a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3) + (a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1) = 0$

el producto escalar es cero, lo que significa a y el vector transversal (**a** × **b**) es ortogonal. Un cálculo similar muestra que **b** y (**a** × **b**) también son ortogonales. Por tanto, el vector transversal es un vector normal tanto **a** a como a **b**.



(**b** × **a** daría el vector cruzado opuesto)

Por tanto, tenemos una herramienta para encontrar un vector normal para a y b, lo que resulta crucial en las próximas fórmulas.

El ángulo entre dos vectores

Es como calcular el ángulo entre dos vectores usando el producto escalar

$$\cos v = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}$$ Probada en 2D, también válida en 3D

Y la determinante de 2D

$$\sin v = \frac{\det(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$ Probada en 2D, solo válida en 2D

podemos encontrar el ángulo usando el producto cruz en 3D

$$\sin v = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$ para mostrar con números en 3D

Parece que el determinante en 2D se ha convertido en el producto cruzado en 3D. La prueba escrita de esta fórmula es muy larga. En lugar de eso, lo mostramos con números en el siguiente ejemplo.

Área

También podemos encontrar el área del paralelogramo expandido por los dos vectores **a** y **b**. Sabemos por 2D:

$$\text{Área}_{\text{paralelogramo}} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin v$$

Si comparamos esta ecuación con la fórmula anterior en la forma

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin v$$

encontramos el área del paralelogramo los vectores se expanden

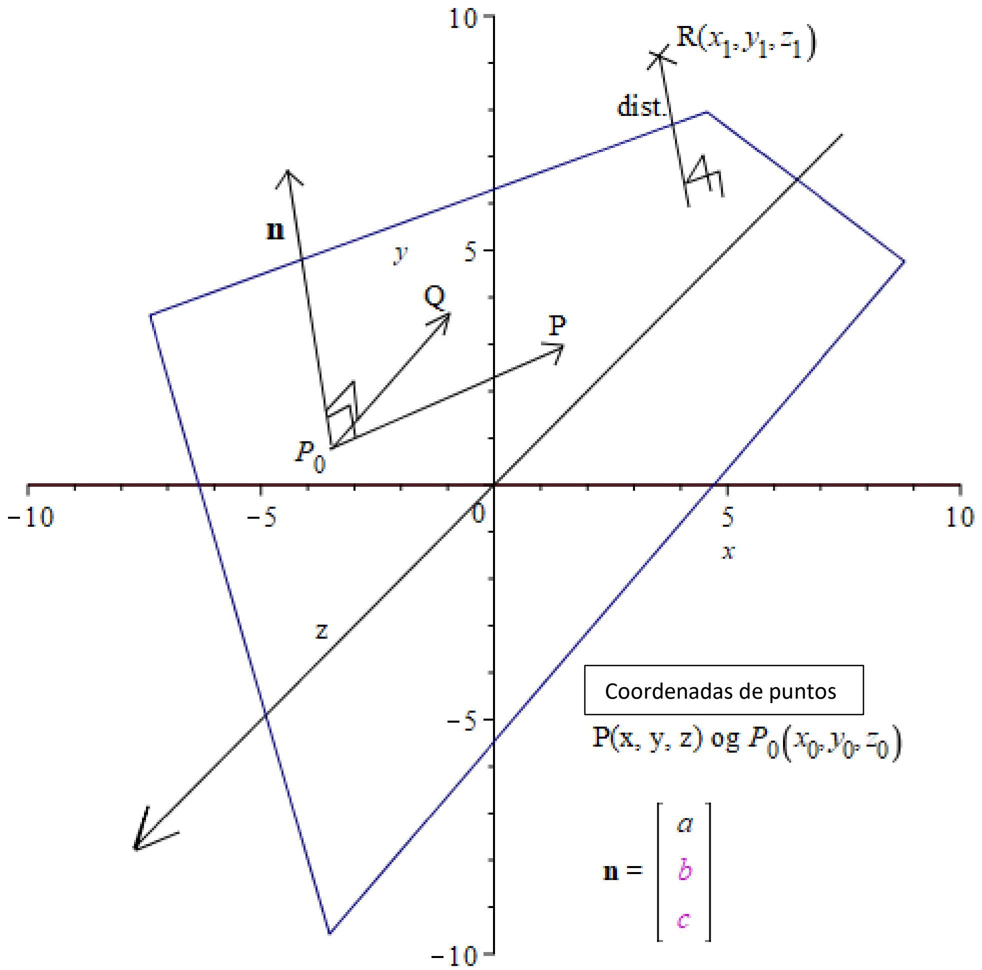
$$\text{Área}_{\text{parallelogram}} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

y para el triángulo los vectores se expanden

$$\text{Área}_{\text{triangle}} = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

La ecuación del plano

Un plano puede ser una pared (recta u oblicua), un piso, un costado de un techo, etc. Necesitamos conocer la ecuación de un plano. Un plano es una figura 2D, pero puede tener una posición oblicua en un sistema de coordenadas 3D y, en consecuencia, debe tener una fórmula 3D. Un plano es infinito en sus dos direcciones, pero su imagen puede ser limitada:



Debemos saber tres cosas sobre un avión, normalmente tres puntos. Se utilizan para formar dos vectores y su vector transversal, que luego es un vector normal del plano.

Intenta sostener un libro y coloca un lápiz ortogonalmente hacia adelante o hacia atrás (eso no importa). Imagine que el lápiz se asienta firmemente. Si se da vuelta el libro, el lápiz lo seguirá. Entonces el vector normal "pertenece" al plano y puede usarse en la ecuación del plano:

En la figura, los puntos conocidos se utilizan para formar dos vectores $\mathbf{P_0P}$ y $\mathbf{P_0Q}$. Su producto vectorial da un vector normal **n**. Sabemos que dos vectores ortogonales tienen un producto escalar de 0

$\mathbf{P_0Q} \cdot \mathbf{n} = 0$ =>

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

que es la ecuación del plano, donde a, b, c son las coordenadas de un vector normal del plano y x_0, y_0, z_0 son las coordenadas de un punto en el plano.

Si multiplicamos entre paréntesis

$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$ =>

Como P_0 es un punto conocido en el plano, las coordenadas de P_0 cumplirán la ecuación del plano. Por lo tanto consideramos $-ax_0 - by_0 - cz_0$ como un tamaño conocido llamado d. De este modo

$ax + by + cz + d = 0$

es una versión corta de la ecuación del plano.

Distancia punto-plano

En el diagrama también se muestra un punto R con la distancia perpendicular dist. al plano.

La fórmula de distancia punto-plano se deriva así:
Formamos un vector $\mathbf{P_0R}$ a partir de los dos puntos del diagrama (el vector no está bosquejado)

$$\mathbf{P_0R} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}$$

que proyectamos sobre el vector normal del plano

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

utilizando la fórmula de longitud de proyección

$$|\mathbf{b_a}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$$

que en nuestro caso es

$$\text{dist.} = \frac{|\mathbf{P_oR} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$$

El numerador es

$$\left| \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right| = | ax_1 - ax_0 + by_1 - by_0 + cz_1 - cz_0 |$$

Como antes la sustituimos $- ax_0 - by_0 - cz_0 = d$ =>

$| ax_1 + by_1 + cz_1 + d |$

El denominador es

$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (Pitágoras)

Combinados tenemos

$$\text{dist.} = \frac{| ax_1 + by_1 + cz_1 + d |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

donde x_1, y_1, z_1 son las coordenadas del punto, - y a, b, c, d provienen de la versión corta de la ecuación del plano.

Ejemplos

1.

Encuentre el ángulo entre dos vectores y el área del paralelogramo que expanden, cuando

a = $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ y **b** = $\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$

El ángulo se calcula mediante el producto escalar en

$$\cos v = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}$$

donde el numerador $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} = -1 - 4 + 9 = 4$

y el denominador $(1^2 + 2^2 + 3^2)^{½} \cdot ((-1)^2 + (-2)^2 + 3^2)^{½} = 14$

Conjunta $\cos v = \frac{4}{14} \Leftrightarrow v = \cos^{-1}\left(\frac{4}{14}\right) \approx 73.4°$

Veamos lo mismo usando el producto cruzado

$$\sin v = \frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$$

numerador $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot3-3\cdot(-2)\\3\cdot(-1)-1\cdot3\\1\cdot(-2)-2\cdot(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\-6\\0\end{pmatrix}$

numerador $\left|\begin{pmatrix}12\\-6\\0\end{pmatrix}\right| = (12^2 + (-6)^2 + 0^2)^{½} = 180^{½} = \sqrt{180}$

denominador $(1^2 + 2^2 + 3^2)^{½} \cdot ((-1)^2 + (-2)^2 + 3^2)^{½} = 14$

Conjunta $\sin v = \frac{\sqrt{180}}{14} \Leftrightarrow v = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{180}}{14}\right) \approx 73.4°$

Misma repuesta.

El área del paralelogramo que expanden los vectores, elegimos calcularla mediante

$\text{Área}_{\text{paralelogramo}} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ => aqui

$\text{Área}_{\text{paralelogramo}} = \sqrt{180} \approx 13.4$

ya que el producto cruzado se calculó anteriormente.

2.

Encontremos la ecuación de un plano con un vector normal

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ y un ponto $P_0(4, 3, -5)$ =>

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ => aqui

$-1(x - 4) + 5(y - 3) + 2(z - (-5)) = 0 \Leftrightarrow$

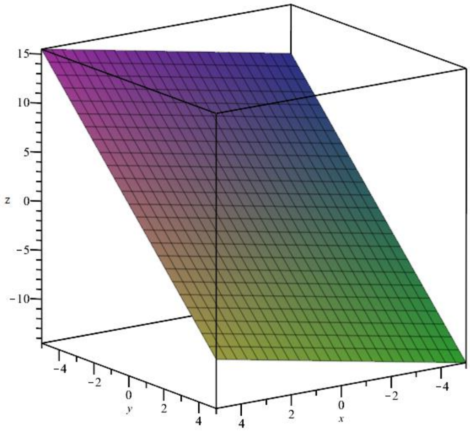
$-x + 4 + 5y - 15 + 2z + 10 = 0 \Leftrightarrow$

$-x + 5y + 2z -1 = 0 \Leftrightarrow$

$x - 5y - 2z + 1 = 0$

que es la ecuación de nuestro avión.

Aquí mostramos este plano en un gráfico 3D:



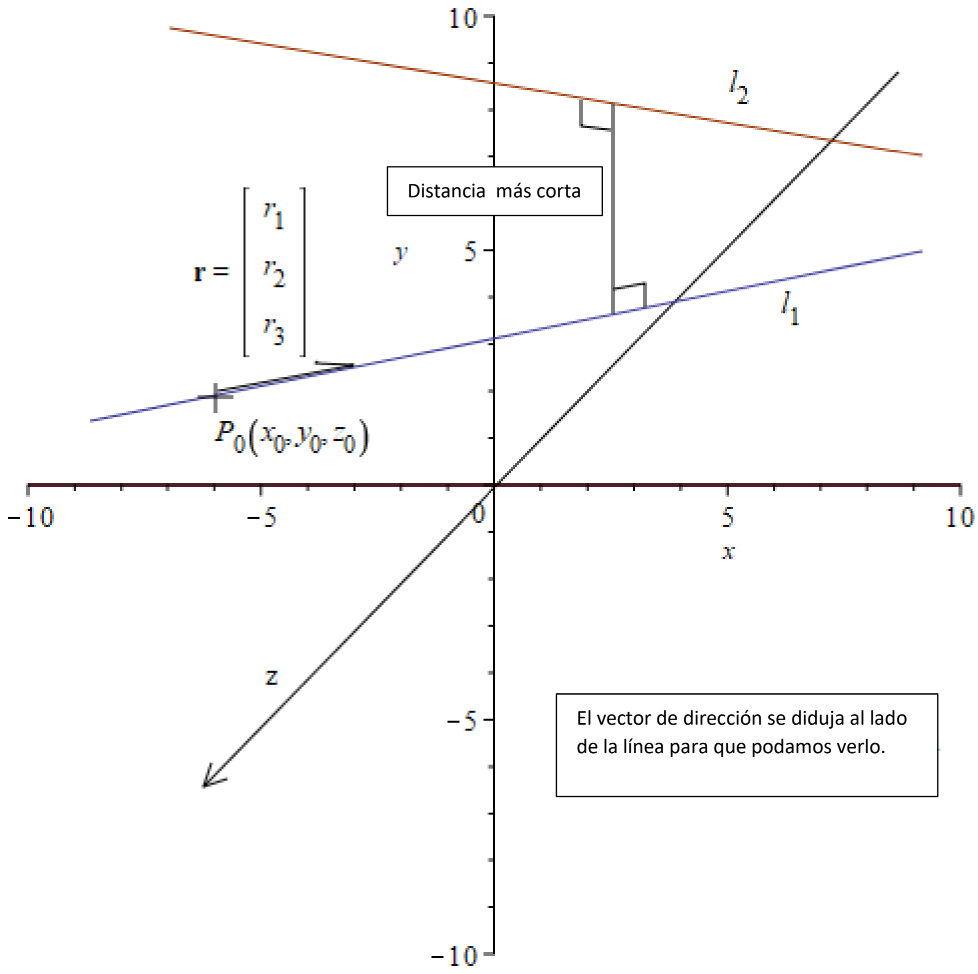
3.

La distancia desde el punto (2, 0, 3) al plano x - 5y - 2z + 1 = 0 es

dist. = $\frac{|\, ax_1 + by_1 + cz_1 + d \,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|\, 1\cdot 2 + (-5)\cdot 0 + (-2)\cdot 3 + 1 \,|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \approx 0.832$

La línea recta en el espacio

Hemos visto cinco ecuaciones para la línea recta: dos en matemáticas ordinarias y tres en matemáticas vectoriales 2D, donde la tercera es una función vectorial que muestra una curva paramétrica.
Cuando analizamos las posibilidades de una ecuación de la línea recta en 3D, solo podemos usar la función vectorial basada en un punto P_0 en la línea y un vector de dirección conocido de la línea. Al igual que en 2D, sólo que ahora con la coordenada z agregada.



La función vectorial de la línea recta se deduce directamente de la línea l_1 en el diagrama. A partir del punto P_0, el vector de dirección puede mover un punto (la punta de la flecha) hacia arriba y hacia abajo en la línea multiplicando por un parámetro, que llamamos t (el parámetro es griego y aquí significa "a lo largo de lo medido"), y puede ser cualquier valor real. número:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

que es la función vectorial (función paramétrica) de una recta en 3D, donde x_0, y_0, z_0 son las coordenadas de un punto de la recta y t es el parámetro. r_1, r_2, r_3 es un vector de dirección.

Las líneas pueden ser paralelas, interseccionadas o, como en la mayoría de los casos, líneas sesgadas.

Si hay más de una línea, los parámetros deben tener nombres diferentes, por ejemplo t, s, etc. para cada línea.

La distancia (más corta) entre líneas sesgadas

El diagrama también muestra la línea l_2 y la línea entre l_1 y l_2 con la distancia más corta. Sólo una línea cumple esto y es ortogonal tanto con l_1 como con l_2.
Ambas líneas tienen un punto conocido que ahora llamamos P_1 y P_2 (aunque no se muestra), y ambas líneas tienen un vector de dirección conocido que llamamos $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$ (aunque no se muestra).
Si cruzamos r_1 y r_2 tenemos un vector normal **n** que sólo se puede situar en la recta de distancia.
Ahora formamos un vector $\mathbf{P_1P_2}$ (no mostrado) y lo proyectamos en n usando la fórmula de longitud de proyección. Esto generará la distancia más corta entre las líneas:

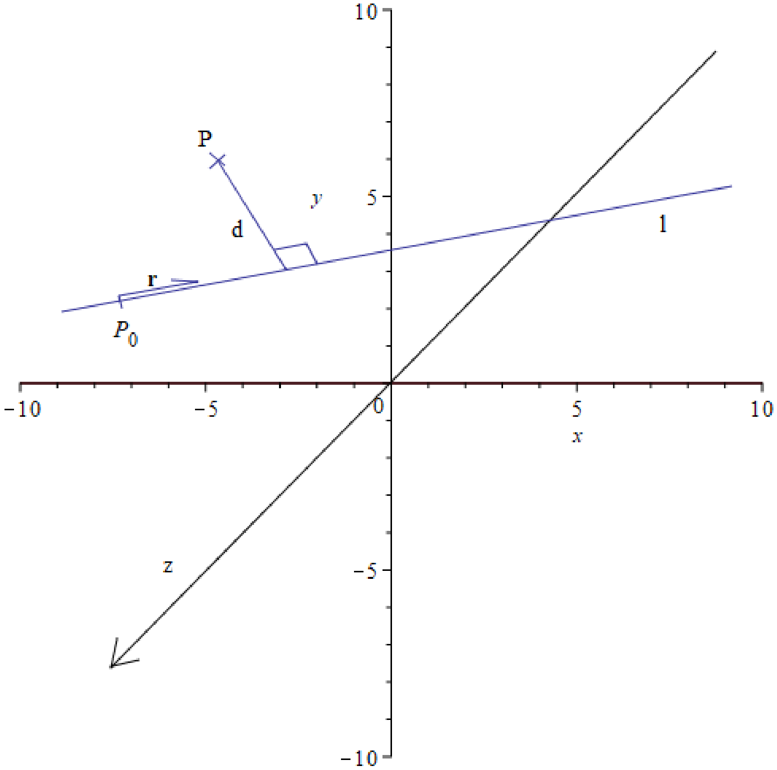
$|\mathbf{b_a}| = \dfrac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$ en nuestro caso =>

$$\text{dist.}(l_1,l_2) = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{P_1P_2}|}{|\mathbf{n}|}$$

donde P_1 es un punto en la línea l_1 y P_2 es un punto en la línea l_2, mientras que **n** es un vector normal común para los vectores directores de las líneas.

La línea de puntos de distancia (más corta)

La distancia (d) de un punto (P) a una recta es la misma que la distancia del punto al vector director de la recta, es decir, de P a **r**.



P_0 es un punto conocido de la recta. Formamos un vector $\mathbf{P_0P}$ con el ángulo v entre $\mathbf{P_0P}$ y l (no mostrado). Entonces

$$d = |\mathbf{P_0P}| \cdot \sin v$$

sin v se encuentra a partir de la fórmula que hemos mostrado en un ejemplo:

$$\sin v = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$ aqui

$$\sin v = \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{P_0P}|}{|\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{P_0P}|}$$ => insertado en d

$$d = |\mathbf{P_0P}| \cdot \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{P_0P}|}{|\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{P_0P}|} \quad \Leftrightarrow$$

$$d = \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{P_0P}|}{|\mathbf{r}|}$$

que es la fórmula de distancia punto-línea, donde P es el punto, **r** es el vector de dirección de la línea y P_0 es un punto en la línea.

La distancia entre dos planos paralelos

Los planos son paralelos si sus vectores normales son proporcionales, por ejemplo

$x - 5y - 2z + 1 = 0$ y $-2x + 10y + 4z = 0$

donde se ve que

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$ el factor de proporcionalidad es -2

Luego, la distancia se encuentra seleccionando un punto en un plano y calcula la distancia al otro plano usando la fórmula de distancia punto-plano.

El ángulo v entre dos planos

es igual al ángulo entre sus vectores normales, que se puede encontrar de dos maneras, como se mostró anteriormente.

Ya sea a través del producto escalar

$$\cos v = \frac{\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2}}{|\mathbf{n_1}| \cdot |\mathbf{n_2}|}$$

o mediante el producto cruzado

$$\sin v = \frac{|\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}|}{|\mathbf{n_1}| \cdot |\mathbf{n_2}|}$$

y luego terminar con la función inversa para aislar el ángulo (aquí llamado v).
El vector normal puede alejarse de cualquier lado del plano, por lo que dependiendo del lado elegido, encontramos el ángulo agudo (< 90°) o el ángulo obtuso (> 90°) entre los planos.

El ángulo entre la línea y el plano

se encuentra mediante el ángulo u entre el vector director de la recta y el vector normal del plano. Como se indicó anteriormente, se puede hacer mediante el producto escalar.

$$\cos u = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{n}|}$$

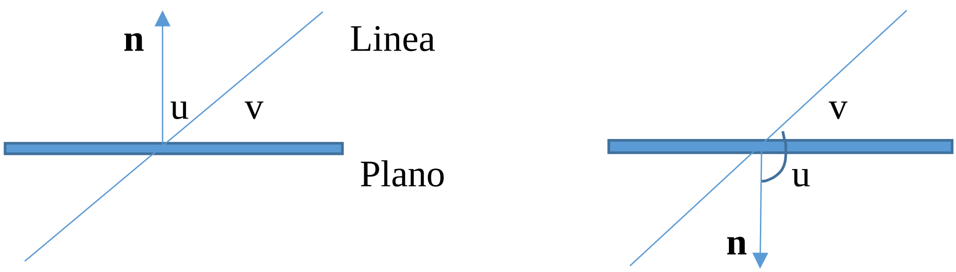
o mediante el producto cruzado

$$\sin u = \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{n}|}{|\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{n}|}$$

y continúa usando la función inversa para aislar u. Finalmente, el ángulo v entre la línea y el plano se calcula teniendo en cuenta que **n** está girado 90° con respecto al plano. Además, dado que **n** puede estar a cualquier lado del plano, nuestra v debe encontrarse mediante

cualquiera $v = 90° - u$ o $v = u - 90°$

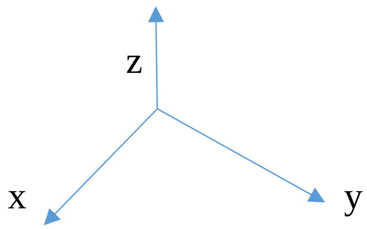
que se ve en la figura:



Ejemplos

1.

Ahora elegimos un sistema de coordenadas local, donde xey son horizontales y z es vertical. Esto se aplica a menudo al aire libre en el terreno. Los topógrafos utilizan tanto sistemas globales (GPS) como sistemas locales relativos a puntos fijos conocidos, como la piedra angular de un edificio antiguo.



Encontraremos la distancia entre dos rectas y la calcularemos en metros:

La parte inferior de un paso elevado de ferrocarril sigue una línea recta que pasa por el punto (10, 10, 7) y tiene un vector director $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ que representa esta función vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad => \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se observa que la coordenada z de los vectores de dirección es 0, por lo que la línea (aquí el paso elevado del ferrocarril) es horizontal.

La parte superior de una autopista sigue una línea recta que pasa por el punto (5, 6, 2) y tiene un vector director $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ que representa esta función vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad => \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

Se observa que la coordenada z de los vectores de dirección no es 0, por lo que la línea (aquí la autopista) no es horizontal.

Se observa que los vectores de dirección son diferentes, por lo que las líneas están sesgadas y se cruzarán en algún lugar desde donde se puede calcular la distancia más corta

$$\text{dist.}(l_1,l_2) = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{P_1P_2}|}{|\mathbf{n}|}$$

Al paso elevado del ferrocarril lo llamamos l_1 y a la autopista l_2.

P_1 es el punto conocido en l_1: (10, 10, 7)

P_2 es el punto conocido en l_2: (5, 6, 2)

El vector $\mathbf{P_1P_2}$ entonces es: $\begin{pmatrix} 5-10 \\ 6-10 \\ 2-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

El vector normal común es

$$\mathbf{n} = \mathbf{r_1} \times \mathbf{r_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ -0.4 \\ 13 \end{pmatrix}$$

numerador $\left|\begin{pmatrix} 0,6 \\ -0.4 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = |-3 + 1.6 - 65| = 66.4$

denominador $((0{,}6)^2 + (-0.4)^2 + 13^2)^{½} \approx 13.02$

conjunta dist.$(l_1,l_2) = \frac{66.4}{13.02} \approx 5.1$ metros

2.

La línea central de una autopista tiene (como en el ejemplo 1) la función vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

En relación con el mismo sistema de coordenadas local, alguien desea construir una casa con las coordenadas (301, 411, 9) de la esquina más cercana a la autopista. Calculemos la distancia entre la línea central y la esquina en metros:

$d = \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{PoP}|}{|\mathbf{r}|}$ donde

numerador $|\,\mathbf{r} \times \mathbf{P_0P}\,| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0.2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 301-5 \\ 411-6 \\ 9-2 \end{pmatrix} \right| =$

$$\left| \begin{pmatrix} -46 \\ 66.2 \\ -1885 \end{pmatrix} \right| = ((-46)^2 + 66.2^2 + (-1885)^2)^{½} \approx 1887$$

denominador $|\mathbf{r}| = ((-1)^2 + 5^2 + 0.2^2)^{½} \approx 5.103$

Conjunta $d = \frac{1887}{5.103} \approx 369.8$ metros

3.

Encontraremos la distancia entre dos planos paralelos.

x - 5y - 2z + 1 = 0   y   -2x + 10y +4z = 0

Primero controlamos que los planos sean paralelos y encontramos que sus vectores normales son proporcionales (por un factor -2). Entonces, son paralelos. (De lo contrario no tendría sentido continuar).
En el primer plano elegimos un punto con x = 0 e y = 0 el cual insertamos y obtenemos $z = \frac{1}{2}$
Del punto $(0, 0, \frac{1}{2})$ al otro plano $-2x + 10y + 4z = 0$ la distancia es

$$\text{dist.} = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad => \qquad \text{aqui}$$

$$\text{dist.} = \frac{|(-2)\cdot 0+10\cdot 0+4\cdot 0{,}5+0|}{\sqrt{(-2)^2+10^2+4^2}} = \frac{|0+0+2+0|}{\sqrt{120}} = \frac{2}{\sqrt{120}} \approx 0.183$$

4.

Encontremos el ángulo entre los dos planos en el ejemplo 3. Sabemos que son paralelos, por lo que el ángulo debe ser 0°. Esta vez controlamos con la fórmula del producto escalar.

$$\cos v = \frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\cdot|\mathbf{n}_2|} \qquad => \qquad \text{aqui}$$

numerador $\begin{pmatrix}1\\-5\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\10\\4\end{pmatrix} = -2 + (-50) + (-8) = -60$

denominador $(1^2 + (-5)^2 + (-2)^2)^{½} \cdot ((-2)^2 + 10^2 + 4^2)^{½} = 60$

conjunta $\cos v = \frac{-60}{60} = -1 \quad => \quad v = 180°$

Que obtengamos 0° o 180° depende de la dirección de los vectores normales. Por tanto, una respuesta de 180° se corresponde perfectamente con planos paralelos.

5.

La superficie de un techo se encuentra en un plano con la ecuación

x + 0y - z = 0 o z = x + 0y

La línea central de una chimenea tiene la ecuación

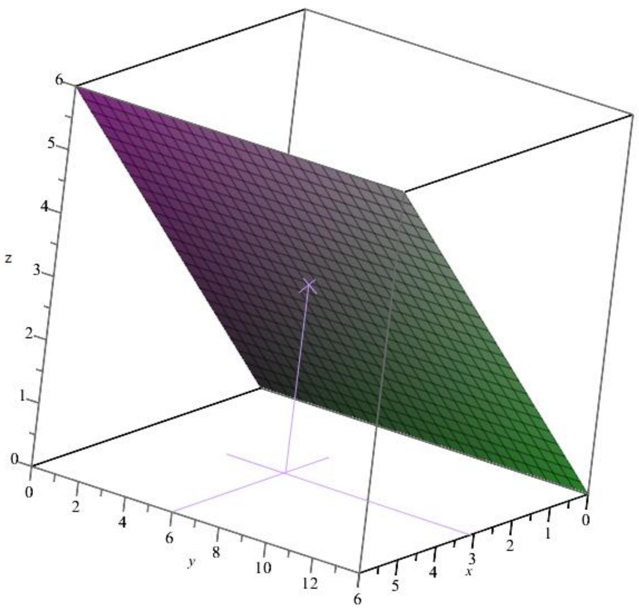
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

¿En qué punto la línea central de la chimenea cortará la superficie del techo? (es decir, ¿dónde se cruza la línea con el plano?).
¿Cuál es el ángulo agudo entre la chimenea y el techo?
¿Cuál es el ángulo del techo con respecto a la horizontal?

Necesitamos incluir la coordenada y (aunque sea 0) para mostrar que estamos tratando con un plano. Si no lo hacemos, se podría considerar que consideramos una línea en 2D.

0y significa que el plano no está torcido con respecto al eje y. y determina dónde estamos en la longitud del techo, mientras que x y z determinan la pendiente del techo.

Un plano es infinitamente grande, mientras que el techo del avión tiene un tamaño limitado. Construiremos una casa de 14 metros de largo y 12 metros de ancho. Entonces mostramos una gráfica con x en el intervalo [0;6] e y en el intervalo [0;14]. z se convertirá en lo que representa la ecuación del plano. Podemos resolver el problema sin una figura, pero en el diagrama se muestra un gráfico:



Tenga en cuenta que las divisiones en el eje no son equidistantes.

Respuesta:
El punto de intersección es donde las ecuaciones de la recta y del plano tienen los mismos valores x, y, z. Por tanto, dos ecuaciones con dos incógnitas.

Insertamos línea en el plano:

$x + 0y - z = 0$		=>
es decir	$3 + 0t$	para x
y	nada	para y

y 2 + 4t para z

conjunta $3 - (2 + 4t) = 0 \Leftrightarrow$

$1 - 4t = 0 \Leftrightarrow$

$t = \frac{1}{4}$

entonces, cuando el parámetro t "en ejecución" es $\frac{1}{4}$, estamos en la intersección. Esta t se inserta en la ecuación lineal.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lo que produce el punto de intersección (x, y, z) = (3, 6, 3) que también se muestra en la figura con algunas líneas de ayuda.

El ángulo entre la chimenea y el techo:

$\cos u = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{n}|}$ => aqui

numerador $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -4$

denominador $(4^2)^{½} \cdot (1^2 + (-1)^2)^{½} = 4\sqrt{2}$

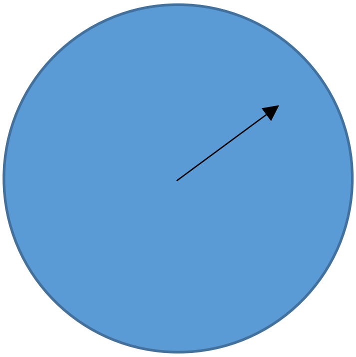
conjunta $\cos u = \frac{-4}{4\sqrt{2}}$ => $u = 135°$

Debido a la dirección del vector normal, encontramos el ángulo obtuso. El ángulo agudo entre la chimenea y el techo es
180° - 135° = 45°.

El ángulo entre el techo y la horizontal es

vertical - 45° = 90° - 45° = 45°

La esfera



La flecha muestra un radio desde el centro C hasta un punto P en la capa esférica.

C tiene las coordenadas (a, b, c) y P tiene las coordenadas (x, y, z) en un sistema de coordenadas 3D.

La distancia entre C y P es el radio, r.

La distancia entre dos puntos en 3D se derivó anteriormente como

$|P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ Pitágoras en 3D

que aqui esta

$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$ la ecuación de la esfera

Plano de la tangente

La ecuación de un plano tangente a un punto de la esfera se determina formando un vector normal desde el centro al punto y utilizándolo en la ecuación del plano.

Ejemplo 1

Esfera: $3^2 = (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2$

que tiene el centro en C(0,1,2) y radio r = 3

Encuentra la ecuación del plano tangente en el punto P(0,1,5) = (x_0, y_0, z_0) en el plano

Formamos el vector normal del plano final menos inicio

n = **CP** = (0 - 0 , 1 - 1 , 5 - 2) = (0,0,3)

insertado en la ecuación de los planos

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ =>

$0(x - 0) + 0(y - 1) + 3(z - 5) = 0$ ⇔

$3z - 15 = 0$ ⇔

$z = 5$ Cuál es la ecuación del plano tangente.

Parte 5. Estadísticas

Muy inusualmente, la estadística es matemática imprecisa. En el pasado, se discutió si la materia debería, o no, convertirse en un campo dentro de las matemáticas. Lo impreciso es un argumento en contra, pero el uso de cifras y cálculos es un argumento a favor. Entonces, se decidió que la estadística es un campo dentro de las matemáticas.

La estadística es necesaria cuando manejamos grandes cantidades de datos, lo que en el mundo real implicará excepciones y falencias, imposibilitando ser precisos.

Por tanto, necesitamos conceptos como valor medio, valor medio, dispersión, desviación estándar y alguna herramienta para estimar la precisión de nuestros cálculos. Una buena pregunta sigue siendo: ¿Cuántas observaciones/información/datos necesitamos para hacer una estimación?

Esto lo discutiremos brevemente y comenzaremos considerando observaciones no agrupadas.

Observaciones

Observaciones no agrupadas

Una bolsa de dulces contiene 30 dulces. Pesan casi lo mismo, pero no del todo. La información se resume en la tabla:

Observación. Aquí peso por dulce en gramos	Número de observaciones	Frecuencia, f Fuera de 1	Frecuencia Sobre 100, es decir, en %	Frecuencia acumulada Frecuencias resumidas
2.1	1	0.0333	3.3	0.0333
2.2	5	0.167	16.7	0.2
2.3	7	0.233	23.3	0.433
2.4	7	0.233	23.3	0.666
2.5	6	0.200	20.0	0.866
2.6	4	0.133	13.3	1
Total:	*30*	*1*	*100 %*	*1*

Se miden las observaciones y el número de observaciones, mientras que se calculan la frecuencia y la frecuencia acumulada. El fabricante intenta conseguir un peso medio de 2,35 gramos por caramelo. Observamos también que 2,35 es la media de los valores de 2,1 a 2,6 gramos:

$$\text{promedio} = \frac{2.1+2.2+2.3+2.4+2.5+2.6}{6} = 2.35 \text{ gramo}$$

However, the sweets are not equally dispersed between heavier or lighter sweets. So, we have to be more precise and calculate the mean value. The mean value is the mean of all observations and calculated by saying: observation multiplied by frequency, plus the next, etc. - all of it divided by the total number of sweets:

$$\text{valor medio} = \frac{2.1\cdot 1+2.2\cdot 5+2.3\cdot 7+2.4\cdot 7+2.5\cdot 6+2.6\cdot 4}{30} = 2.38 \text{ gramo}$$

O diciendo: observación multiplicada por frecuencia más la siguiente, etc.:

valor medio =

$2.1 \cdot 0.333 + 2.2 \cdot 0.167 + 2.3 \cdot 0.233 + 2.4 \cdot 0.233 + 2.5 \cdot 0.2 + 2.6 \cdot 0.133$ =

2.38 gramo

Así, el consumidor obtiene un poco más por su dinero.

Cuartiles, es la división del número de puntos de datos en cuatro partes o cuartos. El primer cuartil es igual o mayor que el 25 % de los datos, lo que se puede leer en la columna "Frecuencia acumulada". El segundo cuartil (también llamado mediana) es ≥ 50 % de los datos. El tercer cuartil es ≥ 75 % de los datos y, finalmente, el cuarto cuartil comprende todos los datos, el 100 %, de toda la serie de observaciones. Los cuartiles también pueden denominarse percentiles.

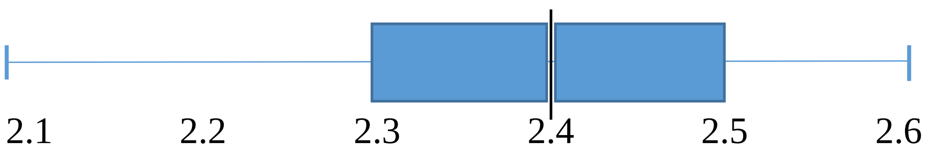
Un conjunto de cuartiles consta del primero, segundo y tercer cuartil. Para nuestros dulces es: [2.3 ; 2.4; 2.5].

Obtenemos una buena descripción general haciendo un gráfico de cuadros:

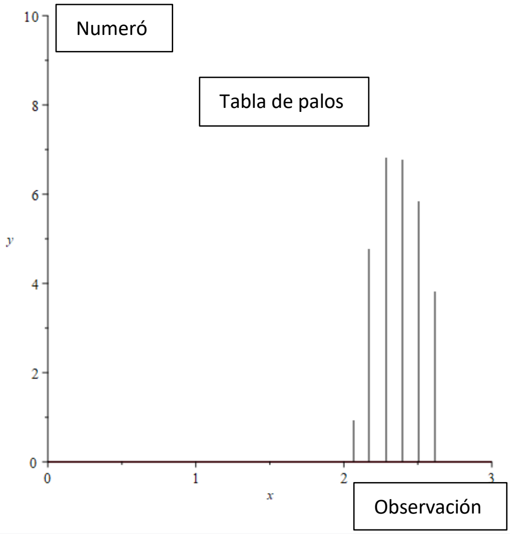
observación más pequeña - 1.cuartil - 2.cuartil - 3.cuartil - observación más grande

Aqui: 2.1 - 2.3 - 2.4 - 2.5 - 2.6

Y el gráfico de cuadros:



O una tabla de palos:



Observaciones agrupadas

En una producción de rodamientos de bolas se fabrican esferas con un diámetro de 5,00 milímetros. Algunos son un poco más grandes y otros son un poco más pequeños. Esto se compensa utilizando esferas pequeñas con anillos gruesos, y las esferas más grandes se utilizan con anillos más finos. De esta forma no se desperdicia nada y los rodamientos de bolas tendrán la dimensión requerida. Reunimos las esferas en grupos de la siguiente manera:

Observación. Aquí diámetro	Número de observaciones	Frecuencia, f Fuera de 1	Frecuencia Sobre 100, es decir, en %	Frecuencia acumulada Frecuencias resumidas
[4.80 ; 4.85]	1	0.01	1	0.01
]4.85 ; 4.90]	5	0.05	5	0.06
]4.90 ; 4.95]	21	0.21	21	0.27
]4.95 ; 5.00]	33	0.33	33	0.6
]5.00 ; 5.05]	31	0.31	31	0.91
]5.05 ; 5.10]	9	0.09	9	1
Total	*100*	*1*	*100 %*	*1*

Al calcular el valor medio utilizamos el diámetro en el medio del intervalo, es decir, 4,825 mm, 4,875 mm, etc. Por lo tanto, el cálculo es algo impreciso, pero se acepta:

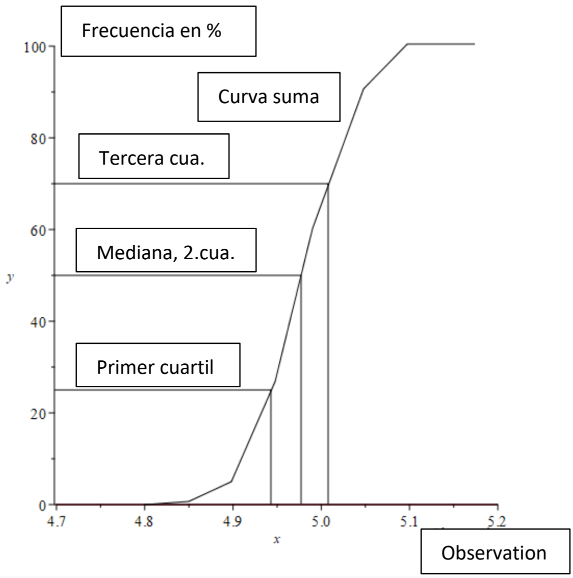
valor medio =

$4.825 \cdot 0.01 + 4.875 \cdot 0.05 + 4.925 \cdot 0.21 + 4.975 \cdot 0.33 + 5.025 \cdot 0.31 + 5.075 \cdot 0.09 =$

4.983 mm.

La planta de producción está funcionando bien, aunque es posible que se le realicen ajustes finos.

Sería demasiado tosco leer el conjunto de cuartiles de la tabla.
Es posible dibujar un gráfico de cajas o de barras, pero es mejor dibujar una curva suma en un diagrama:



En el primer eje están las observaciones de la tabla.

En el segundo eje están las frecuencias acumuladas de la tabla.

Ahora podemos tener una lectura más fina del conjunto de cuartiles de la curva suma: Pasamos del 25%, 50%, 75%

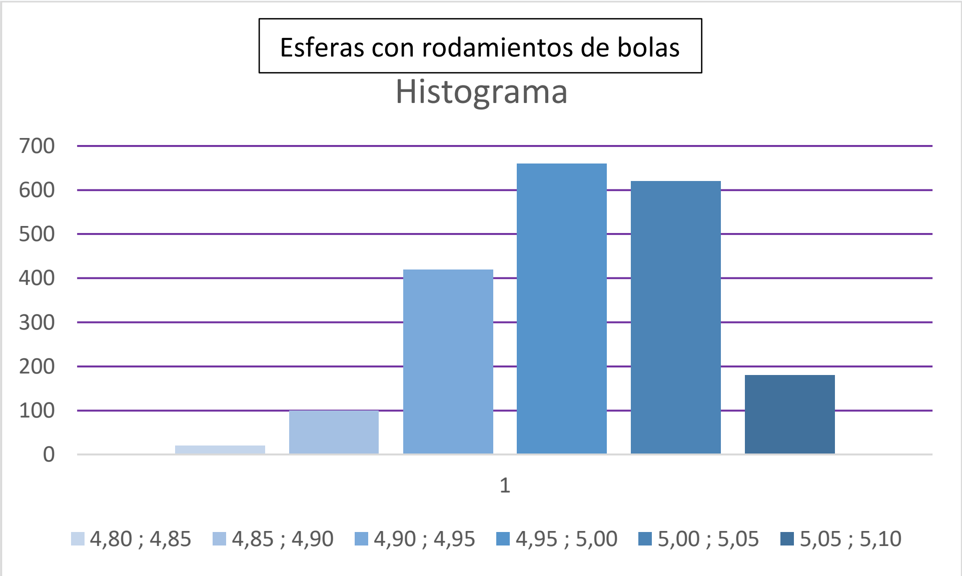
horizontalmente a la curva y verticalmente al primer eje para leer el conjunto de cuartiles: [1.qua. ; 2. qua. ; 3.qua.] = [4,94; 4.976; 5.01]

Dado que es una lectura, será inexacta (con cierta incertidumbre).

Cuantos más datos tengamos y más intervalos definamos, más fina y suave será la curva suma.

Finalmente, mostraremos el histograma, que es un diagrama de columnas especial que muestra el historial de las mediciones, de modo que el área de cada columna se corresponde con la frecuencia del intervalo.

A continuación mostramos la producción de rodamientos de bolas con los datos de la tabla:



Los grupos están en el primer eje. En el segundo eje está el número que multiplicamos por el ancho de la observación para representar la frecuencia en porcentaje,%. Aquí el ancho de todos los grupos es 0,05:

$(4.85 - 4.80) \cdot 20 = 1\ \%$ $\quad$ $0.05 \cdot 100 = 5\ \%$ $\quad$ $0.05 \cdot 420 = 21\ \%$

$0.05 \cdot 660 = 33\ \%$ $\quad$ $0.05 \cdot 620 = 31\ \%$ $\quad$ $0.05 \cdot 180 = 9\ \%$

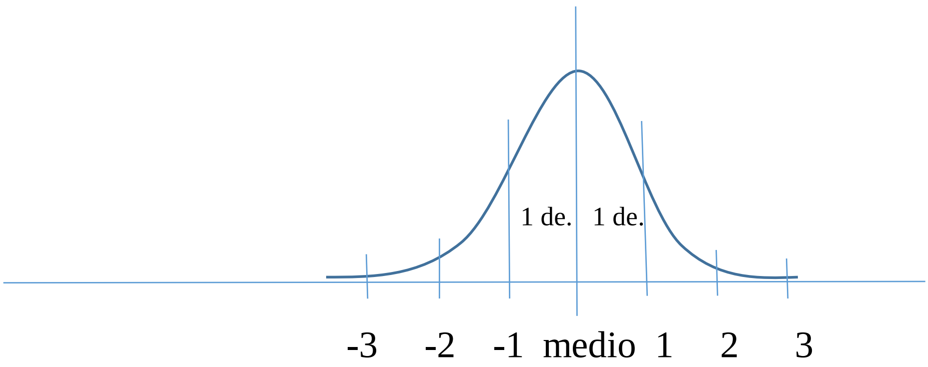
Encontramos que el total es 100%, tal como debería ser.

Por tanto, el segundo eje del diagrama no muestra nada directamente útil. Es el área la que muestra la frecuencia. En cierto modo, el histograma es el precursor de la curva de distribución normal (ver más abajo), que también tiene un área de 1 o 100% bajo la curva. Por lo demás, la ventaja de este diagrama es principalmente para medidas con diferentes anchos.

En conjunto, es justo decir que los gráficos de barras y las curvas de suma a menudo brindan la mejor descripción general.

Distribución normal, varianza y desviación estándar

Muchas observaciones tienen una distribución normal, lo que significa que, por ejemplo, los diámetros de las esferas se dispersarán simétricamente alrededor del valor medio de 5 mm. Esto no fue exactamente así en nuestro caso, pero si estuviéramos observando 1.000 o 10.000 esferas, probablemente tendrían una distribución normal. Una curva de distribución normal puede verse así:



Área: 0,1% 2,3% 13,6% 34,1% 34,1% 13,6% 2,3% 0,1%

Si dibujamos un diagrama de barras o un histograma a partir de muchas medidas distribuidas normales, tendremos una curva en forma de campana como se muestra.

La cifra puede ser mayor o menor dependiendo de la división de la escala. La cuestión es que todas las observaciones están bajo la curva, de modo que el área bajo la curva incluye todas (100 %) las observaciones de, por ejemplo, las esferas de nuestros rodamientos de bolas. Por tanto, el área bajo la curva es 1 o 100 %.

Se muestran tres líneas a cada lado del valor medio. La distancia entre dos líneas se llama desviación estándar, de (o dispersión). Hay tres desviaciones estándar hacia la izquierda y tres desviaciones estándar hacia la derecha.

el área entre la línea -1 y 1 incluye el 68,2 % de las mediciones

el área entre las líneas -2 y 2 incluye el 95,4 % de las mediciones

el área entre las líneas -3 y 3 incluye el 98,8 % de las mediciones

Los dos últimos multiplicados por 0,1 % están más alejados del valor medio, donde la curva de distribución normal se acerca asintóticamente al primer eje.

En ciencia solemos presentar los datos de esta manera:

valor medio ± desviación estándar

Así, el 68,2 % de los datos medidos se encuentran dentro de ± la desviación estándar (es decir, entre las líneas -1 y 1). Entonces sabemos cómo es toda la curva de distribución.

Sin embargo, ¿cómo calculamos la desviación estándar?

En primer lugar, hay que decidir cómo se llama desviación estándar.

La idea era considerar qué tan lejos está una observación del valor medio, y luego ampliar la distancia elevando al cuadrado, y al mismo tiempo tener un número positivo, ya sea que estemos por debajo o por encima del valor medio:

(obs. - medio)^2

and multiply by the significance, i.e. the frequency, for each observation

f · (obs. - medio)^2

y resumir todas las observaciones

Σ f · (obs. - medio)^2

Σ significa "la suma de". Una expresión matemática completa.

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \mu)^2$$

Donde el valor medio se llama μ (la letra griega "my"), la observación se llama x_i, i (integer (inglés) = número entero) es el número de la observación desde 1 (inicio) hasta n (fin).

Por tanto, definimos la variación como

$$\text{Var.} = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \mu)^2$$

que expresa qué tan lejos estamos del valor medio.

Solo que resultó estar demasiado lejos, así que continuamos sacando la raíz cuadrada para obtener la desviación estándar.

desviación estándar $= \sqrt{Var.}$

La desviación estándar a menudo se llama σ (una sigma griega)

$\sigma = \sqrt{Var.}$

Por tanto, ahora podemos calcular la desviación estándar de la varianza.

Los científicos han acordado presentar los datos como

valor medio ± desviación estándar ⇔ $\mu \pm \sigma$

Ejemplo 1

El valor medio de las esferas del rodamiento de bolas se calculó previamente como

μ = 4,983 mm.

Aunque no tenemos tantos datos, y aunque la distribución es desigual con más esferas más grandes que la media y menos esferas más pequeñas que la media, suponemos que si tuviéramos muchos más datos, tendríamos una distribución normal. Sujeto a esta condición, la desviación estándar se puede calcular como

$$\text{Var.} = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \mu)^2 \qquad =>$$

$$\text{Var.} = 0.01\cdot(4.825 - 4.983)^2 + 0.05\cdot(4.875 - 4.983)^2 + 0.21\cdot(4.925 - 4.983)^2 + 0.33\cdot(4.975 - 4.983)^2 + 0{,}31\cdot(5.025 - 4.983)^2 + 0.09\cdot(5.075 - 4.983)^2 = 0.00282 \qquad =>$$

$$\sigma = \sqrt{Var.} = \sqrt{0.00282} = 0.0531 \text{ mm.}$$

Combinados el valor medio y la desviación estándar son:

$\mu \pm \sigma$ => 4.983 ± 0.053 mm.

No todas las series de mediciones tienen distribución normal. Entonces tendremos una curva de distribución sesgada. Un tratamiento más detallado de esto queda fuera del alcance de este libro.

Chi elevado a dos: prueba

Podemos formar un cociente para evaluar si algunas observaciones (intervalos o series completas) están cerca o más lejos de lo esperado:

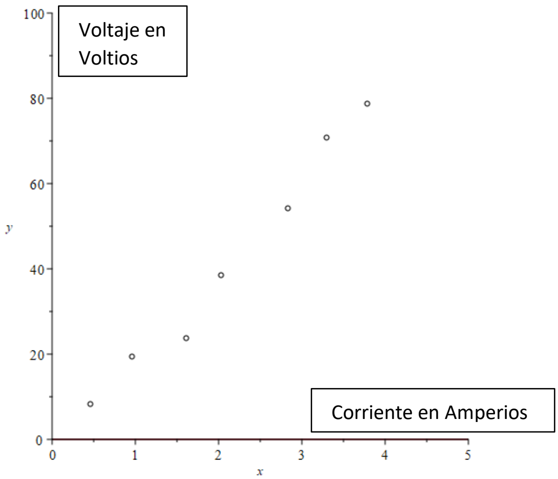
$$\chi^2 = \Sigma \frac{(observación - observación\ esperada)^2}{observación\ esperada}$$

Usamos la letra griega antigua χ = Chi y el cociente se llama chi elevado a dos: prueba. En el numerador, magnificamos la desviación elevando al cuadrado y al mismo tiempo obtenemos un número positivo sin importar si estamos por encima o por debajo de lo esperado, la misma forma de pensar que para la varianza.

Si lo observado es igual a lo esperado, el cociente es cero, lo cual es perfecto. Una distancia mayor entre lo observado y lo esperado genera un cociente mayor.

Regresión

En matemáticas utilizamos el concepto: Regresión, para organizar las medidas en una función de mejor ajuste.
Hemos estado en el laboratorio para medir corrientes (I) y voltajes (U) en un circuito. Medimos esto:



Sabemos que las medidas deben seguir la ley de Ohm.

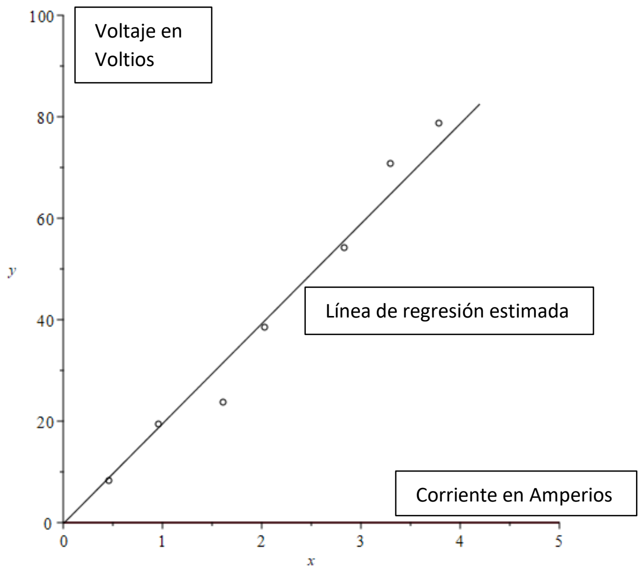
U = R · I donde R es la resistencia en Ohmios.

Esto se corresponde con la ecuación de una línea recta que pasa por Origo (0,0):

$y = a \cdot x$

Ahora el segundo eje es U, el primer eje es I y la pendiente es R. Por tanto, la ley de Ohm muestra una línea recta en un diagrama I,U y, por tanto, sabemos que nuestras mediciones deben formar una línea recta. Sin embargo, existen incertidumbres en nuestras mediciones, entonces, ¿qué línea recta se ajusta mejor?

Enseguida podemos colocar una regla para ver que esta línea es casi perfecta:



Las cosas se vuelven mucho más complicadas si queremos determinar la línea que mejor se ajusta mediante cálculo. Usamos el “método de mínimos cuadrados” en el que adivinamos una línea, encontramos la distancia vertical entre un punto de medición y la línea, y la elevamos al cuadrado (la misma forma de pensar que para la varianza). Lo hacemos para todos los puntos medidos y resumimos los cuadrados. Luego adivinamos otras líneas, calculamos nuevos cuadrados y elegimos la línea con el mínimo cuadrado. Esta línea es nuestra línea de regresión calculada, o "curva de mejor ajuste".

Claramente, este es un trabajo de cálculo importante adecuado para CAS avanzado.

Independientemente de utilizar una calculadora o un programa de cálculo, el principio es el mismo. En nuestro ejemplo:

1. Introducimos los datos medidos para el primer eje y los llamamos I
2. Ingresamos los datos medidos para el segundo eje y los llamamos U
3. Solicitamos una regresión lineal usando $y = ax + b$ o escribimos una línea clave como: *LinReg(I,U)*
4. Ingrese

Luego, tendremos un diagrama con una recta de regresión y su ecuación.

A menudo también obtenemos un factor de confiabilidad, a menudo llamado r o R (tal vez al cuadrado: r^2 o R^2), que informa qué tan confiable el programa encuentra el cálculo. 1 está muy bien, 0,99 está bien; 0,95 no está tan bien, etc.

El principio es el mismo para otras funciones:

Por ejemplo, Tiempo en el primer eje y Número en el segundo eje para la regresión de una función exponencial $y = b \cdot ax$ con la línea clave: *ExpReg(Tiempo, Número)*
O Tiempo en el primer eje y Libras en el segundo eje para la regresión de una función de potencia $y = b \cdot x^a$ con la línea clave: *PowReg(Tiempo, Libras).*

Probabilidad y combinaciones

La estadística es cuando procesamos una gran cantidad de datos. Se puede argumentar que miramos hacia el pasado.

La probabilidad es cuando buscamos una respuesta probable a algo que sucederá en el futuro.

Las probabilidades simples se pueden calcular con precisión, por ejemplo la probabilidad de observar seis cuando tiramos un dado. Sin incertidumbre.

Las probabilidades complicadas basadas en muchos datos, cada uno de los cuales tiene su propia incertidumbre, conducirán a una probabilidad incierta. Por ejemplo, una previsión meteorológica de que mañana habrá sol a las 2 de la madrugada. En tal caso podemos calcular/estimar una probabilidad expresada por un número entre 0 y 1 o entre 0 y 100% y una incertidumbre. Por ejemplo, una probabilidad del 81% ± 5% de que mañana salga el sol a las 2 a.m. Normalmente, el público sólo será informado sobre el 81%.

El complicado cálculo de probabilidades es una amplia área de especialización para especialistas, como meteorólogos y profesionales de seguros.

Aquí nos ocuparemos de un cálculo de probabilidad sencillo y preciso, que sin embargo rápidamente se vuelve bastante complicado. Veremos algunas fórmulas de permutación y combinación que son tan difíciles de probar que en su lugar mostraremos su exactitud mediante ejemplos, y esto se hace en el capítulo: "Pruebas y cálculos raramente utilizados".

También cabe mencionar que existen muchos términos técnicos en este tema.

Usaremos nuevos números como

5! que representa 5 factorial, y que significa 5·4·3·2·1 y que, por cierto, da 120.

7! que representa 7 factorial, y que significa 7·6·5·4·3·2·1 y que, por cierto, da 5040.

Y un poco de especialidad: 0! = 1 el cual tenemos que definir para evitar que quede cero borrando todo en las fórmulas que vamos a utilizar.

Teoría

La probabilidad es un número entre 0 y 1 (o entre 0 y 100%) calculado como

$$probabilidad = \frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ de\ resultados\ posibles}$$

Entonces necesitamos conocer tanto el numerador como el denominador para poder calcular la probabilidad.
Primero encontramos el número denominador de resultados posibles que determinamos de acuerdo con los siguientes seis casos donde n es el número de elementos/objetos en el conjunto/población y r es el número considerado:

1. "Ambos y" con el término técnico <u>Regla de multiplicación</u>:

   número de posibilidades = una posibilidad multiplicada por la otra

2. "Cualquira o" con el término técnico <u>Regla de la suma</u>:

   número de posibilidades = una posibilidad más la otra

3. La fórmula para *cualquier orden, sin repetición* (Término técnico: Permutación ≈ inversión de orden)

   número de posibilidades = $P = \frac{n!}{(n-r)!}$

   Se mostrará en el capítulo "Pruebas y cálculos raramente utilizados".

4. La fórmula para *sin orden, sin repetición* (término técnico: Combinación)

   número de posibilidades = $K = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$

   se mostrará en el capítulo "Pruebas y cálculos raramente utilizados"

5. *Cualquier orden, con repetición* concuerda con el punto 1: "Ambos y", por lo tanto:

   número de posibilidades = n^r

6. La fórmula *sin orden, con repetición*

   número de *posibilidades* = $\frac{(n-1+r)!}{r!\cdot(n-1)!}$ no se mostrará

   Esta fórmula también se utiliza, y especialmente, en relación con el muestreo aleatorio, sobre el que volveremos.

Estos seis casos/fórmulas muestran cómo combinamos las posibilidades – y el término técnico es Combinación.
En los siguientes ejemplos, primero calculamos el número de resultados posibles (el denominador) y luego la probabilidad (la fracción completa):

Ejemplos

1.
¿Cuántas combinaciones hay si tiramos un dado dos veces?

El caso es *"Ambos y"*, lo que representa: 6 · 6 = 36 posibilidades

----

¿Cuál es la posibilidad de tener dos seises seguidos?

$$probabilidad\ primer\ rollo = \frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ de\ resultados\ posibles} = \frac{1}{6}$$

$$Probabilidad\ segunda\ rollo = \frac{1}{6}$$

El caso es *"Ambos y"*, que representa: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 2.78\%$

2.

¿Cuántos "ojos" hay en dos dados?

Cada dado tiene seis caras con 1, 2, 3, 4, 5, 6 "ojos" cada uno.

El caso es "cualquira o" lo que representa: 6 + 6 = 12 posibilidades

----

¿Cuál es la posibilidad de obtener un seis en dos tiradas con un dado?

$$probabilidad\ primer\ rollo = \frac{1}{6}$$

$$Probabilidad\ segunda\ rollo = \frac{1}{6}$$

El caso es "cualquira o" que representa: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 33.3\%$

3.

Se deberá elegir un capataz y un suplente y suplente en una junta de 7 miembros. El primero elegido se convierte en capataz, el siguiente en suplente y el tercero en suplente. ¿De cuántas maneras se pueden elegir las 3 personas?

Aquí el orden es crucial y el primer elegido no volverá a ser incluido en el grupo. Por tanto el caso es *cualquier orden, sin repetición.* La fórmula es:

$$P = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Donde P es el número de posibilidades, n es el número de miembros (aquí 7), y r es el número de personas seleccionadas (aquí 3).

Se insertan los valores:

$$P = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1}{4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1} = \frac{7{\cdot}6{\cdot}5}{1} = 210\ possibilities$$

¿Cuál es la probabilidad de que Liz se convierta en capataz, Peter en capataz adjunto y Ann en suplente?

Liz y Peter y Ann es una posibilidad (el resultado favorable), por lo tanto:

$$probabilidad = \frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ de\ resultados\ posibles} = \frac{1}{210} \approx 0.476\%$$

4.

Se deberá elegir un capataz y un suplente y suplente en una junta de 7 miembros. La elección mostrará quién de las 3 personas ocupa los 3 puestos, independientemente de cuál puesto. La decisión entre los 3 se pospone para más tarde. ¿Cuántas posibilidades hay para la selección de las 3 personas?

Aquí el orden no importa, y el seleccionado no volverá a ser puesto en el pool, por lo tanto: *sin orden, sin repetición*. La fórmula es:

$$K = \frac{n!}{r!{\cdot}(n-r)!}$$

Donde K es el número de posibilidades, n es el número de miembros. (aquí 7), y r es el número seleccionado (aquí 3). Se insertan los valores:

$$K = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1}{1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4} = \frac{7{\cdot}6{\cdot}5}{1{\cdot}2{\cdot}3} = 35\ posibilidades$$

¿Cuál es la posibilidad de la elección de Liz, Peter y Ann?

Liz/Peter/Ann u otros pedidos entre ellos es una posibilidad, por lo tanto:

$$probabilidad = \frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ de\ resultados\ posibles} = \frac{1}{35} \approx 2.86\%$$

5.

Un código se forma a partir de tres letras minúsculas de un alfabeto de 25 letras y tres dígitos. ¿Cuántas posibilidades hay?

El caso es *cualquier orden, con repetición* => “Ambos y” => multiplicación:

$25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 25^3 \cdot 10^3 =$ 15 625 000 possibilities

----

¿Cuál es la probabilidad de tener el código abc123?

abc123 es el único resultado favorable, por lo tanto:

$$probabilidad = \frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ de\ resultados\ posibles} = \frac{1}{15\,625\,000}$$

La probabilidad de tener *cualquiera* el código abc123 *o* el código bcd123 es:

$$probabilidad = \frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ de\ resultados\ posibles} = \frac{1+1}{15\,625\,000} = \frac{2}{15\,625\,000}$$

6.

Una escuela de conducción debe tener cuatro coches nuevos. El distribuidor tiene siete modelos que se pueden utilizar. ¿Cuántas posibilidades hay de elegir coches si hay que repetir la misma combinación?

El caso es *sin orden, con repetición*:

$$\frac{(n-1+r)!}{r!\cdot(n-1)!}=\frac{(7-1+4)!}{4!\cdot(7-1)!}=\frac{10!}{4!\cdot 6!}=210\ posibilidades$$

Tres modelos son del año pasado y el vendedor espera poder venderlos junto con uno de los coches nuevos. ¿Cuál es la probabilidad de que eso ocurra?

Nombramos los autos A1, A2, A3, B, C, D, E.

A1, A2, A3, B se puede combinar de 4 maneras.

A1, A2, A3, C se puede combinar de 4 maneras.

A1, A2, A3, . se puede combinar de 4 maneras

A1, A2, A3, se puede combinar de 4 maneras.

El caso del número de resultados favorables de los numeradores es "*Cualquiera o*" => suma. Por lo tanto:

$$probabilidad=\frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ de\ resultados\ posibles}=\frac{4+4+4+4}{210}=\frac{16}{210}\approx 7.6\%$$

Y ahora algunas combinaciones más avanzadas:

7.

Los tres estados de un país se reúnen para celebrar un torneo de fútbol. Se van a celebrar 10 partidos, distribuidos de modo que el estado más grande, A, debe celebrar 5 partidos, el segundo estado B, 3 partidos y el estado C, 2 partidos, pero ¿cuáles?
En un frasco se colocan 5 notas A, 3 notas B y 2 notas C. Un total de 10 notas.

Se sortean tres notas para los tres primeros partidos. ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean A?

El orden es irrelevante por lo que la situación es sin orden, sin repetición.

debemos calcular $$probabilidad = \frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ de\ resultados\ posibles}$$

El numerador muestra cuantas posibilidades hay de tener 3 de 5 A. =>

Numerador $$K = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = \frac{120}{6\cdot 2} = 10\ resultados\ favorables$$

Tomado de todo el grupo/población, que es el denominador:

Denominador $$K = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{6\cdot 7!} = 120\ posibilidades$$

Conjunta $$probabilidad = \frac{10}{120} = \frac{1}{12} \approx 8.33\%$$

8.

Las tres notas mostraban A, B, B y no se devuelven. Se extraen dos nuevas notas. ¿Cuál es la posibilidad de B, C?

El orden es irrelevante por lo que el caso es *sin orden, sin repetición*.

La izquierda es ahora A, A, A, A, B, C, C. es decir 7. =>

Denominador $$K = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = \frac{7!}{2!\cdot(7-2)!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 5!} = 21\ posibilitades$$

Numerador para B $$K_B = \frac{1!}{1!\cdot(1-1)!} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1$$

Numerador para C $$K_C = \frac{2!}{1!\cdot(2-1)!} = \frac{2}{1\cdot 1} = 2$$

K_B y K_C debe combinarse como ”Ambas y” => multiplicación =>

Conjunta:

$$probabilidad = \frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ de\ resultados\ posibles} = \frac{K_B\cdot K_C}{K} = \frac{1\cdot 2}{21} = \frac{2}{21} \approx 9.5\%$$

Distribución binomial, muestra aleatoria e intervalo de confianza.

Distribución binomial, introducción.

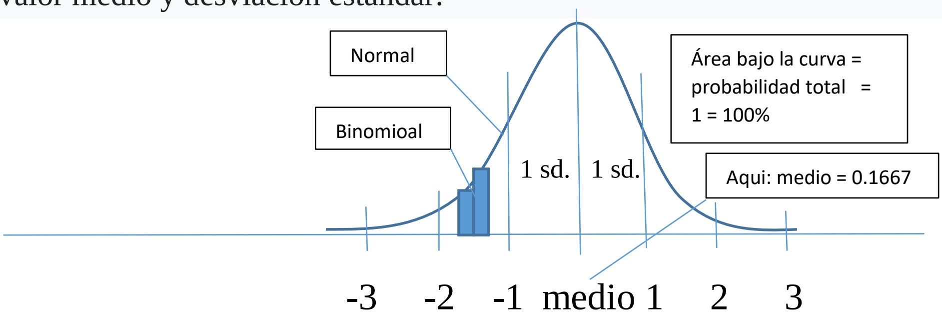
En teoría de la probabilidad, una variable aleatoria se denomina variable estocástica. El nombre proviene del griego antiguo.
Un experimento binomial con una variable aleatoria tiene tres propiedades:

1. El resultado es un éxito o un fracaso (de ahí el nombre de binomio).
2. El Experimento 1 no tiene influencia sobre el Experimento 2, el cual no tiene influencia sobre el Experimento 3, etc. – todos los experimentos son independientes.
3. Todos los ensayos tienen la misma probabilidad de éxito.

Buenos ejemplos son golpear pisos/coronas con una moneda o tirar un dado.

Tirar un dado

Al lanzar un dado hay $\frac{1}{6}$ (≈ 0,1667) de probabilidad de obtener 1, $\frac{1}{6}$ de probabilidad de obtener 2, etc., en un número infinito de tiradas.
Con un número finito de rollos podemos dibujar un diagrama con r (número) en el primer eje y P (probabilidad) en el segundo eje. Luego obtenemos una distribución binomial, que es igual a la distribución normal en Estadística con valor medio y desviación estándar:



Área: <0,1% 2,3% 13,6% 34,1% 34,1% 13,6% 2,3% <0,1%

La llamamos curva de distribución normal cuando describe la observación, por ejemplo el diámetro de una esfera.

La llamamos curva de distribución binomial, cuando describe la probabilidad del número de éxitos.

Un detalle: una curva de distribución normal es suave (continua), porque la cantidad de medición (por ejemplo, el diámetro de una esfera) puede tener cualquier valor, con una transición suave. Una curva de distribución binomial será discontinua porque el número de éxito/fracaso es un número sin una transición suave al siguiente número de éxito/fracaso. También se utilizan las expresiones técnicas de que la curva de distribución normal es continua, mientras que la curva de distribución binomial es discreta (= separada). Sin embargo, si la curva de distribución binomial tiene muchos puntos (posiblemente mostrados como barras), en la práctica será suave.

Si tiramos sólo 24 veces, no es seguro que salgamos 4 de cada (4 por seis, cuatro por cinco, etc.).

Se puede llamar a los 24 rollos una muestra aleatoria, lo que hace obvio que necesitamos una herramienta para la evaluación de la *muestra aleatoria*.

Sin embargo, primero debemos considerar más teoría y fórmulas para la distribución binomial:

La distribución binomial

Por tanto, una curva de distribución binomial es "similar" a la curva de distribución normal. Y toda el área bajo la curva muestra una probabilidad del 1 o 100%.

Sin embargo, dado que ahora usamos la curva para describir la probabilidad, usamos otros datos/información además de la estadística, por lo que necesitamos cambiar el método de cálculo para encontrar el valor medio y la desviación estándar, así como encontrar una fórmula (la función) para la curva de distribución binomial.

La función debe describir una secuencia *sin orden* de *éxito* y *fracaso*. Se deben combinar los tres tamaños "*Ambos y*" => multiplicación:

Distribución binomial (P) = sin orden · éxito · fracaso

Aquí P significa probabilidad, y no permutación como antes.

La combinación *sin orden* es $K = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$

De toda la población/grupo con el número n hay r con una probabilidad de éxito p (un número entre 0 y 1). Se deben multiplicar más éxitos, es decir, p^r

Los que no sean éxitos deberán ser fracasos con el número (1-p). Se deben multiplicar más fallas, es decir, $(1-p)^{n-r}$

Combinada la función binomial es:

$$P = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$

El valor más probable es el valor medio que se determina como

valor medio = número multiplicado por probabilidad =>

$$\mu = n \cdot p$$

La desviación estándar para el tamaño x se conoce en estadística como

$\sigma(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \mu)^2}$

que por una larga y difícil conversión se convierte en:

$\sigma(x) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ o simplemente σ ya que la variable no siempre se llama x no mostraremos la conversión

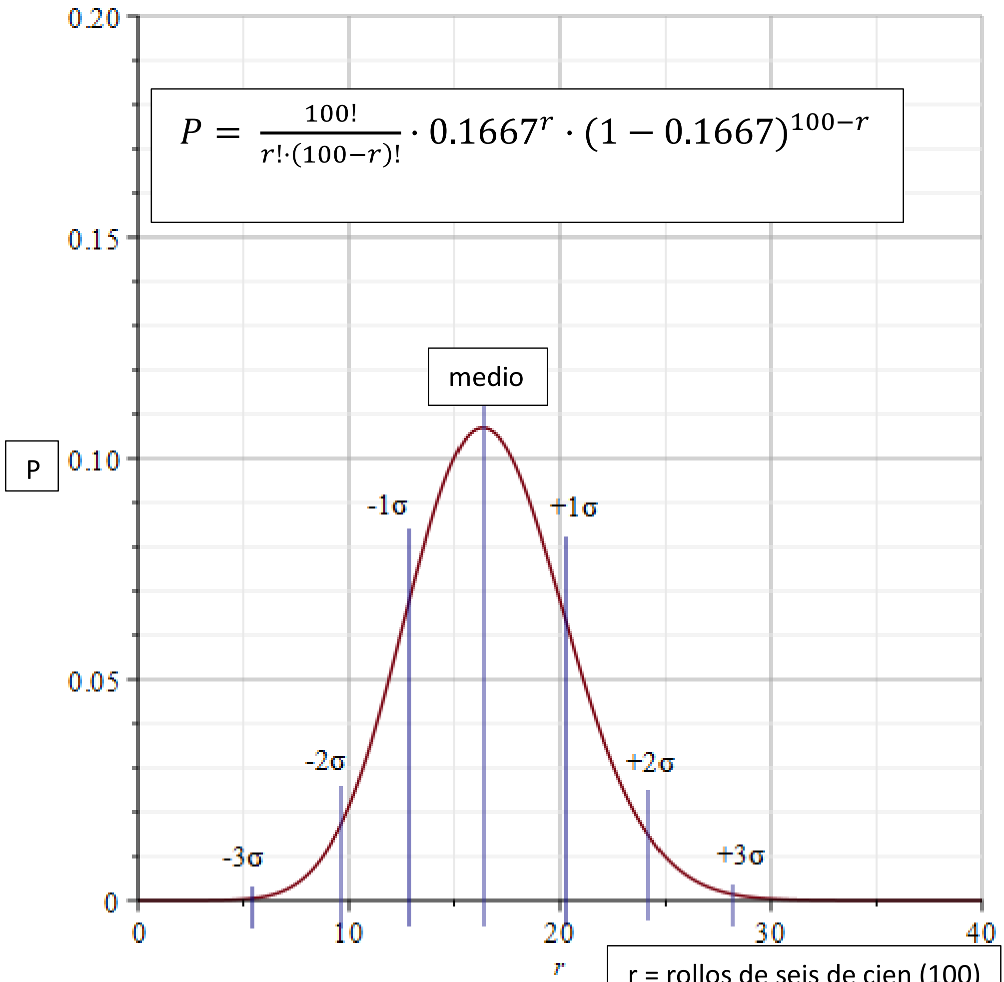
es decir, ahora con tamaños para el cálculo de probabilidad binomial.

Lo que, por cierto, da la varianza $Var = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Tirar un dado

Lanzamos un dado n = 100 veces. Cada tirada, por ejemplo con un 6, tiene una probabilidad de $p = \frac{1}{6} \approx 0{,}1667$

Entonces la distribución binomial (diagrama número-probabilidad = diagrama r-P) se ve así:



Área ≈ <0.1% 2.3% 13.6% 34.1% 34.1% 13.6% 2.3% <0.1% = 100%

el área entre la línea - 1σ y + 1σ es el 68.2 % de las mediciones.

el área entre la línea - 2σ y + 2σ es el 95.4 % de las mediciones.

el área entre la línea - 1σ y + 1σ es casi el 68,2 % de las mediciones.

El valor medio (= el número más probable de éxitos) es:

$Media = \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0.1667 = 16.67$ rollos con seis ojos

La desviación estándar es:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0.1667 \cdot (1-0.1667)} = 3.727$$

Ambos valores se pueden leer en el diagrama.

Si en cambio tiramos los dados 48 veces, esperamos tener:

$\mu \ = \ n \cdot p \ = \ 48 \cdot 0.1667 \ = \ 8$ rollos con seis ojos

pero la desviación estándar es grande:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{48 \cdot 0.1667 \cdot (1-0.1667)} = 2.58$$

Vemos que la desviación estándar es relativamente menor cuantas más tiradas hacemos. En otras palabras, cuantas más veces tiramos los dados, más seguros estamos de tener $\frac{1}{6}$ de seis.

Muestra aleatoria e intervalo de confianza para una distribución binomial

Tirar un dado es un caso sencillo, ya que sólo debemos considerar 6 posibilidades. Sabemos que siempre hay una probabilidad de $\frac{1}{6}$ de tener seis en el siguiente lanzamiento.

De lo contrario, es incierto con una gran cantidad de datos. Luego tendremos que tomar *muestras aleatorias* lo más representativas posible, seguido de una estimación/cálculo de la confianza en esta muestra aleatoria. Lo hacemos calculando *el intervalo de confianza*, que es una "incertidumbre estadística de la probabilidad":

Para la muestra aleatoria podemos calcular el valor medio y la desviación estándar, de modo que podamos trazar la curva binomial de la muestra aleatoria.

Como se mencionó, el valor medio es $\mu = n \cdot p \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{\mu}{n}$

Hemos visto la desviación estándar de todos los tamaños x:

$$\sigma(x) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Ahora lo vemos como la desviación estándar de una sola talla =>

$$\sigma\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}{n} = \sqrt{\frac{n \cdot p \cdot (1-p)}{n^2}} = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

y si elegimos el valor medio como tamaño único, tenemos

$\frac{x}{n} = \frac{\mu}{n} = p$ =>

$$\sigma(p) = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

que es la desviación estándar σ en función de la probabilidad puntual p y el número de todos los tamaños n

En una muestra aleatoria normalmente elegimos el valor medio como el tamaño en foco, que para la muestra aleatoria se llama μ* o estimación puntual p* (algunas tablas de fórmulas lo llaman p con un "sombrero")

El intervalo de confianza a menudo se elige entre diferenciales de -2 a +2 (consulte la constante), es decir, 95,4%, a menudo redondeado como 95% =>

$$Intervalo\ de\ confianza = \left[p^* - 2\sqrt{\frac{p^* \cdot (1-p^*)}{n}}\ ;\ p^* + 2\sqrt{\frac{p^* \cdot (1-p^*)}{n}} \right]$$

El intervalo de confianza aquí muestra que existe una probabilidad del 95,4% de que el valor medio real se encuentre dentro del intervalo.

También se puede elegir otro intervalo de confianza, por ejemplo 68,2% dentro de ± 1σ

$$Intervalo\ de\ confianza = \left[p^* - \sqrt{\frac{p^* \cdot (1-p^*)}{n}}\ ;\ p^* + \sqrt{\frac{p^* \cdot (1-p^*)}{n}} \right]$$

Tenga en cuenta la constante 1

Ejemplo 1

Antes de unas elecciones se pregunta a 1.023 personas si votarán "sí" o "no". 418 dicen “sí”, 501 dicen “no” y 104 dicen “no sé”. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los votantes voten "sí"?

El caso es una muestra aleatoria distribuida binomial. Y elegimos calcular el ca. Intervalo de confianza del 95%:

$$\left[p^* - 2\sqrt{\frac{p^* \cdot (1-p^*)}{n}}\ ;\ p^* + 2\sqrt{\frac{p^* \cdot (1-p^*)}{n}} \right]$$

Aquí está n = 1023 y la estimación puntual $p* = \frac{418}{1023} \approx 0.409$ =>

$$\left[0.409 - 2\sqrt{\frac{0.409 \cdot (1-0.409)}{1023}}\ ;\ 0.409 + 2\sqrt{\frac{0.409 \cdot (1-0.409)}{1023}} \right] = [0.378\,;0.44]$$

Por tanto, existe una probabilidad del 95% de que entre el 37,8% y el 44% de todos los electores voten “sí”. Sin embargo, tenga en cuenta que el grupo "no sé" es grande, por lo que la resolución final puede cambiar significativamente.

Ejemplo 2

Una cervecería probará si a la gente le gusta un refresco nuevo. Piden a un instituto de análisis una investigación con un nivel de confianza alto.

El instituto sugiere preguntar ca. 500 personas y luego calcular el 99% de confianza. La cervecería lo aprueba.

En la práctica se pregunta a 494 personas si les gusta el refresco, ¿"sí" o "no"? 77 dicen "sí".

El caso es una muestra aleatoria distribuida binomial. Y calculamos el ca. Intervalo de confianza del 99%:

$$\left[p^* - 3\sqrt{\frac{p^* \cdot (1-p^*)}{n}} \;\; ; \;\; p^* + 3\sqrt{\frac{p^* \cdot (1-p^*)}{n}} \right]$$

Aquí está n = 494 y la estimación puntual $p^* = \frac{77}{494} \approx 0.156$ =>

$$\left[0.156 - 3\sqrt{\frac{0.156 \cdot (1-0.156)}{494}} \;\; ; \;\; 0.156 + 3\sqrt{\frac{0.156 \cdot (1-0.156)}{494}} \right] = [0.107\,; 0.205]$$

Por tanto, existe una probabilidad del 99% de que a entre el 10,7% y el 20,5% de todas las personas les guste el refresco.

Una investigación adicional podría ser preguntar cuántos comprarían el refresco y con qué frecuencia.

Las predicciones en forma de cálculos de probabilidad e intervalos de confianza suelen ser correctas, pero no siempre. Un punto especialmente delicado es tomar la muestra representativa "correcta".

Notaciones y términos técnicos

Como se mencionó anteriormente, existen muchos términos técnicos y varias notaciones dentro del cálculo de probabilidad. Probablemente se deba a diferentes enfoques en distintas profesiones. Éstos son los más comunes:

n generalmente representa el número de toda la población/grupo/cantidad.

r generalmente representa un número elegido en una población/grupo/cantidad.

P normalmente significa Permutación, pero también puede representar la función de Probabilidad, o simplemente probabilidad.

p suele representar el parámetro de probabilidad, que es un número entre 0 y 1, donde p es la probabilidad de éxito.

K generalmente significa combinación y tiene la fórmula $\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$

K con la misma fórmula $\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$ también se utiliza en fórmulas para la distribución binomial. Entonces podemos escribir K(n, r), es decir, K usado en una distribución binomial con el número total n y el número elegido r. O podemos escribir $\binom{n}{r}$ *que aquí no es un vector*.

es decir $\quad$ $K(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$

x generalmente representa una variable.

X suele representar una variable estocástica (= variable binomial).

$\overline{x} = x_{medio}$ generalmente representa el valor medio de x
μ normalmente representa el valor medio de algo, que luego debe explicarse. A menudo, es lo mismo que $\overline{x}$ o x_{medio}

Si algo tiene distribución binomial, puede escribirse bin(n, p) o simplemente b(n, p), lo que significa: distribución binomial con el número n y el parámetro de probabilidad p, *y aquí no se trata de coordenadas de un punto*.

σ suele representar la desviación estándar.

* o ^ (estrella o sombrero) se utilizan a menudo para tamaños en una muestra aleatoria, por ejemplo μ* y σ* y p*

p* se denomina parámetro de probabilidad de la muestra aleatoria, o estimador central de p.

Números y resumen sobre la teoría de conjuntos.

La agrupación de números siguió el desarrollo histórico de los cuatro tipos de operaciones aritméticas:

Los *números naturales* son números enteros positivos, los que contamos: 1, 2, 3, 4,…

Los *números enteros* son negativos, cero y positivos: …-2, -1, 0, 1, 2, 3,…

Los *números racionales* son fracciones de números enteros (excepto 0 en el denominador). Por ejemplo $\frac{-4}{3}$ y $\frac{63}{17}$

Los *números irracionales* no se pueden escribir como fracciones de números enteros sino como números decimales que nunca terminan. Por ejemplo π = 3,14….

Hoy estos cuatro grupos se reúnen como los ***números reales, R.***

A partir de aquí hay una clara frontera hacia los números que no son reales, los números que debemos imaginar, los números imaginarios. Los números imaginarios han sido descritos en el capítulo: “Números imaginarios, brevemente”. Aquí repetimos:

$\sqrt{-64} = \sqrt{(-1) \cdot 64} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{64}$ eso está bastante bien

$\sqrt{(-1)}$ nombramos I, eso también está permitido, y luego tenemos

$\mathrm{I} \cdot \sqrt{64} = \mathrm{I} \cdot 8$

Entonces $\sqrt{-64} = \mathrm{I} \cdot 8$

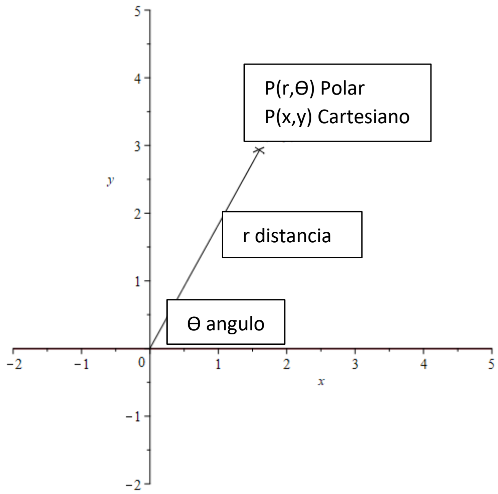
lo que nos permite continuar como si nada hubiera pasado; Sólo que ahora estamos en el mundo de los números imaginarios. Sin embargo, la regla de cálculo: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a \cdot a}$ no se aplica a números imaginarios.
La combinación de números reales y números imaginarios se llama *números complejos*.

Números complejos

La combinación de números reales y números imaginarios se llama *números complejos*.

Una breve introduccion:

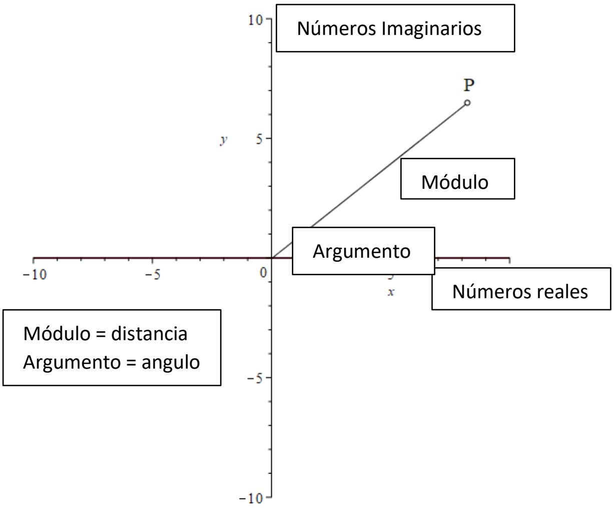
Anteriormente vimos que las coordenadas se pueden mostrar de la forma habitual (coordenadas cartesianas) o como coordenadas polares, y repetimos el diagrama mostrado anteriormente:



Además, vimos que las coordenadas de un punto se pueden representar como un vector de posición.

Ahora consideraremos las coordenadas de un punto combinadas con números complejos. Parece lo mismo.

Podemos usar los números complejos como herramienta matemática y mostrarlos en un sistema de coordenadas con los números reales en el primer eje y los números imaginarios en el segundo eje:



La distancia desde Origo ahora se llama *módulo* y el ángulo desde el primer eje se llama *argumento*. Por tanto la posición de P es

módulo y argumento = |*OP*| *y arg(OP)*

La magnitud que queremos describir aquí (que se muestra como el segmento de línea OP) consta entonces de una parte real y una parte imaginaria, y al igual que para las coordenadas polares, describimos la longitud y el ángulo, sólo que ahora se llaman módulo y argumento, para mostrar que estamos considerando números complejos.

En general, ahora tenemos varias formas de mostrar coordenadas. De antes tenemos:

- Coordenadas cartesianas ordinarias P(x,y)
- Coordinadas posición vector **OP** = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |OP|\cdot\cos\Theta \\ |OP|\cdot\sin\Theta \end{pmatrix}$

  o **OP** = |OP|·(cos Θ·**i** + sin Θ·**j**)

  o breve **OP** = x**i** + y**j**

  (aqui distrae un poco que el vector base en la dirección x se llame **i**, mientras que el número base imaginario en el eje y se llame I (algunos usan i)).

- Coordenadas polares P(r,Θ) distancia y angelo

Y las nuevas coordenadas polares complejas:

- (mód, arg) o mód∠arg distancia y angulo

Y un ejemplo:
(mód, arg) = $(5, \frac{\pi}{4})$ o solo $5\angle\frac{\pi}{4}$ = $5\angle 45°$
Este ultimo es probablemente el más común.

Si el ángulo es de 90° = $\frac{\pi}{2}$ tenemos un número puramente imaginario.

Es la herramienta más común y fácil de usar para calcular números complejos (también llamada forma rectangular). A continuación se muestran algunos ejemplos que utilizan las cuatro aritméticas básicas:

Cálculo con números complejos en forma rectangular (como vectores)

Ejemplo 1

Tenemos dos tamaños complejos escritos como

número complejo = parte real + parte imaginaria

aquí: a = 3 + 4I b = -2 + 5I

Suma

a + b = (3 + 4I) + (-2 + 5I) ⇔

a + b = 1 + 9·I Por separado real y por separado imaginaria

Diferencia

$a - b = (3 + 4I) - (-2 + 5I) \quad \Leftrightarrow$

$a - b = 5 - I$

Producto

$a \cdot b = (3 + 4I) \cdot (-2 + 5I) \quad \Leftrightarrow$

$a \cdot b = -6 + 15I - 8I + 20I^2 \quad \Leftrightarrow$

$a \cdot b = 20I^2 + 7I - 6 \quad => \quad$ y desde $I = \sqrt{(-1)}$

$a \cdot b = -20 + 7I - 6 \quad \Leftrightarrow$

$a \cdot b = -26 + 7 \cdot I$

División

$$\frac{a}{b} = \frac{3 + 4I}{-2 + 5I} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b} = \frac{(3 + 4I)(-2-5I)}{(-2 + 5I)(-2-5I)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-6-15I-8I-20I^2}{4+10I-10I-25I^2} \quad \Leftrightarrow$$

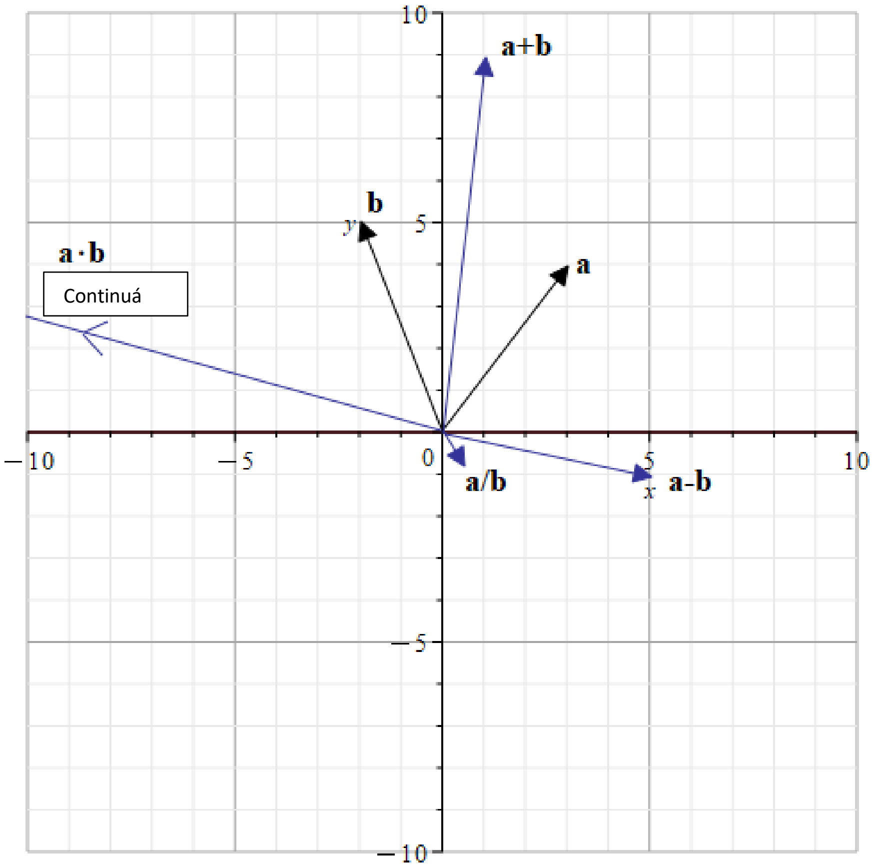
$$\frac{a}{b} = \frac{-6-23I+20}{4+25} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b} = \frac{14-23I}{29} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b} \approx 0{,}483 - 0{,}793 \cdot I$$

En otras palabras, reglas de cálculo completamente ordinarias.

Y se muestra en un diagrama:



2.

Desde la forma rectangular (forma vectorial) podemos encontrar el módulo (longitud) y el argumento (ángulo con el eje +x) usando un cálculo ordinario bien conocido:

a = 3 + 4I módulo: $(3^2 + 4^2)^{½} = 5$ (Pitágoras)

y argumento: $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53{,}1°$

es decir (mód a, arg a) = (5, 53.1°)

y

$b \ = \ -2 + 5I$ tiene módulo: $((-2)^2 + 5^2)^{½} \approx 5.39$

y argumento: $90° + \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \approx 111.8°$

es decir (mód b, arg b) = (5.39, 111.8°)

3.

También podemos encontrar módulo y argumento

$a \cdot b \ = \ -26 + 7 \cdot I$ => módulo = $((-26)^2 + 7^2)^{½} \approx 26.9$

argumento = $90° + \tan^{-1}\left(\frac{26}{7}\right) \approx 164.9°$

es decir (mód, arg) = (26.9, 164.9°)

$\frac{a}{b} \approx 0{,}48 - 0{,}79 \cdot I$ => módulo = $(0.48^2 + (-0.79)^2)^{½} \approx 0.928$

argumento = $\tan^{-1}\left(\frac{-0.79}{0.48}\right) \approx -58.7°$

es decir (mód, arg) = (0.928, -58.7°)

Vemos que el módulo y el argumento calculados cumplen con el diagrama.

Cálculo con números complejos en forma polar

La suma y la diferencia de dos números complejos son como en la forma rectangular, mientras que el producto y la división se pueden realizar en la forma polar, que es más rápida:

Ahora presentamos algunas reglas de cálculo que son fáciles de usar pero difíciles de demostrar. La prueba se muestra en el capítulo "Pruebas y cálculos raramente utilizados":

Cuando multiplicamos dos números complejos en forma polar, tenemos:

(mód a , arg Θ) · (mód b , arg φ) = (|a| ∠ Θ) · (|b| ∠ φ) = |a·b| ∠ (Θ+φ)

entonces multiplicamos el módulo (las magnitudes) y sumamos los argumentos (los ángulos).

Cuando dividimos dos números complejos en forma polar, tenemos:

$$\frac{(\text{mód a},\ \arg\Theta)}{(\text{mód b},\ \arg\varphi)} = \frac{|a|\angle\Theta}{|b|\angle\varphi} = \left|\frac{a}{b}\right|\angle(\Theta-\varphi)$$

entonces dividimos el módulo (las magnitudes) y restamos los argumentos (los ángulos).

Ejemplo 1

Dos números complejos son

(mód, arg) = $(5, \frac{\pi}{4})$ y (mód, arg) = $(3, \frac{\pi}{2})$

Queremos que el producto (los dos números complejos multiplicados) se escriba polar:

módulo = 5·3 = 15 argumento = $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

Repuesta: (mód, arg) = $(15, \frac{3\pi}{4})$ o más corta $15\angle\frac{3\pi}{4}$

Independientemente de la forma en que lo escribamos (la notación), multiplicamos el módulo y sumamos los argumentos.

2.

Y entonces nosotras queremos $(5, \frac{\pi}{4})$ dividido por $(3, \frac{\pi}{2})$ Escrita polar: módulo = $\frac{5}{3}$ argumento = $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} =$ - $\frac{\pi}{4}$

Repuesta: (mód, arg) = $(\frac{5}{3} , - \frac{\pi}{4})$ o más corta $\frac{5}{3} \angle - \frac{\pi}{4}$

Independientemente de la forma en que lo escribamos (la notación), dividimos el módulo y restamos los argumentos.

Esta forma de calcular es similar a lo que hacemos con las funciones exponenciales. Por lo tanto, también podemos usar la función exponencial cuando multiplicamos y dividimos:

Cálculo con números complejos en forma exponencial

La suma y la diferencia de dos números complejos son como en la forma rectangular, mientras que el producto y la división se pueden realizar en la *forma exponencial* que se utiliza en algunas industrias:

Para la forma polar, acabamos de ver, que un producto se encuentra multiplicando el módulo (las magnitudes) y sumando los argumentos (los ángulos), mientras que en la división dividimos el módulo y restamos los argumentos. Esa forma de calcular encaja bien con la función exponencial:

$f(x) = b \cdot a^{kx}$ que aquí se convierte $z = |z| \cdot e^{I\Theta}$

(Muchas tablas usan z como número complejo, especialmente en forma exponencial).

z es ahora nuestro número complejo, que consta del módulo |z| (la magnitud) y el argumento Θ (el ángulo), que se inserta en el número exponencial eIΘ (con I para Imaginario).

Los ejemplos muestran cómo podemos usar esto:

Ejemplo 1

Dos números complejos (los mismos que antes) se dan como

(mód a, arg a) = $(5, \frac{\pi}{4})$ y (mód b, arg b) = $(3, \frac{\pi}{2})$

Queremos que el producto (los dos números complejos multiplicados) se calcule usando la fórmula exponencial:

z = |z| $\cdot e^{I\Theta}$

Aqui a = $5 \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{4}}$ y b = $3 \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{2}}$ =>

a · b = $(5 \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{4}}) \cdot (3 \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{2}}) = 15 \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{4} + I \cdot \frac{\pi}{2}} = 15 \cdot e^{I \cdot \frac{3\pi}{4}}$

Vemos que el módulo es 15 y el argumento es $\frac{3\pi}{4}$

en breve: (mód, arg) = $(15, \frac{3\pi}{4})$ o muy breve $15\angle \frac{3\pi}{4}$

Misma respuesta que para la forma polar. Por supuesto.

2.

Dos números complejos se dan como

(mód a, arg a) = $(5, \frac{\pi}{4})$ y (mód b, arg b) = $(3, \frac{\pi}{2})$

Queremos dividir según la fórmula exponencial:

$z = |z| \cdot e^{I\Theta}$

Aqui $\quad a = 5 \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{4}} \quad$ y $\quad b = 3 \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{2}} \quad$ =>

$$\frac{a}{b} = \frac{(5 \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{4}})}{(3 \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{2}})} = \frac{5}{3} \cdot e^{I \cdot \frac{\pi}{4} - I \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{5}{3} \cdot e^{I \cdot (-\frac{\pi}{4})}$$

Vemos que el módulo es $\frac{5}{3}$ y el argumento es $-\frac{\pi}{4}$

en breve: (mód, arg) = $(\frac{5}{3}, -\frac{\pi}{4})$ o muy breve $\frac{5}{3} \angle -\frac{\pi}{4}$

Misma respuesta que para la forma polar. Por supuesto.

Resumen

Los números complejos no son comunes, pero pueden usarse como herramienta matemática dentro de la electrónica, descripción avanzada del flujo de líquidos, etc.

La forma rectangular se puede utilizar en las cuatro operaciones aritméticas básicas.

La forma polar es rápida al multiplicar o dividir.

La forma exponencial se utiliza en algunas industrias para la multiplicación y división.

Ejemplo

Terminaremos continuando con un ejemplo anterior y haremos un estudio de los tres métodos:

<u>*Dos números complejos en forma rectangular:*</u>

a = 3 + 4I y b = -2 + 5I

Suma $\quad a + b = (3 + 4I) + (-2 + 5I) = 1 + 9 \cdot I$

Diferencia $\quad a - b = (3 + 4I) - (-2 + 5I) = 5 - I$

Producto $\quad a \cdot b = (3 + 4I) \cdot (-2 + 5I) = -26 + 7 \cdot I$

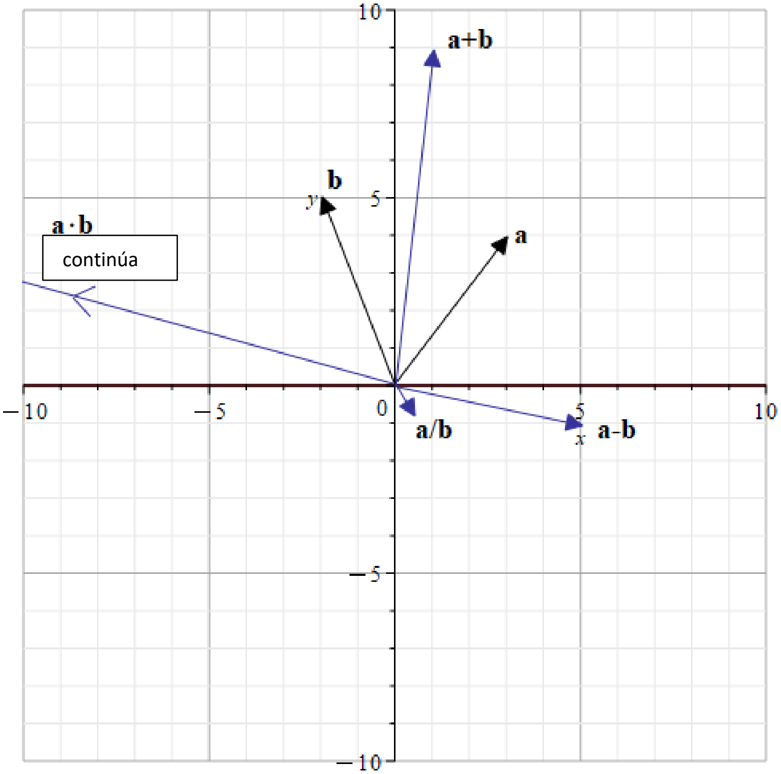
División $\quad \frac{a}{b} = \frac{3 + 4I}{-2 + 5I} \approx 0{,}483 - 0{,}793 \cdot I$

$|a| = (3^2 + 4^2)^{½} = 5 \qquad \tan^{-1}(\frac{4}{3}) \approx 53{,}1°$

$|b| = ((-2)^2 + 5^2)^{½} \approx 5.39 \qquad 90° + \tan^{-1}(\frac{2}{5}) \approx 111{,}8°$

Ambos argumentos (ángulos) son relativos a la dirección positiva del primer eje.

Los números complejos a y b se muestran como vectores en el diagrama, que mostramos nuevamente:



Dos números complejos en forma polar

El cálculo del módulo y el argumento para la forma rectangular ahora se utilizan en la forma polar:

a $\approx$ 5 $\angle$53.1° y b $\approx$ 5.39 $\angle$111.8°

No podemos sumar ni restar en forma polar, pero sí multiplicar y dividir:

$a \cdot b \approx 5 \cdot 5.39 \angle(53.1° + 111.8°) \approx 26.9 \angle 164.9°$

$\frac{a}{b} \approx \frac{5}{5.39} \angle(53.1° - 111.8°) \approx 0.929 \angle{-58.7°}$

-58.7° también se puede escribir +301.3°

Se ve que ambos cumplen con los cálculos anteriores así como con la cifra.

Dos números complejos en forma exponencial

Los cálculos de módulo y argumento para la forma rectangular ahora se utilizan en forma exponencial:

a $\approx$ 5 $\angle$53.1° y b $\approx$ 5.39 $\angle$111.8°

yet, in the exponential form it is common to use radians:

a $\approx$ 5 $\angle$0.927 y b $\approx$ 5.39 $\angle$1.95

No podemos sumar ni restar en forma exponencial, pero podemos multiplicar y dividir:

$a \cdot b \approx (5 \cdot e^{I\cdot 0.927}) \cdot (5.39 \cdot e^{I\cdot 1.95}) \approx 26.95 \cdot e^{I\cdot 0.927 + I\cdot 1.95}$

$\Leftrightarrow \quad a \cdot b \approx 26.95 \cdot e^{I\cdot 2.88}$

Vemos que el módulo es 26.95 y el argumento es 2.88

Repuesta: (mód, arg) = (26.95, 2.88) o corta $26.95 \angle 2.88$

$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} \approx \frac{5 \cdot e^{I \cdot 0.927}}{5.39 \cdot e^{I \cdot 1.95}} \approx 0.929 \cdot e^{I \cdot 0.927 - I \cdot 1.95} \approx 0.928 \cdot e^{I \cdot (-1.02)}$

Vemos que el módulo es 0.928 y el argumento es -1.02

Repuesta: (mód, arg) = (0.929, -1.02) o corta 26.95∠ - 1.02

-1.02 rad. también se puede escribir +5.26 rad.

Breve sobre la teoría de conjuntos

La teoría de conjuntos sólo se mencionará brevemente. En parte porque es una parte de las matemáticas adquirida anteriormente y en parte porque la mayoría de las tablas presentan los signos de la teoría de conjuntos con esquemas explicativos.

Aquí destacamos:

La cantidad vacía (el conjunto vacío, nada) se escribe Ø

El conjunto de soluciones se escribe {-,-,-,…} o se utiliza una letra que es diferente en varios países.

ϵ significa "pertenece a" o "es un elemento del conjunto".

∧ significa y.

∨ significa o.

Ejemplos

Si en un problema se nos informa que la solución debe pertenecer a los números reales, se puede escribir como $x \epsilon R$

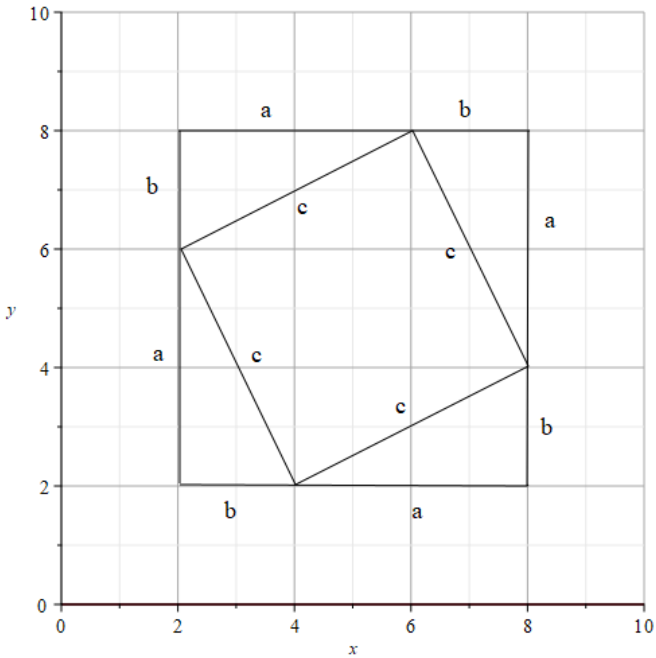
Si en una solución llegamos a: *no hay solución* también podemos escribir *la solución es la cantidad vacía*, Ø

Si, en un problema, resolvemos para obtener un dominio para la función f en el intervalo]-50; 0] podemos escribir: *El dominio de f es]-50; 0]* o breve *Dm(f) =]-50; 0]*

Si queremos mostrar que x pertenece al intervalo]-50; 0] , podemos escribir $x \epsilon\ ]-50; 0]$

Pruebas y cálculos raramente utilizados.

Prueba del teorema de Pitágoras



En el diagrama se muestran dos cuadrados.

El grande tiene el área $(a + b)^2$

El pequeño tiene el área c^2

El área del cuadrado grande es igual al área del cuadrado pequeño más las áreas de los cuatro triángulos:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \qquad \Leftrightarrow$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab \qquad \Leftrightarrow$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Por tanto, hemos demostrado el teorema matemático probablemente más común.

Prueba de factorización de un polinomio de segundo grado

$ax^2 + bx + c = a(x - raíz_1)(x - raíz_2)$

Lo demostramos calculando desde el lado derecho (la resolución) hacia el lado izquierdo (el punto de partida), sabiendo que:

$$raíz_1 = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a} \quad y \quad raíz_2 = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$$

que se inserta a la derecha:

$a\left(x - \frac{-b+\sqrt{d}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}\right)$	=	signos dispuestos
$a\left(x + \frac{b-\sqrt{d}}{2a}\right)\left(x + \frac{b+\sqrt{d}}{2a}\right)$	=	multiplicación
$a\left(x^2 + x\frac{b+\sqrt{d}}{2a} + x\frac{b-\sqrt{d}}{2a} + \frac{b^2-d}{4a^2}\right)$	=	común denominador
$a\left(\frac{4a^2x^2+2axb+2ax\sqrt{d}+2axb-2ax\sqrt{d}+b^2-d}{4a^2}\right)$	=	
$a\left(\frac{4a^2x^2+4axb+b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}\right)$	=	acortamiento
$a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right)$	=	multiplicación
$ax^2 + bx + c$		cual es el lado izquierdo

De ahí se demuestra que:

$$ax^2 + bx + c = a(x - raíz_1)(x - raíz_2)$$

También hay una prueba de factorización de polinomios superiores, pero nos detenemos aquí.

División de polinomios

Podemos dividir un polinomio por otro polinomio usando una técnica similar a la división ordinaria, pero más complicada. La técnica se ve en este ejemplo:

Ejemplo 1

$\frac{x^4-2x^3-3x^2+12x-18}{x^2-6}$ calcula de esta manera:

$$x^2-6 \;\big|\; x^4-2x^3-3x^2+12x-18 \;\big|\;\underline{\qquad\qquad}$$

Primero nos centramos en x4 dividido por x^2. Esto da x^2 que está escrito a la derecha. Luego multiplicamos x^2 por (x^2 - 6). Eso da $x^4 – 6x^2$ que está escrito en la siguiente línea:

$$\begin{array}{l|l|l}
x^2-6 & x^4-2x^3-3x^2+12x-18 & x^2 \\
 & x^4 \qquad\qquad -6x^2 &
\end{array}$$

Luego decimos superior menos inferior y dividimos $-2x^3$ por x^2. Esto da -2x que está escrito en la resolución de la derecha. Luego multiplicamos -2x por (x^2 – 6) y escribimos la respuesta en la siguiente línea, seguida de superior menos inferior:

$$\begin{array}{l|l|l}
x^2-6 & x^4-2x^3-3x^2+12x-18 & x^2-2x \\
 & \underline{x^4 \qquad\qquad -6x^2} & \\
 & \qquad -2x^3+3x^2+12x-18 & \\
 & \qquad \underline{-2x^3 \qquad\quad +12x} & \\
 & \qquad\qquad\qquad 3x^2 \qquad -18 &
\end{array}$$

Dividimos $3x^2$ entre x^2. Esto da 3 que está escrito en la resolución de la derecha. Luego multiplicamos 3 por $(x^2 – 6)$ y escribimos la respuesta en la siguiente línea:

$$\begin{array}{l|l|l}
x^2 - 6 & x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 18 & x^2 - 2x + 3 \\
 & x^4 \quad\quad - 6x^2 & \\
\hline
 & \quad -2x^3 + 3x^2 + 12x - 18 & \\
 & \quad -2x^3 \quad\quad + 12x & \\
\hline
 & \quad\quad 3x^2 \quad\quad - 18 & \\
 & \quad\quad 3x^2 \quad\quad - 18 & \\
\hline
 & \quad\quad 0 \quad\quad\quad 0 & \\
\end{array}$$

Superior menos inferior da 0 y terminamos. Sumó.

La resolución es $x^2 - 2x + 3$

Ejemplo 2

Misma técnica si no cuadra. Luego obtenemos un resto:

$\frac{x^4-2x^3-3x^2+12x-17}{x^2-6}$ que calcula de manera similar:

$$\begin{array}{l|l|l}
x^2 - 6 & x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 17 & x^2 - 2x + 3 \\
 & x^4 \quad\quad - 6x^2 & \\
\hline
 & \quad -2x^3 + 3x^2 + 12x - 17 & \\
 & \quad -2x^3 \quad\quad + 12x & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 3x^2 & -17 \\ \underline{3x^2} & \underline{-18} \\ & \quad 1 \end{array}$$

1 es el resto que también debe dividirse por $(x^2 - 2x)$

resolución combinada $x^2 - 2x + 3 + \frac{1}{x^2-6}$

Rara vez necesitamos la división de polinomios y, si la necesitamos, a menudo usaremos CAS. Sin embargo, no todos los CAS son capaces, especialmente si no cuadran, entonces debemos hacerlo manualmente.

Mostrando las fórmulas de permutación y combinación

Para Permutación usamos el ejemplo 3 del capítulo sobre Probabilidad:

3.

Se deberá elegir un capataz y un suplente y suplente en una junta de 7 miembros. El primero elegido se convierte en capataz, el siguiente en suplente y el tercero en suplente. ¿De cuántas maneras se pueden elegir las 3 personas?

Como el elegido no es devuelto a la piscina, el caso es *cualquier orden, sin repetición.*

Hay 7 posibilidades de seleccionar el primero, 6 posibilidades de seleccionar el siguiente y 5 posibilidades de seleccionar el tercero y último.

El caso es *"Ambos y"*, es decir, multiplicación: $7·6·5 = 210$ posibilidades. Como la selección no es aleatoria, todas las posibilidades serán diferentes y hay 210 posibilidades.

Ahora queremos una fórmula que incluya a los 3 seleccionados así como a los 7 miembros del grupo/población, ya que esta es nuestra información introductoria.

Elegimos multiplicar el número de posibilidades $7·6·5$ por $4·3·2·1$ lo cual está permitido si también dividimos por $4·3·2·1$. Eso es:

$\frac{7·6·5·4·3·2·1}{4·3·2·1} = \frac{7!}{4!} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{n!}{(n-r)!} = P$ aquí se muestra la fórmula

Por lo tanto, tenemos el número en el grupo/población (aquí el número de miembros 7) al que llamamos n. Y tenemos el número seleccionado (aquí 3) al que llamamos r.

Para Combinación usamos el ejemplo 4 del capítulo sobre Probabilidad:

4.

Se deberá elegir un capataz y un suplente y suplente en una junta de 7 miembros. La elección mostrará quién de las 3 personas ocupa los 3 puestos, independientemente de cuál puesto. La decisión entre los 3 se pospone para más tarde. ¿Cuántas posibilidades hay para la selección de las 3 personas?

Aquí el orden no importa, y el seleccionado no se vuelve a poner en el pool. Así, el caso no es un orden, sin repetición.

Hay 7 posibilidades de seleccionar el primero, 6 posibilidades de seleccionar el siguiente y 5 posibilidades de seleccionar el tercero y último.

El caso es *"Ambos y"*, es decir, multiplicación: $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ posibilidades.

Como la selección es aleatoria, algunas posibilidades serán similares. ¿Cuanto es eso? Nombramos a las personas:

Ana, Ben, Clara, Dan, Ellie, Fred

Entonces

Ana, Ben, Clara = Ben, Clara, Ana = Clara, Ben, Ana

es decir, tres selecciones iguales.

Ben, Clara, Dan también darán tres iguales.
Clara, Dan, Ellie también darán tres iguales.
Dan, Ellie, Fred también darán tres iguales.
Ellie, Fred, Ann también darán tres iguales.
Fred, Ann, Ben también darán tres iguales.

Entonces, 18 formas son en realidad sólo 6 posibilidades. Llamémoslos 6 “paquetes”.
O dicho de otra manera: las 3 personas pueden intercambiar de $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ formas, lo que da como resultado:

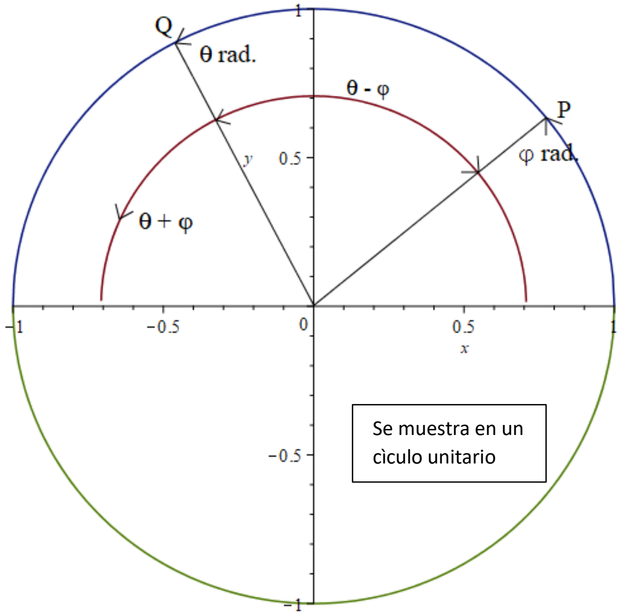
$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ *posibilidades reales*

Ahora prolongamos esta fracción en 4·3·2·1 en numerador y denominador y agregamos el tamaño de la población (aquí 7) que llamamos n – y también agregamos el número de "paquetes" (aquí 6 = 3 !) que llamamos r

$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = K$ aquí se muestra la fórmula.

Prueba de producto y división de números complejos en forma polar y exponencial

Primero, necesitamos derivar algunas fórmulas para la conversión de expresiones que incluyen sinus y cosinus. Hay muchos de ellos. Aquí usaremos *las cuatro fórmulas de suma*. Llamamos a los ángulos Θ y φ. La prueba es válida para ángulos medidos tanto en grados como en radianes. Aquí usamos radianes:



El punto P tiene el ángulo φ con la parte positiva del primer eje.

El punto Q forma el ángulo Θ con la parte positiva del segundo eje.

El ángulo Θ-φ está entre los dos catetos del ángulo.

El ángulo Θ+φ va desde la dirección +x hasta la flecha que se muestra.

Las cuatro fórmulas de suma son:

1. $\cos(\Theta+\varphi) = \cos\Theta\cdot\cos\varphi - \sin\Theta\cdot\sin\varphi$
2. $\cos(\Theta-\varphi) = \cos\Theta\cdot\cos\varphi + \sin\Theta\cdot\sin\varphi$
3. $\sin(\Theta+\varphi) = \sin\Theta\cdot\cos\varphi + \sin\varphi\cdot\cos\Theta$
4. $\sin(\Theta-\varphi) = \sin\Theta\cdot\cos\varphi - \sin\varphi\cdot\cos\Theta$

2. se demuestra mediante una de las fórmulas para un ángulo entre dos vectores:

$\cos v = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}$ => aqui

$$\cos(\Theta-\varphi) = \frac{\mathbf{OQ}\cdot\mathbf{OP}}{|\mathbf{OQ}|\ |\mathbf{OP}|} = \frac{\begin{pmatrix}\cos\Theta\\ \sin\Theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}}{1\cdot 1} = \cos\Theta\cdot\cos\varphi + \sin\Theta\cdot\sin\varphi$$

1. se demuestra reordenando el número *2*

$$\cos(\Theta+\varphi) = \cos(\Theta-(-\varphi)) = \frac{\begin{pmatrix}\cos(\Theta)\\ \sin(\Theta)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(-\varphi)\\ \sin(-\varphi)\end{pmatrix}}{1\cdot 1} = \cos\Theta\cdot\cos(-\varphi) + \sin\Theta\cdot\sin(-\varphi)$$

y desde $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ y $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ (ver el círculo unitario), tenemos

$$\cos(\Theta+\varphi) = \cos\Theta\cdot\cos\varphi - \sin\Theta\cdot\sin\varphi$$

4. se demuestra con la otra fórmula para un ángulo entre dos vectores:

$\sin v = \dfrac{\det(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$ => aqui

$$\sin(\Theta-\varphi) = \frac{\det(\mathbf{OP},\mathbf{OQ})}{|\mathbf{OP}|\cdot|\mathbf{OQ}|} = \frac{\begin{pmatrix}\cos\varphi & \cos\Theta\\ \sin\varphi & \sin\Theta\end{pmatrix}}{1\cdot 1} = \cos\varphi\cdot\sin\Theta - \sin\varphi\cdot\cos\Theta$$

3. se demuestra reordenando el número *4*

$$\sin(\Theta+\varphi) = \sin(\Theta-(-\varphi)) = \frac{\det(\mathbf{OP},\mathbf{OQ})}{|\mathbf{OP}|\cdot|\mathbf{OQ}|} = \frac{\begin{pmatrix}\cos(-\varphi) & \cos\Theta\\ \sin(-\varphi) & \sin\Theta\end{pmatrix}}{1\cdot 1} =$$

$$\cos(-\varphi)\cdot\sin\Theta - \sin(-\varphi)\cdot\cos\Theta$$

y desde $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ and $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ (ver el círculo unitario), tenemos

$$\sin(\Theta+\varphi) = \cos\varphi\cdot\sin\Theta + \sin\varphi\cdot\cos\Theta$$

El siguiente punto es sobre la notación.

Nuestro número complejo z puede escribirse como un vector

$z = z_1 + I \cdot z_2$ o $z = |z| \cdot (\cos \Theta + I \cdot \sin \Theta)$

(Ambas ecuaciones dicen que nuestro número complejo tiene una parte horizontal + una vertical, que es: una parte real + una parte imaginaria)

A continuación llegaremos al formulario $z = |z| \cdot (\cos \Theta + I \cdot \sin \Theta)$

que se escribirá en forma polar.

Ahora estamos listos para el siguiente paso en la prueba de producto y división de números complejos en forma polar:

Producto: $(\text{mód.}a , \text{arg.}\Theta) \cdot (\text{mód.}b , \text{arg.}\varphi) = |a \cdot b| \angle(\Theta+\varphi)$

Prueba: $(\text{mod.}a , \text{arg.}\Theta) \cdot (\text{mod.}b , \text{arg.}\varphi) = a(\cos \Theta + I \cdot \sin \Theta) \cdot b(\cos \varphi + I \cdot \sin \varphi =$

$ab (\cos \Theta \cdot \cos \varphi + \cos \Theta \cdot i \cdot \sin \varphi + I \cdot \sin \Theta \cdot \cos \varphi + I \cdot \sin \Theta \cdot I \cdot \sin \varphi) =$

$ab ((\cos \Theta \cdot \cos \varphi - \sin \Theta \cdot \sin \varphi) + I(\cos \Theta \cdot \sin \varphi + \sin \Theta \cdot \cos \varphi))$

Y utilizando las fórmulas de suma nº1 y nº3 =>

$ab (\cos(\Theta+\varphi) + I \cdot \sin(\Theta+\varphi))$

Entre paréntesis tenemos los ángulos sumados y las coordenadas divididas en una parte real y otra imaginaria. Puede escribirse de esta manera:

$(\text{mód.}a , \text{arg.}\Theta) \cdot (\text{mód.}b , \text{arg.}\varphi) = |a \cdot b| \angle(\Theta+\varphi)$

Multiplicamos los módulos (las magnitudes) y sumamos los argumentos (los ángulos). La notación muestra que estamos calculando polares.

División: $\dfrac{(\text{mod.}a , \text{arg.}\theta)}{(\text{mod.}b , \text{arg.}\varphi)} = \left|\dfrac{a}{b}\right| \angle(\Theta\text{-}\varphi)$

Prueba: $\dfrac{(\text{mod.}a , \text{arg.}\theta)}{(\text{mod.}b , \text{arg.}\varphi)} = \dfrac{a(\cos \theta + I \cdot \sin \theta)}{b(\cos \varphi + I \cdot \sin \varphi)}$ prolongado =

$\dfrac{a(\cos \theta + I \cdot \sin \theta) \cdot (\cos \varphi - I \cdot \sin \varphi)}{b(\cos \varphi + I \cdot \sin \varphi) \cdot (\cos \varphi - I \cdot \sin \varphi)}$ multiplicado =

$$\frac{a(\cos\theta\cdot\cos\varphi - \cos\theta\cdot I\cdot\sin\varphi + I\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi + \sin\theta\cdot\sin\varphi)}{b((\cos\varphi)^2 - (\cos\varphi\cdot I\cdot\sin\varphi) + I\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi + (\sin\varphi)^2)} \quad \text{organisada} \quad =$$

$$\frac{a(\cos\theta\cdot\cos\varphi + \sin\theta\cdot\sin\varphi) + I(\sin\theta\cdot\cos\varphi - \cos\theta\cdot\sin\varphi)}{b((\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2 + I(\sin\varphi\cdot\cos\varphi - \cos\varphi\cdot\sin\varphi))} \quad =$$

En los dos primeros términos del numerador usamos la fórmula de suma número 2 y en los dos últimos términos usamos la fórmula número 4. En los dos primeros términos del denominador usamos la relación básica y los dos últimos términos dan cero:

$$\frac{a(\cos(\theta-\varphi) + I\cdot\sin(\theta-\varphi))}{b(1+0)} = \frac{a}{b}(\cos(\Theta\text{-}\varphi) + I\cdot\sin(\Theta\text{-}\varphi))$$

Que esta escrito

$$\frac{(\text{mód.a}\,,\ \text{arg.}\theta)}{(\text{mód.b}\,,\ \text{arg.}\varphi)} = \left|\frac{a}{b}\right| \angle(\Theta\text{-}\varphi)$$

Dividimos los módulos (las magnitudes) y restamos los argumentos (los ángulos). La notación muestra que estamos calculando polares.

La conversión de forma polar a exponencial se mostró en el capítulo sobre números complejos. Euler lo expresó en una fórmula simplemente igualando una de las expresiones vectoriales a la función exponencial. Dicho de otra manera: definió la ecuación:

$$z = |z|\cdot(\cos\Theta + I\cdot\sin\Theta) = z\cdot e^{I\cdot\Theta}$$

Índice de materias

Aceleración centrípeta	278
Adición	11
Álgebra	26
Amplitud	118, 121
Ángulo	258, 260, 288
Ángulo línea-plano	300
Ángulo plano-plano	299
Área mediante vectores	260, 289
Argumento	344
Aritmética	10
Asíntota	145, 148
Aumentando	79, 131
Base número	36
Billete con letras	26
Cálculo de área	211
Cálculo de potencia	36
Cálculo diferencial	151, 153
Cálculo integral	(151), 193
Campo de pendiente	239
Cantidad vacía	356
Cathetus, catheti (piernas)	99, 107
Círculo	101
Círculo unitario	106, 117
Cociente	19
Coeficiente diferencial	156
Combinación	325
Componentes	256
Consecuencia lógica	72
Coordenadas cartesianas	68
Coordenadas polares	69, 271, 343
Cosinus (coseno)	104, 179
Cosinus, reglas de	127
Cociente de diferencias	156

Cuadrado	33
Cuadrante	68
• Primeros	68
• Segundo	68
• Tercero	68
• Cuarto	68
Cuartil	312
Cuatro operaciones aritméticas básicas	11, 93
Curva suma	314
Curvas de nivel	244
Curvas de parámetros	272
Delta	74, 156
Derivada de primer orden	190
Depósito, regla de	257
Determinante	249
Diagrama de caja	312
Diferencia	12, 152, 170, 199
Diferenciable	192
Desigualdades	61
Desviación estándar	317, 320
Diferenciación de funciones vectoriales	275.
Diferenciación de una función vectorial lineal	275
Diferenciación de la función circular	276
Diferencia vectorial	251
Disminuyendo	79, 96, 131
Distancia	69
Distancia línea-línea	298
Distancia avión-avión	299
Distancia punto-plano	291
Distancia punto-punto	284
Distribución binomial	332, 333
Distribución normal	316
División	11, 171
Dominio	68, 96, 131, 329
Ecuaciones diferenciales	225
Ecuación diferencial logística	236

Ecuación diferencial de primer orden 225
Ecuación diferencial de segundo orden 225
Ecuación diferencial homogénea 225
Ecuaciones 42
• Primer grado 42, 55
• Segundo grado 42, 50, 55
• Tercer grado 42, 55
• Cuarto grado 42, 55
• Dos ecuaciones con dos incógnitas 57
Eje neutro 122
El número de Euler 131
Encuesta, derivados 181
Encuesta, integrales 194
Equivalencia lógica 45
Esfera 308
Exponente 36
Extremo 183
Factorización 86
Figura 3D 243
Fórmula de interés 133
Fórmulas de suma 365
Fracciones 19
Fracciones, reglas de 172
Fracción polinómica 148
Frecuencia 311
Frecuencia acumulada 311
Funciones 60, 93
Función básica 193
Función binomial 334
Función circular 273
Función vectorial circular 274
Función sinus 117
Funciones compuestas 95, 174
Funciones exponenciales 130, 176
Función exponencial natural 133, 163
Función de raíz cuadrada 91, 161

Funciones, investigación de	184, 191
Funciones de potencia	90, 163
Funciones de dos variables	242
Funciones inversas	96, 109
Funciones vectoriales	272, 276
Geometría	100
Gradiente	245
Guldin, las reglas de	221
Hipérbola	92, 146
Hipotenusa	98, 105
Histograma	315
Integración parcial	204
Integral específica	207
Integral indeterminada	196
Infinitesimales	152
Intervalos	61
Intervalo de confianza	337, 338
Investigación de curvas	184
Iteración	55
Limas	167
Línea de puntos de distancia	265, 298
Línea horizontal	80, 157
Línea recta	73, 158
Línea recta en forma vectorial	262
ln y log, notaciones	141
Logaritmos	136
Logaritmo natural	139, 165
Longitud del arco	115
Longitud de la curva	223
Máximo	149, 183, 236
Mediana	312
Mínimo	149, 187
Módulo	344
Monótono	96
Muestra aleatoria	337

Multiplicación	11
No diferenciable	192
Notaciones, derivadas	168
Notaciones, integrales	196
Notaciones, cálculo de probabilidad	340
Número decimal	17, 18
Número de observaciones	311
Números complejos	342, 343
Números complejos, forma rectangular	345
Números complejos, forma polar	348
Números complejos, forma exponencial	350
Números enteros	342
Números imaginarios	65, 342
Números naturales	342
Números irracionales	321
Números racionales	342
Observaciones agrupadas	313
Observaciones no agrupadas	311
Origo	68, 104, 254
Ortogonal	80
Oscilaciones armónicas	121
Oscilación sinusoidal	119
Parábola	82, 160
Parámetro	68, 219
Paréntesis	29
Pendiente	74, 154
Pendiente tangente	156, 161, 165, 186
Permutación	325
Período	118, 124
Pertenece a	356
Pitágoras	69, 97, 101, 253
Pitágoras, 3D	284
Plano	289
Plano tangente	309
Polinomio de tercer grado	91, 146

Porcentaje	23
Punto porcentual	25
Polinomio de cuarto grado	147
Polinomio de segundo grado	81
Primer eje	67
Primera derivada	168, 190
Producto cruzado	287
Producto escalar	251
Producto	13, 170, 199
Producto, regla de	172
Producto escalar	251
Producto vectorial	283, 287
Promedio	311
Proyección	259
Proporcionalidad, directa, inversa	60, 115
Puntos dobles	279
Radianes	112
Raíz cuadrada	34
Rango	68, 96
Rectángulos	69
Reglas de los cuadrados	32
Regla de la cadena	173
Regla de los tres pasos	157
Regla del sinus	126
Regresión, lineal, potencia, exponencial	321
Relación básica	108, 278
Resta	11
Secante	155
Segundo eje	67
Segunda derivada	168, 190
Sinus (seno)	104, 176
Sistema de coordenadas	67
Sistema numérico	8
Solución gráfica	79, 214, 279
Solución numérica	217

Solución completa	196, 225
Solución específica	207, 225
Solución cero	54
Suma	11, 169, 199, 250
Suma vectorial	250
Sustitución	201
Tangente	131, 154, 244
Tangente, la fracción	107, 111, 180
Teoría de conjuntos	356
Triángulo de área	99
Triángulos arbitrarios	125
Triangulo rectangular	97
Tabla de palos	313
Triángulo complicado	128
Trigonometria	100
Valor medio	311
Variación	318
Vector, reglas de cálculo	257
Vector unitario	254
Valor límite	167, 192
Valor numérico	9, 70
Vector cruzado	253
Vector de dirección	256, 262
Vectores base	253, 282
Vectores normales	253
Vector de posición	253, 257
Vectores 2D	249
Vectores 3D	282
Velocidad angular	120
Velocidad tangencial	278
Vértice, parábola	84, 186
Volúmenes	216

