26-05-2024

世界数学书, 练习

(WorldMathBook, Exercises)

中国人

对于高中及更多

Tom Pedersen.公司: WorldMathBook
cvr.44731703 丹麦 (Denmark)
ISBN 978-87-975307-5-7

内容：

第 2 部分：平面（2D）中的坐标系和函数 - 练习

第 3 部分。

微分与整合 - 练习

前言

这是《世界数学-英语》练习册。

带有问题和建议的答案。

对于高中及更多。我们从四种基本算术运算开始，并在学士或候选人学习的第一或第二学期完成。

这本书与使用哪个公式集无关。

这本书也独立于使用计算器或计算程序。

作者：Tom Pedersen，机械加工工程师、博士来自布鲁内尔大学。我曾在埃尔西诺和哥本哈根的技术学院以及我目前就职的丹麦技术大学担任过项目负责人和顾问、研究员和讲师。我曾在多个科目上做过讲座，其中包括很多数学。我一直是本书中介绍的所有主题的讲师…….享受吧！

汤姆•佩德森，2024 年 1 月。

第 1 部分：基础知识 – 练习

A 部分 – 传统数学问题

1A.001 请计算：119 + 27

1A.002 计算：9003 + 271

1A.003 计算： 19.01 + 26.55

1A.004 计算： 19.01 + 357.014

1A.005 计算： 78 + 101.01 + 7.7803

1A.006 计算： 228 - 17

1A.007 计算： 227 - 18

1A.008 计算： 227 – 18.34

1A.009 计算： 916.07 - 805

1A.010 计算：111 - 112

1A.011 计算： 27 - 318

1A.012 计算： 94.17 – 2016.4

1A.013 计算： 11.1 – 2222.22

1A.014 计算： 3 · 27

1A.015 计算： 812 · 694

1A.016 计算： 812 · 694.03

1A.017 计算： 812.99 · 694.03

1A.018 计算： 2.22 · 33.33

1A.019 计算： $98 : 7$ or $\frac{98}{7}$

1A.020 计算： $96 : 12$ or $\frac{96}{12}$

1A.021 计算： $96 : 8$ or $\frac{96}{8}$

1A.022 计算： $100 : 8$ or $\frac{100}{8}$

1A.023 计算： $101 : 8$ or $\frac{101}{8}$

1A.024 计算： $19 : 12$ or $\frac{19}{12}$

1A.025 计算：$12 : 96$ or $\frac{12}{96}$

1A.026 计算：$12 : 97$ or $\frac{12}{97}$

1A.027 缩短分数

$\frac{9}{33}$ $\frac{112}{84}$ $\frac{-52}{65}$ $\frac{12}{160}$ $\frac{165}{-33}$

$\frac{21}{238}$ $\frac{437}{769}$ $\frac{242}{550}$ $\frac{910}{13013}$

1A.028 计算如下

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ $\frac{2}{7} \cdot \frac{9}{3}$ $\frac{1.2}{2} \cdot \frac{2}{1.2}$ $\frac{1.2}{2} \cdot \frac{3}{1.2}$

1A.029 填写空白处：

$\frac{4}{?} = \frac{20}{40}$ $\frac{6}{?} = \frac{3}{5}$ $\frac{7}{12} = \frac{14}{?}$

$\frac{?}{48} = \frac{-7}{6}$ $\frac{6}{7} = \frac{?}{28}$ $\frac{-6}{26} = \frac{6}{?}$

1A.030 计算如下

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ $\frac{3}{4} \cdot \frac{-3}{5} \cdot \frac{2}{1.5}$ $\frac{3}{4} \cdot \frac{-3}{5} \cdot \frac{-2}{1.5}$

$24 \cdot \frac{7}{8}$ $-24 \cdot \frac{7}{8}$ $24 \cdot \frac{-7}{8}$

$24 \cdot \frac{7}{-8}$ $-\frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 7$

1A.031 缩短分数

$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}}$ $\frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}}$ $\frac{\frac{1}{7}}{\frac{7}{1}}$

$\frac{\frac{1}{7}}{7}$ $\frac{\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{3}}$ $\frac{\frac{11}{13} \cdot \frac{11}{14}}{\frac{13}{14}}$

1A.032 缩短分数

$\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{7}}{2-\frac{10}{4}}$ $\frac{3-\frac{2}{7}}{4-\frac{5}{4}}$ $\frac{\frac{2}{3}-3}{-6+\frac{1}{3}}$

$\frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}$ $\frac{\frac{4}{5}-\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}$

1A.033 找到一个共同点并减少：

$\frac{3}{7}+\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}-\frac{2}{9}$ $-\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$

1A.034 找到一个共同点并减少：

$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$

1A.035 减少以下内容：

$\frac{(-4)\cdot\frac{11}{7}}{-\frac{11}{7}}$ $\frac{(-3)\cdot\frac{9}{13}}{(-4)\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{2}}$ $\frac{(-3)\cdot\frac{9}{13}+6\cdot\frac{9}{13}}{\frac{7}{9}}$

1A.036 减少以下内容：

$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{2}$ $\frac{6-\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}+4}$ $\frac{3-\frac{1}{3}}{\frac{15}{4}-2}$

$\frac{\frac{8}{7}+\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}+\frac{16}{3}}$

1A.037 将这些分数写成小数和百分比：

$\frac{1}{2}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{18}{12}$ $\frac{1000}{25}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{10}{5}$

1A.038 140 人中，35 人的百分比是多少？ 70 分中的 35 分？ 175 人中的 35 人？

1A.039 将这些百分比写成分数：

100%, 50%, 75%, 250%, 10%, 5%, 2%

1A.040 从50%到60%的变化是多少个百分点？从80%到90%？从50%到40%？

1A.041

12 月份，一个玻璃碗要 400 美元。

一月份的费用为 350 美元。

降价幅度是多少？

后来顾客已经习惯了350美元的价格。

4月份价格上涨至400美元。

价格上涨的百分比是多少？

1A.042 减少以下内容：

$x+x+x$	$2x-x-x$	$x-x-x$
$x\cdot y\cdot z$	$a+b-2a$	$a\cdot b-2a$
$4b-13b$		

1A.043 减少以下内容：

$\frac{3x}{x}$ $\frac{3x}{y}$ $\frac{3x+3y}{y}$

$\frac{3a}{b}+\frac{a}{2b}$ $\frac{8b}{b}-\frac{8}{8}$

1A.044 添加缺失的

$\frac{4}{?}=\frac{20}{40}$ $\frac{6}{?}=\frac{3}{5a}$ $\frac{7aa}{?}=\frac{14a}{24}$

$\frac{48}{?}=\frac{6}{-7}$ $\frac{6}{7c}=\frac{?}{28c^2}$ $\frac{26}{?}=\frac{-26}{6}$

1A.045 乘入括号：

$x\cdot(2-y)$ $-4(x-y)$ $(3-x)\cdot 3$

$(7-y)2$ $3a(6-a)$ $2(2-a)4$

1A.046 乘入括号：

$4(7a+b)+8(a+3b)$

$6(d-2e-f)+2(d-e+2f)$

$a(a-b)+b(a+b)$

1A.047 将公因数放在括号外：

$14-7a$ $4a+8b$

$10a+5b$ $8-4x$

$18x-3xx$ $-6xy+4x$

1A.048 将分数分成两个分数：

$\frac{2x+2y}{4}$ $\frac{3a-3b}{4}$ $\frac{3a-3b}{3}$

$\frac{3aa-3ab}{3a}$ $\frac{3a-3b}{\frac{1}{2}}$

1A.049 减少以下内容：

$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{9}$ $\frac{2\pi}{4\pi}\cdot 8\pi-5\pi$

1A.050 将括号中的恒等式相乘：

$(a+b)(c-d)$ $(4+a-b)(a+b)$

$(2a+b)(b-3a)2$ $(5a-5b)(5a+4b)$

1A.051 使用平方法则从左到右计算：

$(x+y)^2$ $(x-y)^2$ $(4x+1)^2$

$(\frac{1}{2}x+1)^2$ $(\mathrm{x}-5)^2$ $(2x+2y)^2$

$(a+b)(a-b)$ $(3a+1)(3a-1)$

$(3a+4b)(3a-4b)$

1A.052 使用从右到左的平方法则来计算：

x^2+4-4x $4+x^2-4x$ $9-x^2$

$a^2 - b^2$ $9a^2 + 4b^2 + 12ab$

$4 + 36b^2 - 24b$

1A.053 使用平方法则来计算：

$(3x - 5y)^2$ $(1 - 2x)^2$ $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

$(-3 - 3x)(-3 + 3x)$

1A.054 使用平方法则来计算：

$a^2 + b^2 - 2ab$ $4b^2 + 1 - 2b$ $4^2 - b^2$

$(3a)^2 - (4b)^2$

1A.055 减少以下内容：

$\frac{4a^2-9}{4a^2+9-12a}$ $\frac{b^2+9+6b}{b^2+3b}$ $\frac{3c^2-12c+12}{5c^2-10c}$

1A.056 减少以下内容：

$\frac{4a^2-16a+16}{5a^2-10a}$ $\frac{9b^2-16c^2}{3a-4c}$ $\frac{8b^2-18c^2}{2b+3c}$

1A.057 去掉括号：

$x(x + 1) + 1$ $(1 + x)x + 1$ $x(x + 2x)$

1A.058 去掉括号：

$x(x(x+1)+1)+1$

1A.059 重写 – 通过设置括号 – 使 x 为 1 的幂：

x^3+x^2+x+1

1A.060 计算如下：

$(x-3)^2+(x+3)(x-3)$

$(4x-2)^2-(2x+2)^2-6x(x-2)$

$(x+1)^2+(x-1)^2$

$-(4x-5)(4x+5)+(3x+2)^2+7x^2$

$(3x-2)^2-(3x+2)(3x-2)+3(3x+2)$

1A.061 计算如下：

$\sqrt{4}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{169}$
$\sqrt{0}$	$\sqrt{-4}$	$\sqrt{-16}$

是否可以计算负数的平方根？如果不可能，就回复：无解。

1A.062 计算如下：

$\sqrt{0.64}$	$\sqrt{0.81}$	$\sqrt{\frac{36}{4}}$

$\sqrt{\frac{1}{4}}$ $\sqrt{\frac{4}{9}}$ $\sqrt{\frac{-4}{-9}}$

1A.063 计算如下：

$\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{2+2}$

$\sqrt{64+36}$ $\sqrt{2^2-4}$ $\sqrt{10^2-4\cdot 8\cdot 5}$

1A.064 计算如下：

$\sqrt{10\cdot 10}$ 首先相乘 – 然后计算平方根。

$\sqrt{10\cdot 10}$ 首先除平方根 – 然后相乘。

$\sqrt{9\cdot 4}$ 首先相乘 – 然后计算平方根。

$\sqrt{9\cdot 4}$ 首先除平方根 – 然后相乘。

1A.065 按通常方法计算如下：

$\sqrt{\frac{1}{4}}$ $\sqrt{\frac{4}{9}}$ $\sqrt{\frac{121}{36}}$

然后首先除平方根——然后除法：

1A.066 计算如下：

$\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}$ $\sqrt{4}+\sqrt{4}$ $\sqrt{4}-\sqrt{4}$

$\sqrt{4}+\sqrt{16}$ $\sqrt{4+16}$ $\sqrt{4+9}$

$\sqrt{4\cdot 9}$

1A.067 计算以下公式（首先求平方，然后求平方根）：

$\sqrt{(-8)^2}$ $\sqrt{(-9)^2}$ $\sqrt{(-a)^2}$

$\sqrt{(-ab)^2}$

1A.068 计算如下：

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ $\sqrt{\frac{a}{a}}$ 通常解决 $\sqrt{\frac{a}{a}}$ 替代解决方案

$\sqrt{\frac{16x}{25y}}$

1A.069 计算如下：

$10^3 \cdot 10^3$ $10^2 \cdot 10^5$ $10^{-2} \cdot 10^5$

$10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}}$ $10^{\frac{3}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}}$ $10^{-\frac{3}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}}$

1A.070 减少以下内容：

$\frac{1}{10^{-1}}$ $\frac{2}{10^{-4}}$ $\frac{10^2 \cdot 10^{-1}}{10^{-4}}$

$\frac{10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-1}}{10^{-4} \cdot 10^3}$ 通常解决 $\frac{10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-1}}{10^{-4} \cdot 10^3}$ 替代解决方案

1A.071 减少以下内容：

$\frac{10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-1}}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3}}$ $\frac{10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{-\frac{3}{2}} \cdot (10^4)^2}{10^2 \cdot 10^{-1}}$

1A.072 减少以下内容：

$$\frac{10^2 \cdot 10^{-5} \cdot 0.1}{\frac{1}{10} \cdot 10^{-4} \cdot 10^2} \qquad \frac{0.01 \cdot 0.1 \cdot \frac{2}{10}}{10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{10^{11} \cdot 10^0 \cdot 10^{-3}}{0.2 \cdot 10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}}}$$

1A.073 减少以下内容：

$$\frac{1}{x^{-1}} \qquad \frac{2}{x^{-4}} \qquad \frac{x^2 \cdot x^{-1}}{x^{-4}}$$

1A.074 减少以下内容：

$5^2 - 4^2$ $\qquad$ $4 \cdot 2^{-5}$

$2 \cdot (-2)^5$ $\qquad$ $2 \cdot (-2)^3 + (-2)^2$

1A.075 减少以下内容：

$(2 \cdot 3)^3$ $\qquad$ $((2 \cdot 3)^3)^2$

$\left(\left(\frac{10}{5}\right)^3\right)^2$ $\qquad$ $\left(\left(\frac{11}{5}\right)^3\right)^2$

1A.076 缩短以下内容：

$6^2 \cdot 6^3$ $\qquad$ $4^6 \cdot 5^6$ $\qquad$ $\frac{5^5}{5^3}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\qquad$ $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5$ $\qquad$ $\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^7}{\left(\frac{3}{4}\right)^6}$

$\frac{4^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$ $(4^3)^5$ $(8^4)^5$

1A.077 缩短以下内容：

$\frac{4^3 \cdot 3^3}{6^3}$ $\frac{5^3 \cdot 3^3}{18^3}$ $\frac{(4^2)^7}{16^7}$

$3^6 \cdot 6^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$ $\left(\frac{4}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot 6^5$

1A.078 缩短以下内容：

$4^5 \cdot 3^5 \cdot \frac{1}{12^4}$ $\frac{2^3 \cdot 3^3}{12^3}$ $\frac{4^4 \cdot 8}{2^5}$

$(4^3)^2$ 4^{3^2}

1A.079 减少以下内容：

$(a \cdot b)^3$ $((a \cdot b)^3)^2$

$\left(\frac{x}{y}\right)^3$ $\left(\left(\frac{x}{y}\right)^3\right)^2$

1A.080 转换为指数并减少以下内容：

$\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[8]{8}$ $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[6]{8}$ $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{6}}$

$\sqrt[5]{243}^3$

1A.081 转换为指数并减少以下内容：

$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt{4}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt[3]{6^3} \cdot \sqrt[4]{6^2}}{6\sqrt{6}}$

1A.082 解方程：

$18x + 13 = 13x + 58$

1A.083 求解方程并通过代入方程来检验答案。

$14(5 + x) = 5(3x - 4) - 3(5 - 2x)$

1A.084 解方程组：

$4 - x = 11$ $\qquad$ $5 - x = 5$ $\qquad$ $-3x = 24$

$\frac{3}{4}x = 7$ $\qquad$ $\frac{1}{2}(1 + x) = 8$

1A.085 解方程组：

$\frac{4y+1}{5} - \frac{4y-3}{4} = -3$ $\qquad$ $\frac{z+3}{2z} - \frac{2z-5}{3z} = \frac{1}{6}$ 和 $z \neq 0$

1A.086 解方程：

$\frac{6y-5}{6} - \frac{8-6y}{6} = -\frac{7y+3}{8} - \frac{9-2y}{3}$

1A.087 解方程组：

$\frac{5}{y} = \frac{5}{9}$ $\frac{x}{9.7} = \frac{3.95}{7.9}$ $\frac{a+6}{13} = \frac{5}{8}$

$\frac{6}{5+5} = \frac{b}{5}$ $\frac{c}{5} = \frac{15+c}{5+3}$

1A.088 解方程组：

$0.45x = 1.35$ $x = \frac{1.35}{0.45} = 3$ $-4x = -\frac{1}{4}$

$-\frac{7}{5+3}x = -\frac{1}{6}$

1A.089 求解方程 x ≥ 0

$x^{\frac{1}{2}} = 3$ $x^{\frac{1}{2}} - 2 = 0$ $2x^{\frac{1}{2}} - 2 = 0$

1A.090 首先考虑不可能的 x 值来求解方程：

$\frac{16x-2}{2(2x+1)} = \frac{12x-12}{3x-4}$

1A.091 求解关于 x 的方程：

$4 + 4x = 2ax + 6$

1A.092 解方程：

$x^2 - 2\mathrm{x} + 1 = 0$

1A.093 解方程：

$x^2 - 2\mathrm{x} = 0$

1A.094 解方程：

$$-2-3x=-2x^2$$

1A.095 解方程：

$$|x|=\sqrt{\mathrm{x}}$$

1A.096 解方程：

$$-\sqrt{2-\mathrm{x}}=0$$

1A.097 解方程组：

$$x(x-3)=0$$

$$4x(x+4)=0$$

$$(x-3)(x-7)$$

$$4(x-5)(x-1)=0$$

$$8(x+4)x=0$$

1A.098 解方程：

$$-x^2-2\mathrm{x}+3=0$$

$$2x^2+4\mathrm{x}-20=0$$

$$2x^2-4\mathrm{x}+8=0$$

1A.099 解方程：

$-5x^2 - 4\mathrm{x} - 1 = 0$

1A.100 通过猜测根来求解方程，并查看它是否呈现真或假表达式。然后通过CAS检查。

$x^3 + x^2 = 0$

1A.101 通过猜测和插入找到 x 的根。然后通过CAS检查。

$x^3 + x^2 - 2 = 0$

1A.102 解方程组：

$x^4 = 16$ $x^4 = 81$

1A.103 估计方程中的两个根，然后通过 CAS 进行检查：

$x^4 + x^2 = 81$

1A.104 首先使用求解二次方程的方程来求解这些方程：

$x^4 - 40x^2 + 144 = 0$ $2x^4 - 64x^2 - 288 = 0$

1A.105 首先使用零解来求解该方程：

$x^4 - 2x^3 - 3x^2 = 0$

1A.106 用两个未知数求解这两个方程：

$10x + 4y = 44$ 和 $2x - y = 7$

1A.107 用两个未知数求解这两个方程：

$2x - y = 6$ 和 $3x - 5y = 2$

1A.108 用两个未知数求解这两个方程：

$\frac{3}{2x-3y+3} = \frac{4}{3x-4y+3}$ 和 $\frac{5}{3x+4y-6} = \frac{5}{4x+3y+1}$

1A.109

$x + \frac{1}{2}y = 4$ 和 $2x - 3y = -3$

1A.110

$\frac{1}{2}x + 3y = -7$ 和 $-2x + 2y = -14$

1A.111

在下列哪个表达式中，x 和 y 成比例？

1) $x = 4y$ 2) $x = \frac{1}{2}y$ 3) $x = \frac{1}{y}$

4) $x = 4y + 3$ 5) $x = \frac{2}{y} - 4$ 6) $x = k \cdot \frac{1}{y}$

1A.112

我们可以在 2 到 3 的开区间中使用 x 值。在图形、区间括号和不等式中显示这一点。

然后将其显示为一个闭区间。

1A.113

我们可以使用大于 −17 的 y 值。用图形、括号和不等式来表示这一点。

我们可以使用大于或等于 −17 的 y 值。用图形、括号和不等式来表示这一点。

1A.114 解两个不等式：

$\frac{1}{2}x+3>-\frac{1}{3}x+4$ $\frac{4}{3}x-3>4-\frac{1}{3}x$

1A.115 求解二重不等式：

$2x-4<2x+3<6-x$

第 1 部分：基础知识 – 练习

B 部分 – 应用数学问题

1B.01

水容器已满 20%。如果再装满8立方米，就装满了25%。船只有多大？

1B.02

装有粮袋的托盘重 419 公斤，但不知道有多少袋。上面再放一个粮袋，总质量为440公斤。最初有多少粮袋？

1B.03

一个浴缸可容纳 300 升水。每分钟充满40升，但出口部分打开，每分钟又流出17升。浴缸注满水需要多长时间？

1B.04

一匹马每天吃掉 75% 的干草捆。 5 匹马 30 天内会吃多少干草捆？

1B.05

油箱已满 10%。再加 20 升，即可充满 14%。水箱有多大？

1B.06

四匹马每天吃 2.5 包干草。每三天只有两匹马会吃东西。每三天三匹马吃食，每三天四匹马吃食。谷仓里有 450 捆干草。他们会持续几天？

1B.07

$d = 3800\sqrt{h}$ 是当我们从高度（高度）h 观看大海时到地平线的距离（以米为单位）的粗略表达式。

计算 h = 2 m 和 h = 40 m 时的 d。

我们处于海平面。从多远的距离可以看到1000米高的山顶？

（问题 2B.09 将介绍更精确的计算方法）。

1B.08

两辆车售价 20 万美元，含 25% 的增值税。

一辆车不含增值税多少钱？

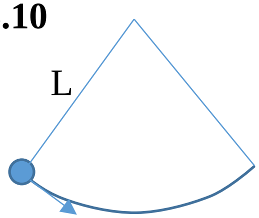
1B.09

对一栋公寓的粗略估算（以百万英镑为单位）可以用以下公式描述：: $E = 250 + \frac{n}{2}(n + 4)$ ，其中 E 是费用，250 是固定费用，$\frac{n}{2}(n + 4)$ 是可变费用费用以 n 为层数，最多 n = 20。

8层楼和12层楼的费用是多少？

4.5亿英镑可以建多少层楼？

1B.10



数学摆的周期 T（以秒为单位）约为：

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ 其中 L 是以米为单位的绳索长度，g 是大约的重力加速度。 9.82（$\frac{m}{s^2}$,单位：米/秒^2）

计算 5、10 和 15 米线长处摆动拆除球的周期 T。

1B.11

密度 ϱ（古希腊字母）取决于质量 (m) 和体积 (V)。

ϱ 如何取决于 m？ ϱ 如何取决于 V？

实心球重 15 kg，体积为 0.002 m^3。密度是多少？

1B.12

一家皮划艇生产商想要一种重量低于 20 公斤的新型号。材料强度要求其重量至少为 15 公斤。

将可选的质量范围写为区间和不等式。

1B.13

供水泵每小时产生 90 m^3 水量。 20秒平滑启动（线性），运行12分钟，40秒平滑停止。抽了多少水？

1B.14

蔗糖的组成为：

- 12 个碳原子，每个碳原子的质量为12 u（单位）。
- 12 个氢原子，每个1 u。
- 11 个氧原子，每个氧原子 16 u。

碳、氢、氧的质量分数是多少？

1B.15

水由以下成分组成：

- 2 个氢原子，每个氢原子的质量为1 u（单位）。
- 1 个16 u 的氧原子。

氢气和氧气的质量百分比是多少？

第 2 部分：平面（2D）中的坐标系和函数 - 练习

A 部分 - 传统数学问题

2A.001 确定以下数值：

$\lvert -5\rvert$	$\lvert 5\rvert$	$\lvert 0\rvert$
$\lvert \frac{1}{2}+4\rvert$	$\lvert \frac{1}{2}-4\rvert$	$\lvert -a\rvert$
$\lvert -ab\rvert$	$\lvert -5+2\rvert$	$\lvert -7-5\rvert$
$\lvert -7+5\rvert$	$\lvert -\frac{11}{4}\rvert$	$\lvert -5018\rvert$

2A.002

绘制坐标系并标记点 A(0,3)、B(5,-2) 和 C(-2,-3)。

计算距离 |AB| |BC| |CA| |AC|，并测量距离以检查分辨率。

2A.003

在坐标系中显示这四个点并计算点之间的六个距离：

A(-4,2) B(2,6) C(8,8) D(11,5)

2A.004

一条直线穿过点 A(-4,2) 和 B(2,6)。确定直线方程。

2A.005

确定直线方程，其中：

l_1:　　　　P(0,5) 和 a = 2

l_2:　　　　P(0,-3) 和 a = 6

l_3:　　　　P(0,-$\frac{1}{2}$) 和 a = -$\frac{1}{8}$

l_4:　　　　P(2,1) 和 a = -$\frac{1}{4}$

并在坐标系中绘制线条。

l_2 和 l_3 正交（垂直）吗？

2A.006

两条直线 l_1 和 l_2 具有相同的斜率。 1 通过（-4,1）和 (4,3)。另一个通过(3,0)。他们的方程式是什么？

2A.007

线 l 穿过点 O(0,0) 和 P(3,3)，而线 m 穿过点 Q(3,2) 和 R(-1,-4)。

他们的方程式是什么？它们是平行的吗？

在图中画出线条。

2A.008

直线 l_1 具有方程/函数：　　$2x + 4y - 14 = 0$

直线 l_2 具有相同的斜率并经过点 (5,7)。

确定 l_2 的方程/函数。

2A.009

给定点：A(−2,3) B(6,6) C(4,−2)。

确定通过这些点的三条直线。

2A.010

给定行 l： $2x - y = 4$

这条线将在哪里与 x 轴和 y 轴相交？

2A.011

鉴于以下几行： $3x - 4y = 0$

和: $kx + 3y = 12$

k 的哪个值将使线平行？

哪个 k 值会使线正交？

2A.012

直线 l_1 具有方程/函数： $y = \frac{3}{4}x + 1$

直线 l_2 具有方程/函数： $y = \frac{3}{7}x + \frac{22}{7}$

这些线与 y 轴相交的位置在哪里？

在图中画出线条。

计算所形成的三角形的面积。

2A.013

在图中画出抛物线：

$f(x) = x^2$ $g(x) = 4x^2$ $h(x) = \frac{1}{4}x^2$

2A.014

在图中画出抛物线：

$i(x) = -x^2$ $j(x) = -4x^2$ $k(x) = -\frac{1}{4}x^2$

2A.015

抛物线在哪里 $f(x) = x^2 - 2x - 8$

x 轴和 y 轴相交？

计算顶点的坐标。

画出抛物线。

2A.016

$y = -x - 2$ 线在哪里

和抛物线 $y = 2x^2 + 6x - 2$ 相交？

另外，制作草图作为对照。

2A.017

抛物线在哪里 $y = x^2 - 4x - 4$

和 $y = 2x^2 + x$ 相交吗？

另外，制作草图作为对照。

2A.018

抛物线在哪里 $2x = -2x^2 + y$

和 $4 = -x + x^2 + y$ 相交吗？

另外，制作草图作为对照。

2A.019

素描抛物线 $y = -x^2 + 6x - 5$

读取与 x 轴和 y 轴的交点 – 并读取顶点。

计算与 x 轴和 y 轴的交点 – 并计算顶点。

通过读取和计算确定直线 y = 5 与抛物线相交的位置。

2A.020

因式分解 $f(x) = x^2 - x - 6$ 和 $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 8$

2A.021

给定 $f(x) = 3x - 4$ 和 $g(x) = x + 2$

计算 f(x) + g(x) 和 f(x) - g(x) 并在同一图中绘制所有四个函数的草图。

2A.022

给定 $f(x) = 3x - 4$ 和 $g(x) = x + 2$

找到复合函数 f(g(x)) 和 g(f(x)) 并将它们绘制在图表中。

令 f(g(x)) 命名为 h(x)，令 g(f(x)) 命名为 i(x)。找到反函数 $h^{-1}(x)$ 和 $i^{-1}(x)$ 并将它们绘制在同一图中。

2A.023

检查这些三角形是否是直角，如果是，请计算面积。

a = 2	b = 3	c = 3.8
a = 3	b = 4	c = 5
A(2,3)	B(5,4)	C(10,0)
D(0,0)	E(2,4)	F(10,0)

2A.024

求圆的圆心和半径：

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$$

$$y^2 - 12y = -x^2 - 16x$$

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y = 12$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 20 = 0$$

2A.025

这些方程描述的是圆吗？

$x^2 + y^2 + 12x + 35 = 0$

$x^2 + y^2 + 12x + 36 = 0$

$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - x + \frac{3}{2}y + \frac{35}{2} = 0$

2A.026

给定三分 C(7,-4) P(36,41) Q(50,-30)

以 C 为圆心的圆 r = 52。它会穿过 P 和 Q 吗？

2A.027

给定 C(−3,2) 且 r = 4 的圆

确定圆的函数/方程。

然后测试这些点是否在圆上： P(1,4) Q(−5,−4) R(1,2)

最后求圆的周长和面积。

2A.028

确定以（2,5）为圆心并通过点（−3,−7）的圆的方程。

圆与 x 轴和 y 轴相交的位置在哪里？

2A.029

求圆心 $x^2 - x + y^2 + y = 5$

并找到另一个同心且切线 $y = \frac{4}{3}x + \frac{23}{6}$ 的圆的方程/函数

画一个粗略的草图。

2A.030

使用表格或 CAS 来确定：

cos 60°	sin 60°	cos 45°	sin 45°	cos 30°	sin 30°
cos 90°	sin 90°	cos 100°	sin 100°	cos 135°	sin 135°

请注意，有些 CAS **只**给出一个答案，而可能有两个答案。您可以通过绘制单位圆草图来确定。

2A.031

在单位圆上标记距 x 轴 25° 和 65° 的点，并使用正弦和余弦以及十进制数写出它们的坐标。

2A.032

在单位圆上标记与 x 轴成 45° 和 135° 的点，并使用正弦和余弦以及十进制数写出它们的坐标。

2A.033

在以下情况下使用表格或 CAS 查找角度：

cos v = 0　　cos v = 1　　sin v = 0

$\sin v = 1$ $\sin v = 0.707$ $\sin v = 0.342$

$\cos v = -0.5$ $\cos v = -0.94$

并显示单位圆内的角度。

请注意，每个函数通常有两个角度（除非我们位于 x 轴或 y 轴），并且某些 CAS 仅显示其中一个 – 通常是最小的角度。

2A.034

使用 CAS 确定：

$\tan 20°$ $\tan 100°$ $\sin 20°$ $\cos 135°$

2A.035

在单位圆中显示两个角度，其中 $\tan v = 2$

2A.036

两个角度是 45° 和 90° 。它们的弧度是多少？

2A.037

两个角度是 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{3\pi}{4}$ rad。它们的度数是多少？

2A.038

我们一周转动多少度（一个周期）？ – 多少弧度？

2A.039

绕半径40米的圆转180° 的弧长是多少？

2A.040

绕半径0.8米的圆转270° 的弧长是多少？

2A.041

在图中画出函数的草图，并读取振幅和周期：

f = sin x　　　　g = 2sin x　　　　h = 3sin x

其中 x 是以弧度表示的角度。

2A.042

在图中画出函数的草图，并读取振幅和周期：

f = sin x　　　　g = sin 2x　　　　h = sin $\frac{x}{2}$

其中 x 是以弧度表示的角度。

2A.043

绘制函数草图 $f(x) = \sin x$ 在图表中 $0 \leq x \leq 2\pi$

并读取 x 值，其中 $f(x) = 0$

通过计算求解 $f(x) = 0$ 并与读数进行比较。

2A.044

在图中绘制函数 $f(x) = \sin x$ ，其中$0 \le x \le 6\pi$

并读取 x 值，其中 $f(x) = 0$

通过计算和/或单位圆 $f(x) = 0$ 求解并与读数进行比较。

尝试找到一种简短的方式来表达答案。

2A.045

正弦振荡

$f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) + k$

有 A = 2 k = -1 φ = 0 T = 3

写出/找到方程并将其绘制在图表中。

2A.046

正弦振荡

$f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) + k$

有 A = 2 k = 4 φ = 0 T = 10

写出/找到方程并将其绘制在图表中。

2A.047

考虑正弦振荡

$f(t) = 1.5 \cdot \sin(2t + 3)$

在图中画出从 t = − 5 到 t = 5 的函数。

在图上显示曲线中 f(t) > 1 的部分

显示/标记读取相移的位置，并计算相移。

读取周期，并计算周期。

2A.048

曲线上的点（5.5 ， 1.5）是：

$f(t) = 1.5 \cdot \sin(2t + 3)$

2A.049

求解以下方程 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$2 + (\tan x)^2 = 2 + \tan x$

2A.050

绘制函数草图 $f(x) = y = \sin x$ 在图表中 $0 \leq x \leq 2\pi$

然后标记 $\sin x > 0.75$ 并读取 x 的相应区间。

最后，计算 x 的区间。

2A.051

绘制函数草图 $f(x) = y = \cos x$ 在图表中 $0 \leq x \leq 2\pi$

然后标记 $\cos x < -0.5$ 并读取 x 的相应区间。

最后，计算 x 的区间。

2A.052

画一个单位圆并标出圆弧和 $\sin v > 0.5$ 的范围

读取 x 对应的域。

计算与 x 轴对应的角度。

计算 x 的域。

2A.053

求解以下方程 $0 \leq x \leq \pi$

$$1 = \frac{3\sin x + 1}{4(\sin x)^2 + 1}$$

2A.054

在等腰三角形中，角 A 和 C 为 70°，边 a 和 c 的长度为 15。

交流电要多长时间？

B角有多大？

从B到b的高度是多少？

2A.055

在三角形 ABC 中，我们有： $a = 6 \quad b = 12 \quad c = 9$

计算 A、B 和 C。

2A.056

在三角形 ABC 中，我们有：$a = 5 \quad c = 8 \quad B = 55°$

计算 A、C 和 b。

2A.057

在三角形 ABC 中，我们有: $b = 7 \quad c = 6 \quad B = 80°$

计算 C、A 和 a。

还要计算三角形的面积。

2A.058

三角形 ABC 和 DEF 都是单角三角形。

$a = 7 \quad b = 8 \quad c = 9$

三角形DEF的面积是三角形ABC的面积的4倍。

d、e 和 f 的边长是多少？

2A.059

在三角形 ABC 中，我们有： $A = 45° \quad a = 2.3 \quad b = 2.7$

计算 c、B 和 C。

关于各种形式的指数函数的注意事项：

课本上有方程/公式： $f(x) = b \cdot a^{kx}$ （1）

并且： $f(x) = b \cdot c^x \quad for \quad c = a^k$ （2）

课本上也有： $K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$ （3）

如果首选 k 作为指数的一部分，我们使用（1）。

如果首选 k 作为基数的一部分，我们使用（2）。

在（2）中，（1）中的两个常数 a 和 k 组合成一个共同常数 c：

$f(x) = b \cdot a^{kx} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = b \cdot (a^k)^x \quad => \quad f(x) = b \cdot c^x$

(3) 中的基数被扩展，这在经济学中经常使用。

加倍和减半的两个方程/公式的用法：

$T_2 = \frac{\ln 2}{\ln c} = \frac{\ln 2}{\ln a^k}$ 和 $T_{½} = \frac{\ln ½}{\ln c} = \frac{\ln ½}{\ln a^k}$

取决于我们使用哪种形式：（2）或（1）。

如果我们使用（3），我们可能需要做更多的改变，这超出了本书的范围。

以下建议的解决方案将展示如何处理这个问题。

2A.060

在图中画出函数的草图：

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 和 $g(x) = (3)^x$

What are the characteristics of the two functions?

2A.061

在图中画出函数的草图：

$h(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ 和 $i(x) = 2(3)^{2x}$

这两个函数有什么特点（也与问题2A.060中的函数相比）？

2A.062

如果我们投资 40 000 美元，希望预计平均年利率为 6%，那么 4 年后我们有多少钱？

2A.063

在指数增长的函数中

$f(x) = b \cdot a^{kx}$

我们知道增长率是 10%

$f(0) = 1.5$ 和 $f(1) = 1.65$

建立方程。

2A.064

在指数增长的函数中

$f(y) = b \cdot a^{ky} \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = b \cdot c^{y}$

a 和 k 都是常数，可以组合成常数 c ： $a^k = c$

我们知道增长率是 −10%

$f(0) = 1.5$ 和 $f(1) = 1.35$

建立方程。

2A.065

在函数中查找 b 和 a

$f(x) = b \cdot a^{kx}$　　　　有两个已知点　A(0,4)　B(1,9)

2A.066

递减指数函数可以用公式中 k 的负值来表示　$f(x) = b \cdot a^{kx}$

或者可以用公式中0到1之间的c值来描述　　$f(x) = b \cdot c^{x}$

其中两个常数 a 和 k 组合为 c：　　　$a^k = c$

画出两个函数的草图　　　　$f(x) = 2 \cdot 3^{-4 \cdot x}$

和　　　　$g(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3^4}\right)^x = 2 \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^x$

从两张图中可以看出，它们是相似的。

2A.067

缩短以下内容 (从 $f(x) = b \cdot a^{kx}$ to $f(x) = b \cdot c^{x}$)

$f(x) = 2 \cdot e^{0.4 \cdot x}$　　　$g(x) = (-0.5) \cdot e^{(-0.27) \cdot x}$

$h(x) = 3 \cdot e^{(-1.3) \cdot x}$

2A.068

缩短表达式并描述函数是递增还是递减。其中两个在减少，哪一个减少最多？

$f(x) = 0.6 \cdot e^{(-1.3)\cdot x}$ $g(x) = 3 \cdot e^{1.7\cdot x}$

$h(x) = 12 \cdot e^{(-0.4)\cdot x}$

在图表中绘制曲线。

2A.069

在实验室测试中，细菌的数量根据

$N(t) = 150 \cdot e^{0.6\cdot t}$

其中 N 是细菌数量，t 是时间（以小时为单位）。

发病时有多少细菌？

什么时候这个数字会翻倍？

什么时候有 10 000 个细菌？

2A.070

计算/缩短

$log\,4 + log5$ $log\left(\frac{3}{4}\right) + log\left(\frac{4}{5}\right)$

$log\,4 - log5$ $log\left(\frac{3}{4}\right) - log\left(\frac{4}{5}\right)$

2A.071

计算/缩短

$ln\, 4 + ln 5$ $\quad\quad$ $ln\left(\frac{3}{4}\right) + ln\left(\frac{4}{5}\right)$

$ln\, 4 - ln 5$ $\quad\quad$ $ln\left(\frac{3}{4}\right) - ln\left(\frac{4}{5}\right)$

2A.072

计算/缩短

$ln(e \cdot e^3)$ $\quad\quad$ $log(e \cdot e^3)$

$4\, ln\, e^{4-1}$ $\quad\quad$ $4\, ln\, e^4 + 4\, ln\, e^3$

2A.073

解方程/求 x/分离 x

$3^{2x} = 4$ $\quad\quad$ $3^{-2x} = 4$

$ln\, 3x = 4$ $\quad\quad$ $ln\, 3x + 2 = ln\, 4$

2A.074

通过控制找到的根来求解方程，即根是否会导致取正数的对数？

$\log(2 - 2x) = ln\, e^2$

$\log(2x + 6) = -0.3$

$\ln x + \ln(x - 1) = 2ln\, 2$

2A.075

通过控制找到的根来求解方程，即根是否会导致取正数的对数？

$ln\, x - ln(x-1) = ln\, 2$

$ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + l\, n(x+4) + 2 = 2$

2A.076

指数增长的方程为 $y = 4 \cdot e^{1.1 \cdot t}$

隔离t。

计算倍增常数。

在第一象限绘制曲线。

2A.077

在正态图的第一象限中画出 x≥0 时的函数 $f(x) = 3 \cdot 1.2^x$ 然后在另一个图的第一象限中绘制函数，在第一个轴上使用线性刻度，在第二个轴上使用 ln f(x) 。最后在第二轴上有 $\log_{10}$ f(x) 的图表中。

阅读图表会发现您得到了相同的值。

2A.078

在图表中画出函数 $y = \frac{3}{x}$ 和 $y = x^3$ 的草图。

读取交点的坐标。

计算交点的坐标。

第 2 部分：平面（2D）中的坐标系和函数 - 练习

B 部分 – 应用数学问题

2B.01

混凝土原水蓄水池最大容量20 000 立方米从大自然获取地表水并供应一个小村庄的当地供水系统。自来水厂的生产许可证为每小时4立方米，直至水库容积达到20%。有时大自然不提供任何水。

旱季平均每天蒸发20立方米水。如果水库满了，然后不接收原水，可以生产多少天的水？

通常，在旱季，水库三个月内可接收原水1000立方米。

如果开始时的最大水量是多少，那么在这三个月的干旱之后，水库的水量是多少？体积（20 000 立方米（20 000 m^3））？

2B.02

鱼类加工厂用工艺水清洗干净，工艺水将有机物（蛋白质、脂肪等）带到混凝土水箱中，在水箱中通过称为浮选的过程将物质吹到表面。从那里，它被刮到排水沟中以供进一步加工和利用。

从上方看，储罐的内部宽度必须 = 3 m，长度 = 5 m。四个角度必须均为 90° ，以便刮刀安装正确。所有测量值均在此处未考虑的指定公差范围内。

检查时：如何测量宽度、长度和角度是否正确？

2B.03

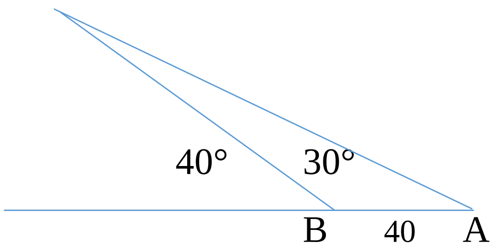
阳光照在树上。沿着水平地面的阴影长29米，阴影顶部与树顶相对于水平面的角度为40° 。这棵树有多高？

2B.04

我们将找到放置在陆地上的风车的最大高度。

我们将测量装置从水平地面上的 A 点瞄准风车顶部并读取 30° 。然后我们沿着 40 米的直线向风车方向移动，并从 B 点再次瞄准。现在测量的角度为 40° 。

风车有多高？



2B.05

我们将找到放置在海上的风车的最大高度。

我们在船上。我们将测量装置从海拔 5 米的 A 点瞄准风车顶部，读数为 20° 。然后我们沿直线 100 米朝风车方向，再次从 B 点瞄准。现在测量的角度为 28° 。

风车有多高?

2B.06

大贝尔特桥桥塔之间的距离为1624米。这些塔比平均海平面高 254 米。塔顶之间的承载缆呈（接近）抛物线形状，顶点高于平均海平面 77 米。 （数据来自参考：www.storebaelt.dk 然而，问题和作者的解决方案）。

如果将 (0,0) 放在顶点处，抛物线的方程是什么?

如果我们将 (0,0) 放置在顶点正下方的平均海平面处，抛物线的方程是什么?

2B.07

大贝尔特桥桥塔之间的道路呈圆形曲线，半径为45000米。在中间（塔之间的中间 - M 点），道路海拔高于平均海平面 75 米。 （数据来自参考：www.storebaelt.dk 然而，问题和作者的解决方案）。

如果我们将 Origo（点 (0,0)）放置在 M 点正下方 45 000 米处，道路圆的方程是什么?

如果我们将 Origo（点 (0,0)）放置在 M 点正下方的海平面上，道路圆的方程是什么?

2B.08

我们想要使用抛物面盘反射器设计聚光灯。边缘直径 = 0.2 m，高度 = 0.3 m。

将 3D 抛物线盘沿其中心线切片，将 2D 抛物线放置在坐标系中，并确定抛物线方程。

2B.09

地球沿经线的周长为 40 000 公里，接近球形。我们站在海滩上，眼睛距海平面2m，眺望地平线。地平线有多远?

如果我们距海平面 40 m、100 m、1000 m，我们能看到多远的地平线?

2B.10

地球沿经线的周长为 40 000 公里，接近球形。我们站在海滩上，眼睛距海平面2m，眺望海峡对岸25公里外的一块岩石。

我们看不到多少山麓（从海上及向上）?

2B.11

电子振荡遵循函数

$f(x) = (\sin x)^2 + \sin x$

我们只考虑一个时期： $0 \leq x \leq 2\pi$ 弧度

(或者: x 属于区间 $[0\,;2\pi]$ – 或者: $x \in [0\,;2\pi]$)

求 f(x) = 0 方程的根

在图中画出该函数的草图。是否符合所发现的根源?

2B.12

现在我们考虑与 2B.11 中相同的函数。然而，现在我们考虑从 0 弧度 到 6 π弧度 的三个周期

$f(x) = (\sin x)^2 + \sin x$ 在哪里 $0 \le x \le 6\pi$

求 f(x) = 0 方程的根

找到一种“简短”的方式来呈现所有的根源。

在图中画出该函数的草图。是否符合所发现的根源?

2B.13

在某些化学反应中，当温度升高 10° C 时，反应速率会加倍。

如果温度从 20° C 升至 100° C，反应速率将如何变化?

原理上画出函数曲线的粗略草图。

我们在谈论什么样的功能?

2B.14

化学反应的反应速率是 20° C 至 100° C 范围内温度的函数，如下所示:

温度	20	30	40	50	60	70	80	90	100	°C
速率	1	2	4	8	16	32	64	128	256	系数

确定方程式：反应速率 = f（温度）

使用处方 $y = b \cdot c^x$

通过 CAS 或在计算过程中猜测根来求解。

2B.15

在实验室测试中，细菌的数量根据

$N(t) = 160 \cdot e^{0.5 \cdot t}$

其中 N 是细菌数量，t 是时间（以小时为单位）。

发病时有多少细菌？

什么时候这个数字会翻倍？

什么时候有 10 000 个细菌？

2B.16

从2015年1月1日到2021年12月31日，工厂的产量每年增加4%
。

总共是百分之多少？

2B.17

一名妇女从她叔叔那里继承了2万英镑，但根据遗嘱，她必须等待5年才能将这笔钱释放。她询问银行是否可以今天借出一笔钱，并在五年后用这 20 000 英镑偿还。银行的利率为6%
。

她能借多少钱？

2B.18

患者血液中某些药物的浓度建模如下：

$$f(t) = 0.3 \cdot t \cdot e^{-1.1t}$$

（方程/数据来自参考文献：www.studieportalen.dk 然而，作者提出的问题和解决方案）。

其中 f(t) 是以毫克每升为单位的浓度，t 是以小时为单位的时间，且 t > 0

在 t 浓度图中绘制该函数。

读取最大浓度和相应的时间。

2B.19

含有 10 万个细菌的簇呈指数增长，细菌数量在 45 分钟内增加两倍。

确定增长方程。

3小时后有多少细菌？

2B.20

pH 值定义为“质子/氢离子浓度的负 log10”，描述了化学溶液的酸度： $pH = -log[H^+]$

括号表示“浓度”，浓度单位为摩尔每升。

以下物质的 pH 值是多少：

$[H^+] = 1 \cdot 10^{-7}$ $[H^+] = 1 \cdot 10^{-10}$

$[H^+] = 1 \cdot 10^{-3}$ $[H^+] = 3 \cdot 10^{-5}$

2B.21

pH 值定义为“质子/氢离子浓度的负 log10”，描述了化学溶液的酸度： $pH = -log[H^+]$

括号表示“浓度”，浓度单位为摩尔每升。

pH = 7 是中性的

正常清洁雨水的 pH 值约为 5.5。这是弱酸性还是弱碱性？

氢离子的浓度大约是多少？

2B.22

石灰岩丰富地区的地下水通常呈弱碱性，例如 pH = 7.8

氢离子的浓度大约是多少？

第 3 部分。

微分与整合 – 练习

A 部分 – 传统数学问题

3A.001

使用微分系数（=导数）的符号对函数进行微分，例如 $\frac{d}{dx}f(x)$

$f(x) = -x^2 + 4x - 2$ $\qquad$ $g(x) = 8x^2 + x$

$h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 8$ $\qquad$ $i(x) = 8x^2 - 1$

3A.002

使用快速表示法对函数进行微分，例如导数的 f′(x)（= 微分系数）：

$f(x) = 4x^2 + 2$ $\qquad$ $f(x) = -6x^2 - x$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ $\qquad$ $f(x) = -3x^2 - 1$

并确定函数的 f(1) 和 f′(1)。

这里我们将所有函数称为 f，尽管它们不同。

3A.003

求函数切线斜率的方程

$f(x) = -\frac{1}{4}x^2$

求出经过点(2, -1)的切线方程并画出草图。

3A.004

给定函数 $f(x) = 3x^2$

求斜率 = 2 的切线方程

3A.005

给定函数 $f(x) = x^{½}$

求正切方程，其中 x = 9

3A.006

区分函数/表达式

$f(x) = 4x^2 + x^{½}$

$f(x) = x^{½} + 4x - 9$

$f(x) = x^{½}(x^{½} - 6)$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 8$

3A.007

求经过 P(0, 0) 和 Q(4, 4) 的抛物线，并且 Q 点的切线斜率 = 3。

3A.008

$y = x^3 - 12x + 1$　在哪里有水平切线？

3A.009

我们有两个函数

$f(x) = x^2$　　　　$g(x) = x^{½}$　*为了*$x \geq 0$

在图表中绘制两条曲线并读取交点。

计算交点。

3A.010

抛物线　$f(x) = x^2 - 4x + 4$　与 x 轴和 y 轴相交在哪里？

求交点处切线的方程。

3A.011

我们有一条抛物线　$f(x) = x^2$

求通过点 P(1, −8) 的两条切线的方程

3A.012

确定　$f(x) = \frac{\mathrm{x}}{x+1}$　的定义域

找到函数的水平切线并绘制草图作为对照。

3A.013

函数　$y = 3x^2 - 4$　　有水平切线吗？

如果是，是最大值还是最小值？

3A.014

在图表中画出 k = 3 时的函数 $x \cdot y = k$

共享曲线称为双曲线。

从图中推断曲线是否有切线或渐近线。

在接下来的问题中，我们将详细考虑这一点。

3A.015

函数　$x \cdot y = \mathrm{k}$　有水平切线吗？

3A.016

函数　$x \cdot y = \mathrm{k}$　是否有水平渐近线？

3A.017

函数　$x \cdot y = \mathrm{k}$　有垂直切线吗？

3A.018

函数　$x \cdot y = \mathrm{k}$　是否有垂直渐近线？

3A.019

函数 $f(x) = (x^2 - 3x + 3)^{\frac{1}{3}}$ 有水平切线吗？

3A.020

复合函数的微分：

$f(x) = (4x-2)^3$ $g(x) = (2x-2)^{½}$ $h(x) = (x^3 + x^2)^{½}$

$i(x) = (e^x - 3x)^5$ $j(x) = (5^x + 2)^{-3}$ $k(x) = xe^x$

3A.021

区分函数：

$f(x) = e^{3x}$ $g(x) = 3^x$ $h(x) = e^{3x+2}$

$i(x) = -7e^{2x}$ $j(x) = ln(4x^3 + x^2)$ $k(x) = x^2e^x$

3A.022

区分函数：

$y = ln\, x$ $y = \frac{1}{x}$ $y = \frac{ln\,\mathrm{x}}{x^2}$ $y = \frac{x^2}{lnx}$

3A.023

求 $f(x) = 4ln\, x - (lnx)^4$ 且 x>0 与 x 轴相交的点。

函数在哪里有最大值？

画一个草图来检查。

3A.024

使用快速表示法对函数进行微分，例如导数的 f´(x)（= 微分系数）：

$f(x) = \sin x - \cos x$ $\qquad$ $g(x) = 4\cos x + 2x - 8$

$h(x) = \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$ $\qquad$ $i(x) = 4\tan x + 2$

3A.025

现在我们将所有函数称为 y。这个不是很具体，但是如果不能被误解的话是允许的。

使用实际微分系数 $\frac{dy}{dx}$ 的符号对函数进行微分

$y = \cos 2x$ $\qquad$ $y = sin\frac{1}{x}$ $\qquad$ $y = sin(x^2 + x)$

$y = (\sin x)^4$ $\qquad$ $y = sin\, x^4$ $\qquad$ $y = 2(\tan x)^2$

3A.026

区分函数：

$y = sin\, x \cdot sin\, x$ $\qquad$ $y = (cos\, x)^2$

$y = 2sin\, x - \frac{1}{2}cos\, x$ $\qquad$ $y = 3tanx + 4$

3A.027

我们有一个正弦振荡 $\qquad$ $f(t) = 1.5 \cdot \sin(2t + 3) + 0.5$

并想确定最大值。和分钟。函数和范围，使用两种不同的方法。

最后，画一个草图来检查。

3A.028

我们找到了函数/曲线的一个（仅一个）极值点。

考虑如何在不画草图的情况下确定它是最大值还是最小值。

3A.029

我们找到了函数/曲线的一个点，其中 $y' = 0$

考虑如何在不绘制精细图表的情况下确定它是最大值、最小值还是暂停

3A.030

函数 $y = 2x^2$ 在（0, 0）处有极值，但它是最大值还是最小值？

使用二阶导数求解，然后绘制曲线。

3A.031

函数 $y = -2x^2$ 在（0, 0）处有极值，但它是最大值还是最小值？

使用二阶导数求解，然后绘制曲线。

3A.032

整合之前微分的功能：

$f'(x) = 4x + 1$ $\quad$ $g'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$h'(x) = -x - \frac{4}{x^2}$ $\quad$ $i'(x) = 4x^{-5}$

$j'(x) = \frac{1}{x^{½}}$ 和 $x > 0$ $\quad$ $k'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 和 $x > 0$

3A.033

积分求基函数：

$f(x) = 0$ $\quad$ $g(x) = 1$ $\quad$ $h(x) = 2\pi$

$i(x) = \frac{5}{x^{½}}$ 和 $x > 0$ $\quad$ $j(x) = 8x^3 + 6x^{-4} - \frac{6}{x^6}$

$k(x) = 2e^x$

3A.034

整合之前微分的功能：

$f'(x) = 2x - 9$ $\quad$ $g'(x) = x^{-6} - \frac{1}{x}$ $\quad$ $h'(x) = 15^x$

3A.035

积分求基函数：

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ $\quad$ $g(x) = (2x + 3)^2$ $\quad$ $h(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

3A.036

我们有以下功能

$f(x) = 2x + 3$ $\qquad g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ $\qquad h(x) = 4x^3 + 2x$

找到基函数，遍历点 (2,0)

3A.037

我们有一个函数 $\quad f(x) = x^{-2}$ 和 $x > 0$

已知 F(16) = 16 求 F(x)

3A.038

我们有这个功能 $\quad f(x) = 4x^3 + 9x^2 + 4x - 1$

求经过点(1, 8)的基函数

3A.039

证明 $\quad F(x) = x + \sin x \cdot \cos x$ 是 $\quad f(x) = 2(\cos x)^2$

3A.040

通过替换计算积分

$\int (2x-3)^3 \, dx$ $\qquad \int x(4x^2-1)^4 \, dx$

3A.041

使用分部积分计算积分

$\int \sin 2x \cdot x \ dx$ $\int sin\, x \cdot x^2\, dx$

在第二个积分中，您可以考虑进行两次部分积分。

3A.042

计算具体积分

$\int_0^2 (3x^2 - 6x + 2)\, dx$ $\int_0^2 (x^2 + 1)\, dx$

3A.043

计算具体积分

$\int_0^5 (y^2 - 2y)\, dy$ $\int_0^\pi \sin u\, du$

3A.044

计算具体积分

$\int_0^1 (x^2 + 1)x^{½}\, dx$ 和 $x \geq 0$ $\int_0^\pi (sin\, x + x)\, dx$

3A.045

计算具体积分

$\int_0^2 (3x^2 - 6x + 2)\, dx$ $\int_0^2 (x^2 + 1)\, dx$

3A.046

计算具体积分

$\int_0^1 (x^2+1)x^{½}\,dx$ 和 $x > 0$

$\int_0^{\pi} (\sin x + x)\,dx$

3A.047

计算具体积分

$\int_{-½}^{0} (y+1)^2\,dy$

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(6-3y)^2}\,dy$

3A.048

计算具体积分

$\int_{-2}^{-1} (y+1)^2\,dy$

$\int_{-2}^{-1} (y+1)^2\,dx$

3A.049

计算具体积分 $\int_0^{\pi} (\sin\frac{x}{2} + \cos 2x)\,dx$

（最终通过分成两个单独的积分，然后使用替换）。

3A.050

计算具体积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin x)\cdot \cos x\,dx$

3A.051

计算具体积分 $\int_0^{\pi} (1+x)\cdot \cos x\,dx$

3A.052

计算具体积分 $\int_1^2 x^3 \cdot ln\, x \; dx$ 和 $x > 0$

3A.053

计算具体积分 $\int_1^2 x(x-1)^4 \, dx$

3A.054

计算具体积分 $\int_1^9 \frac{ln\, x}{\sqrt{x}} \, dx$ 和 $x > 0$

3A.055

计算具体积分 $\int_1^4 \frac{3^{x^{½}}}{x^{½}} \, dx$ 和 $x > 0$

3A.056

找一个在 $\int_0^a (2y+4) \, dy = 0$ $\int_0^a (-6y+2) \, dy = 0$

3A.057

找一个在 $\int_1^2 ax \, dx = 10$

3A.058

找一个在 $\int_1^a \sin t \, dt = 1$ 持续一段时间。 （a 是弧度角）

在图中画出函数的一个周期。如果积分描述了一个区域，那么该区域将放置在图中的什么位置？

3A.059

函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{4}x + 1$ 和 $g(x) = \frac{3}{4}x + 1$

相交并形成两个区域。求这两个面积的总和并画出草图。

3A.060

计算 x 轴和函数之间的面积

$y = 1 - x^2$

3A.061

计算直线 y = 1 和函数之间的面积

$y = -x^2 + 5x + 1$

首先制作草图。

3A.062

绘制草图并计算之间的面积

x = 0 x = 4 y = 0 y = 6 $y = \frac{1}{3}x^2 + 3$

3A.063

我们考虑正弦函数 $y = \sin x$

绘制草图并计算曲线与 x 轴之间的面积　$x = 0$　和　$x = \frac{\pi}{4}$

然后找到 x = a 将该区域划分为两个大小相等的较小区域的值。

3A.064

我们有一个函数　　$y = x^4$　和　$x \geq 0$

确定反函数。

在第一象限中绘制两个函数的草图并找到曲线之间的面积。

最后，找到绕 x 轴旋转的该区域的体积。

3A.065

抛物线　$y = x^2 + 2$　和 x 轴之间形成一个区域，其中 x 从 −1 到 2

计算绕 x 轴旋转的该区域的体积。

3A.066

计算绕 y 轴旋转时的体积：

$y = \frac{1}{3}x$　　　　x 从 2 到 4

$y = \sqrt{x} = x^{½}$　　　　x 从 0 到 1

3A.067

计算绕 y 轴旋转时的体积：

$y = x^{-\frac{3}{2}}$ x 从 2 到 4

3A.068

计算旋转两条曲线/函数之间的面积时的体积

$f(x) = 2x^2$ 和 $g(x) = 2x$ 绕 y 轴。

3A.069

计算旋转第一象限中两条曲线/函数之间的面积时的体积

$f(x) = x^2 + 2$ 和 $g(x) = x + 4$ 绕 y 轴。

3A.070

一条线段在坐标为（20, 50）和（40, 50）的两点之间延伸。线段绕 x 轴旋转以形成平带的中心/中性部分。

沿中性线的皮带表面积是多少？

皮带的厚度是3。横截面积是多少？

皮带由橡胶制成。橡胶的体积是多少？

3A.071

r = 8 且 R = 80 的环形（甜甜圈）形状 O 形圈的体积是多少？

3A.072

函数中从 x = 0 到 x = 2 的曲线有多长：

$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

3A.073

函数中从 x = 0 到 x = 2 的曲线有多长

$y = x^2$ 通过 CAS 求解。

3A.074

函数中从 x = 0 到 x = 2 的曲线有多长

$y = \sin x$ 通过 CAS 求解。

3A.075

从中查找 y $\frac{dy}{dx} = 2y$ 不要使用“定理 0”

然后从中找到 y $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{8}y$ 不要使用“定理 0”

3A.076

从 $\frac{dy}{dx} = x^2$ 中找到 y，并确定 x = 2 和 y = 3 时的 c

3A.077

求 $\frac{dy}{dx} - y = 2$ 中 y 的不确定解

然后找到经过点（x, y）=（10, -2）的函数/曲线的具体解

3A.078

求 $\frac{dy}{dx} - 3y = -2$ 中 y 的不确定解

然后找到经过点（x, y）=（ln 4, -2/3 ）的函数/曲线的具体解

3A.079

求 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{4} - 6 = 0$ 中 y 的不确定解

然后找到经过点（x, y）=（ln 2, ln 3）的函数/曲线的具体解

在某些时候使用十进制数来简化是被接受的。

3A.080

求 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{4} - 6 = 0$ 中 y 的不确定解

然后找到经过点（x, y）=（ln 16, ln e）的函数/曲线的具体解

在某些时候使用十进制数来简化是被接受的。

3A.081

使用“定理 0”从 $\frac{dy}{dx} = 2y$ 求 y

3A.082

利用“定理0”从 $\frac{dy}{dx} = y^2$ 求出y，并通过将解代入原方程进行控制 $(\frac{dy}{dx} = y^2)$

然后由CAS控制。

3A.083

不确定地求解 $y' = -2y + 2e^x$，

然后专门针对（x, y）=（0, 0）

3A.084

找到 y 在 $y' = xy + x$

3A.085

找到 y 在 $y' = xy$

3A.086

预计一个国家公园可成为200只驼鹿的栖息地。释放 20 只驼鹿，预计增长呈逻辑增长，比例常数为 0.001。

找到该函数并计算公园中预计出现 50 只、100 只和 199 只驼鹿的时间。

3A.087

微分方程： $y' = y + 2x$ *1.*

有完整/不确定的解决方案：

$y = -2x - 2 + ce^{x}$ *2.*

使用高级 CAS 来显示该微分方程（1.）的流场（= 可能解的调查）

使用解出的方程（2.）指出同一图表中 c = 0 的解曲线 - 或者（如果您没有合适的 CAS）只需解释它所在的位置。

3A.088

求函数 $z = x^2 + y^3$ 中 z 如何随 x 变化

（即求导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ ）

然后求 $\frac{\partial z}{\partial y}$

使用 CAS 绘制函数草图并阅读以进行检查。

3A.089

我们有一个函数 $z = \frac{4}{3}x^3 + y - x - y^{½}$ 且 y⩾0

求导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

对于哪些 x 和 y 值是 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ ？使用 CAS 在 3D 图中绘制函数草图并进行比较。

3A.090

我们有一个函数 $x - y = \frac{x}{z}$ 且 z⩾0

当 y 改变时 z 如何改变？

3A.091

我们有一个函数 $z = \cos(xy)$

当 y 改变时 z 如何改变？

3A.092

我们有一个 3D 函数 $z = 2x^2 + 3y^2$

求 x 方向斜率和 y 方向斜率的表达式。

找到 x = 1 和 y = 5 的 z 坐标，并将所有三个坐标写为（x, y, z）=…。

求该点的梯度及其大小。

3A.093

我们有一个 3D 函数 $z = \sin x - \cos y$

求 x 方向斜率和 y 方向斜率的表达式。

找到 $x = \frac{\pi}{2}$ 和 $y = \frac{\pi}{4}$ 的 z 坐标，并将所有三个坐标写为（x, y, z）=…。

求该点的梯度及其大小。

3A.094

使用CAS显示函数　$f(x,y) = z = x^3 - 5y^2$

以及 $f(x,y) = z = x^3 - 5y^2$ 的水平曲线

3A.095

函数　$f(x,y) = z = x^2 + y^2$　在点（0, 0, 0）处有极值，但它是最大值还是最小值？

使用二阶导数求解 - 然后使用 CAS 绘制曲线。

3A.096

函数　$f(x,y) = z = -x^2 - y^2$　在点（0, 0, 0）处有极值，但它是最大值还是最小值？

使用二阶导数求解 - 然后使用 CAS 绘制曲线。

第 3 部分：微分与积分 – 练习

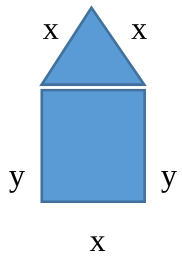
B 部分 – 应用数学问题

3B.001

特殊建筑的窗户形状

周长是多少？

面积是多少？

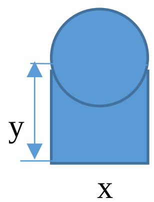


求周长为 10 米时的最大面积的 x 和 y。

3B.002

老建筑的窗户是形状的

以半圆作为顶框。



求周长为 10 米时的最大面积的 x 和 y。

3B.003

生产某种产品的费用估计为：

$E = 9000 + 50x + x^2$ 对于 $1 \leq x \leq 400$

其中 x 是商品数量，E 是费用（以磅为单位）。

等式的哪一部分描述了固定成本？

等式的哪一部分描述了可变成本？

找出表达每件商品费用的方程式。

将每件物品的费用绘制为物品数量的函数。

3B.004

生产某种产品的费用估计为：

$E = 9000 + 50x + x^2$ 对于 $1 \leq x \leq 400$

其中 x 是商品数量，E 是费用（以磅为单位）。

找出表达每件商品费用的方程式。

通过计算确定每件费用最小的物品数量x。

接受出售商品编号。 400无利润。这对应于哪个销售价格？

3B.005

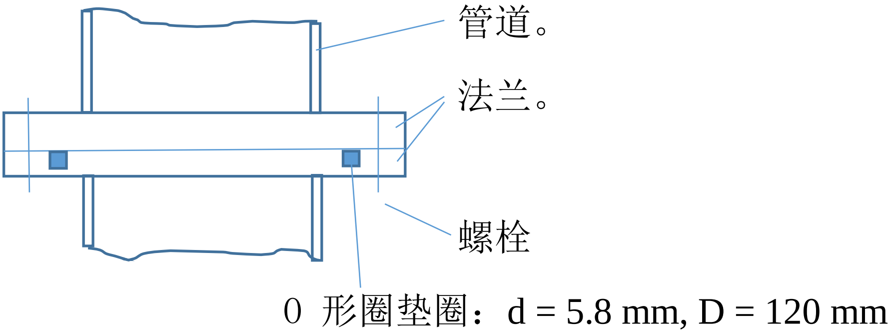
卷轴的中心半径 r = 40 mm，边缘半径 R = 400 mm。薄膜胶带厚度为 0.2 毫米。

卷轴可以有多少米的薄膜胶带？

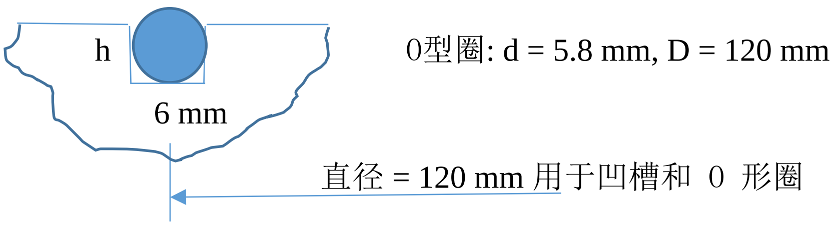
首先通过标准数学求解。然后，虽然很困难，但尝试用积分来解决。

3B.006

水管上的法兰组件通过 O 形圈垫圈夹紧到矩形圆形凹槽中进行密封：



装配前凹槽和0型圈的详细横截面：



凹槽的宽度乘以高度为 6 · h

0型圈中心线直径D = 120mm

0形圈的体积应为凹槽体积的98%。

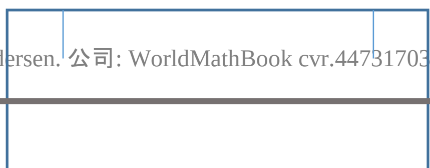
确定凹槽的高度 h。

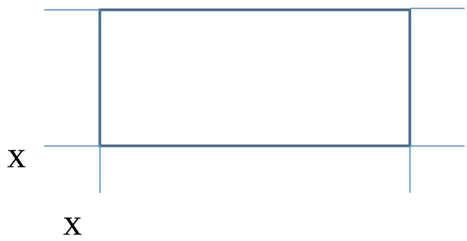
3B.007

矩形托盘由钢板制成：

长度乘以宽度 = 450 毫米 • 300 毫米

四个角处切去相等的正方形，将边折叠并焊接。





找到给出最大托盘的 x。

3B.008

生产一个带盖的 2 升圆柱形油漆桶时，将使用尽可能少的塑料。

什么高度和直径可以满足这个要求?

桶的表面积是多少? （忽略板厚）。

3B.009

船舶螺旋桨的轮毂（即没有螺旋桨叶片）的形状为抛物线盘。从底部到顶点的高度为 5 dm（分米），底部直径为 4 dm。底座中央有一个圆柱形孔，用于与轴组装。该孔的直径为 1.2 dm，深度为 2.5 dm。

轮毂的体积是多少?

螺旋桨由青铜制成，密度为每立方米 8800公斤。

求轮毂的质量。

3B.010

某种化学反应的反应速率与物质的量（质量）M成正比。

写出微分方程来描述该反应。

测量开始时（时间 = 0）M_0 = 90 毫克，60 分钟后 M_{60} = 20 毫克。

求解关于 M 的微分方程。

3B.011

另一种化学反应的反应速率与物质的量（质量）的2次方M^2成正比。

写出微分方程来描述该反应。

测量开始时（时间 = 0）M_0 = 90 毫克，40 分钟后 M_{40} = 20 毫克。

求解关于 M 的微分方程。

3B.012

第三种特定化学反应的反应速率与物质的量（质量）的3次方M^3成正比。

写出微分方程来描述该反应。

测量开始时（时间 = 0）M_0 = 90 毫克，20 分钟后 M_{20} = 20 毫克。

求解关于 M 的微分方程。

3B.013

放射性物质的自然衰变遵循微分方程

$\frac{dM}{dt} = -kM$ 其中 M 是放射性物质的质量，t 是时间。

一具名为格劳巴勒人（Grauballe Man）的木乃伊在死亡时将碳 14 含量设置为 100%，即 1。今天是 76%，即 0.76。
C-14 的减半时间是 5730年。

他什么时候死了？

3B.014

$\frac{dh}{dt} = 0.17 \cdot h$ 是某种草类生长的简化模型。它适用于夏季和正常降雨，高度为 h = 3 厘米至 9 厘米。 t 是以天为单位的时间。

从 h = 3 厘米长到 h = 9 厘米需要多长时间？

它可以通过确定 c 来不确定地求解， - 或者可以通过使用极限来确定地求解。

3B.015

患者血液中某种药物的浓度建模为 $f(t) = 0.3 \cdot t \cdot e^{-1.1t}$

其中 f(t) 是以毫克每升为单位的浓度，t 是以小时为单位的时间。

（方程/数据来自参考文献：www.studieportalen.dk 然而，作者提出的问题和解决方案）。

在图中画出该函数的草图。

计算最大时间和浓度。

3B.016

火箭发射微分方程

$\frac{dv}{dt} - \frac{1}{15-t}v = \frac{300}{15-t} - 9.81$　　对于 0≤t≤14 秒

（方程/数据来自参考文献：www.studieportalen.dk 然而，作者提出的问题和解决方案）。

课本上提到，14秒后我们发现了一个速度：v=3101米每秒。

这 14 秒内的平均加速度是多少？

这与地球上的引力加速度（g ≈ 9.81 m/s2）相比是多少？

你觉得这个男人能受得了吗？

这枚火箭是仅供载人使用还是供设备使用？

3B.017

种植某种作物可以建模为

$\frac{dM}{dx} = 0.000369 \cdot M(15.5 - M)$　　对于 0≤x≤1000

（方程/数据来自参考文献：www.studieportalen.dk 然而，作者提出的问题和解决方案）。

其中 M 是产量（吨），x 是肥料用量（公斤）。据了解，产量13.1吨需要化肥400公斤。

求 M(x) 的方程。

1吨的售价为100英镑，1公斤肥料的售价为0.28英镑。

找到利润的表达式/方程。

将利润绘制为 x 的函数。

读取最大利润的近似 x 值。

3B.018

某条鱼的长度可以建模为

$$\frac{dL}{dt} = k(100 - L)$$

（方程/数据来自参考文献：www.studieportalen.dk 然而，作者提出的问题和解决方案）。

其中 L 是以厘米为单位的长度，t 是以年为单位的时间。

已知 t = 0 时 L = 0.4 cm，t = 1 时 L = 11 cm

一条鱼最长能长多长？

求 L(t)

通常，捕获的鱼的长度在 [40 ; ;] 区间内。 60]厘米 ([40 ; 60])。

对应的年龄区间是多少？

第 4 部分：向量 – 练习

A 部分 – 传统数学问题

4A.001

我们有两个向量 $\boldsymbol{a} = \binom{2}{3}$ $\boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$

绘制所得向量并找到其坐标

a + b **b + a** **a – b** **b - a**

4A.002

写 $\boldsymbol{a} = \binom{2}{3}$ 和 $\boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$

使用基向量 i 和 j – 并找到它们的长度。

4A.003

我们有两个向量 $\boldsymbol{a} = \binom{2}{3}$ $\boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$

将 a 乘以 4 并绘制结果。

将 b 乘以 -3 并绘制结果。

4A.004

绘制两个向量 a 和 b。

绘制向量草图：-3**a** 2**a** 2**a** - **b** 3**a** +2**b**

绘制 p 的草图，使得： **a + b + p = o** （零向量，什么都没有）

4A.005

我们有两个向量 $\boldsymbol{a} = \binom{2}{3}$ $\boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$

绘制均从 Origo 点开始的两个向量：(0, 0)

计算点积（标量积）。

计算它们之间的角度。

4A.006

我们有两个向量 $\boldsymbol{a} = \binom{2}{3}$ $\boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$

绘制均从 Origo 点开始的两个向量：(0, 0)

计算行列式。

计算它们之间的角度。

4A.007

我们有两个向量 $\boldsymbol{a} = \binom{2}{3}$ $\boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$

求由 a 和 b 展开的平行四边形和三角形的面积

4A.008

我们有两个向量 $\boldsymbol{a} = \binom{4}{6}$ $\boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$

绘制 a 投影到 b 上的草图。

求投影向量的坐标和长度。

4A.009

一条直线经过点 (4,7) 并具有方向向量 $\binom{1}{2}$

将直线写成向量形式。

直线的斜率是多少？它与 y 轴相交的位置是多少？

4A.010

我们有一条直线作为向量函数 $\binom{x}{y} = \binom{4}{7} + t\binom{1}{2}$

以两种传统形式编写函数：

$y = a(x - x_1) + y_1$ 和 $y = ax + b$

其中 a 是斜率，b 是 y（当 x = 0 时）

另外，使用法向量将函数写成向量形式：

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ 和 $ax + by + c = 0$

其中 a 和 b 是法向量的坐标。

4A.011

计算向量 $\boldsymbol{a} = \binom{-12}{-5}$ 方向上的单位向量及其交叉向量。

4A.012

检查三角形 ABC 与 A(-2,0) B(6,4) C(2,-3) 是否是直角。

4A.013

计算三角形 ABC 的角度，其中 A(3,1) B(1,-1) 和 C(-1,-2)

画出三角形。

4A.014

计算 $\boldsymbol{a} = \binom{6}{2}$ 在通过 A(5.7) 和 B(12,2) 的直线上的投影并绘制草图。

4A.015

求点 (10,10) 和直线之间的距离

$-2x + y + 1 = 0$

4A.016

求点 (-12,-8) 与直线之间的距离

$\binom{x}{y} = \binom{-4}{-4} + t\binom{2}{3}$

4A.017

使用基向量将点 P(5,5) 写为位置向量，然后写在极坐标中。

4A.018

使用基向量将点 Q(−5,−5) 写为位置向量，然后在极坐标中绘制草图。

4A.019

使用CAS画出向量函数 $\boldsymbol{r}(t)=\binom{x}{y}=\binom{t^2}{t^3-t}$

确定双点。

另外，使用十进制数确定具有垂直和水平切线的点。

4A.020

使用CAS画出向量函数 $\boldsymbol{r}(t)=\binom{x}{y}=\binom{t^3-t}{t}$

确定双点。

另外，使用十进制数确定具有垂直和水平切线的点。

4A.021

我们有两个 3D 向量 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

寻找： **a + b** **a – b** t · **a** |**a**|

4A.022

我们有两个 3D 向量 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

寻找： |**a**| |**b**| **a + b** |**a + b**| **a – b** |**a – b**|

2**b – a** |2**b – a**|

4A.023

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 26 \end{pmatrix}$ 正交吗？

4A.024

将点 (x, y, z) = (6, 4, -3) 写为带有坐标的位置向量 OP，并使用基向量：(i, j, k)

4A.025

找到 $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ 的相反向量并检查答案。

4A.026

我们有一个向量 $a = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 确定向量 -2a

4A.027

给定两个向量 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

求 t 使得 a 和 b 正交。

4A.028

给定两个向量 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} t \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} t \\ -2 \\ t \end{pmatrix}$

求 t 使得 a 和 b 正交。

4A.029

将向量 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ 拆分为 x、y、z 方向上的三个分量。

4A.030

三点在 3D 坐标系中形成一个三角形：

P(2, 4, -1) Q(-3, 6, 4) R(3, -2, -3)

边有多长，角的角度是多少？

4A.031

三点在 3D 坐标系中形成一个三角形：

P(3, 4, -1)　Q(-2, 6, 4)　R(4, -2, -3)

边长是多少？

找到三边的中点。

4A.032

写出经过点 P(2, −1, 4) 和 Q(−3 , 4, 7) 的直线的向量函数

4A.033

直线 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ 是否与 x、y 或 z 轴相交？

4A.034

点（3, −1, 7）是否位于直线上：$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

4A.035

点（−3, 1, −7）是否位于直线上：$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

4A.036

考虑两条 3D 线相交必须满足什么条件。

然后解决：

执行以下行 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$ 并

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 26 \\ -11 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix}$$ 相交吗？

如果是的话，在哪个坐标？

4A.037

考虑两条 3D 线相交必须满足什么条件。

然后解决：

执行以下行 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 并

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$ 相交吗？

如果是的话，在哪个坐标？

4A.038

一条线穿过点 A(-1, 3, 5) 和 B(3, t, 8)。一架飞机是

$x + 2y + 4z + 12 = 0$

确定 t，使穿过 A 和 B 的直线与平面平行。

4A.039

我们有两个平面，称为 α 和 β：

α: 4x - 8y + 6z = 2　　β: -5x - 10y - 10z = 2

平面是否平行？

它们与 z 轴相交的位置在哪里？

4A.040

写出三个平面 α，β，γ 的方程，其中

$\boldsymbol{n}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　　α 上的点是 (2, 2, 3)

$\boldsymbol{n}_{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$　　β 上的点是 (-2, -2, -3)

$\boldsymbol{n}_{\gamma} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$　　γ 上的点是 (6, 1, -2)

4A.041

我们有一个平面 α：　$2x - 5y + 4z = 2$

写出平面的法向量。

点（1，1，1）在平面上吗？

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 α 的法向量还是平行向量？

α 与轴相交在哪里？

4A.042

给定两个向量 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$

求 t 使得 a 和 b 正交。

4A.043

平面 α 具有三个已知点 A(1, -1, 2) B(0, 2, 0) C(4, 2, 1)

确定平面方程。

4A.044

平面 β 具有三个已知点 D(-1, 1, -2) E(0, -2, 0) F(-4, -2, -1)

确定平面方程。

点 (0, -2, 0) 在平面上吗？

4A.045

求三角形和平行四边形的面积，扩展为

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

4A.046

求有角点的三角形的面积

A(1, 1, 1)   B(1, 2, 3)   C(3, 1, 2)

4A.047

找到平面之间的角度

α: $3x + 3y - z + 4 = 0$ β: $3x + 4y + 2z - 4 = 0$

4A.048

找到直线之间的交点坐标

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ 且平面 $3x + 3y - z + 4 = 0$

4A.049

找到通过点 P(1, 2, 3) 和 Q(4, 5, 6) 的直线

然后求这条线与平面的夹角

$4x - y + 2z - 6 = 0$

4A.050

求通过点 (5,3,1) 并平行于平面 α 的平面 β：

α: $x + 3y - z - 5 = 0$

4A.051

求点 P(6, 0, 2) 到平面的距离

α: $6x+3y+2z=5$

4A.052

找到平面之间的锐角和钝角

α: $2x-3y+z=8$ β: $2x+y-4z=-8$

4A.053

求点 P(3, 7, 2) 到平面的距离

α: $3(x-1)+2(y+5)-2(z-2)=0$

4A.054

球体的中心位于（-9, 9, -11），半径 = 12。

平面 $2x+y+2z=5$ 是球体的切平面吗？

如果是这样，请确定接触点。

4A.055

求点（1, 1, 1）与通过点（2, 1, 2）和（3, 3, 3）的直线之间的距离

4A.056

求线之间的距离：

$l\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad m\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

4A.057

求两个平行平面之间的距离

$\alpha\colon\ x + 3y - z - 5 = 0$ $\qquad \beta\colon\ x + 3y - z - 10 = 0$

4A.058

一条线穿过点 P(1, 2, 3) 和 Q(4, 6, 8)

求直线的参数方程。

平面的方程为 $4(x-1) - 1(y-1) + 2(z-1) = 0$

求直线和平面之间的角度。

4A.059

我们有一个平面 $\alpha\colon\ 3x + 2y + z = 6$

找到三个轴的交点 A、B 和 C。

计算三角形 ABC 的面积。

将 Origo（点（0, 0, 0））投影到 α 上并找到坐标。

4A.060

我们有两个不平行的平面

α: $x + y + z = 0$ β: $2x + 3y - 2z = 3$

求交线的向量函数。

4A.061

我们有一架飞机 α: $3x + 12y - 4z = -6$

和一个球体 领域: $x^2 + y^2 + z^2 + 10z = -24$

求球体的中心 C 和半径 r。

求 C 到 α 的距离

求 C 在 α 上的投影

4A.062

我们有一个球体 $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 4z - 3 = 0$

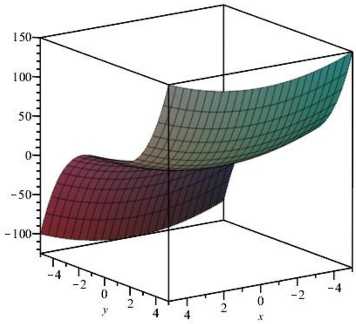
和一条线 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

求球体的中心 C 和半径 r。

使用十进制数找到直线与球面交点的两点 (Q_1 , Q_2)。

4A.063

我们有一个函数 $z = x^2 + y^3$ 它显示：

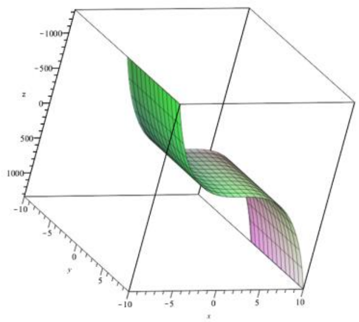


求点（0，5，125）的切平面方程

（该函数也在问题 3A.088 中使用，我们可以使用那里的导数 - 或者，当然，从头开始计算）。

4A.064

我们有一个函数 $z = \frac{4}{3}x^3 + y - x - y^{½}$ 且 $y \geq 0$



求点（9，4，965）的切平面方程

（该函数也在问题 3A.089 中使用，我们可以使用那里的导数——或者，当然，从头开始计算）。

第 4 部分：向量 – 练习

B 部分 – 应用数学问题

4B.01

房间里的墙壁有四个角 A、B、C、D。角 A 和 B 都是 90°。长度为 |AB| = 14 米，|BC| = 14 m，|CD| = 14.1 m。

|AD| 有多长？

C角和D角分别有多大？

4B.02

建筑物中的一面墙用向量 $\binom{0}{4000}$ 表示，另一面墙用向量 $\binom{800}{5}$ 表示

两堵墙之间的角度是多少？

4B.03

楼梯的底板是矩形的，由两个向量表示：

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}$ 长度以米为单位，z 是垂直的。

底板的面积有多大？

与水平线的夹角是多少？

4B.04

建筑物宽 6 m、长 7 m、高 5 m。

确定对角线与 **i**、**j**、**k** 方向上的三个边之间的角度。

4B.05

根据局部坐标系，铁路立交桥的下侧沿着通过点（90，90，8）的直线，并具有方向矢量 $\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$

乡村道路的顶部沿着通过点（60，70，3）的直线，并具有方向向量 $\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$。 z 方向是垂直的。

它们将在哪个（x，y）坐标处交叉？

交叉点的 z 距离是多少？

4B.06

根据局部坐标系，新铁路立交桥的下侧将沿着通过点（90，90，h）的直线，并具有方向矢量 $\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$

现有乡村道路的顶部沿着通过点（60，70，3）的直线，并具有方向向量 $\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$。 z 方向是垂直的。

确定交叉口垂直距离 5.5 米的 h。

4B.07

屋顶表面位于一个平面上，方程如下

$x + 0 \cdot y - \frac{3}{4}z = 0$

通风管道的中心线具有以下方程

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ z 垂直

管道中心线在哪一点与屋顶表面相交？

管道相对于水平面的角度是多少？

屋顶相对于水平面的角度是多少？

4B.08

一艘船正以每秒8米的速度向北航行。水中出现东西方向的水流，并在船上施加每秒 1 米的航速。

如果不更正：船的新速度和方向将是多少？

然后出现西北风，风速为每秒 2 米。如果也不修正的话，那么船的实际速度和方向会是多少？

4B.09

一架小型飞机以每秒80米的速度向南直飞。风向为东西向，飞机上的载流子速度为每秒 4 米。

如果不修正：飞机的新速度和方向是什么？

侧风的载体速度发生了变化，向西分量仍然是每秒 4 米，但现在向上分量是每秒 1 米。

如果这个也不修正，那么飞机的实际速度和方向会是多少？

如果不进行修正，飞机一分钟会升多远？

4B.010

如果我们将一个灯泡放在抛物面盘的焦点上，所有光束都会被镜像，从开口处以平行线射出。

如果我们沿着抛物线盘的中心线对其进行切片，我们就会得到一条具有相同焦点的抛物线。

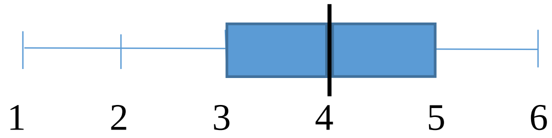
求抛物线的焦点：

$$y = 5x^2 \quad for \quad -0.15 \le x \le 0.15$$

（可能会制定一个计算计划，并绘制一个工作草图来解释）。

第 5 部分：统计 – 练习

5.01



阅读箱形图并确定最大观测值、最小观测值、

第一个四分位数、第二个四分位数、三个四分位数。

中位数是多少？

5.02

去年有 72 人参观了这样的剧院：

观察。 访问次数	观察次数
4	12
5	16
6	1
7	7
8	16
9	10
10	6
11	4
全部的：	*72*

添加列：

- 频率为一
- 频率百分比
- 累积频率百分比

制作一个棒状图表，第一个轴上显示访问次数，第二个轴上显示频率（百分比）。

确定该组的平均值和标准差。

5.03

该表显示了一组观察结果和相应的频率：

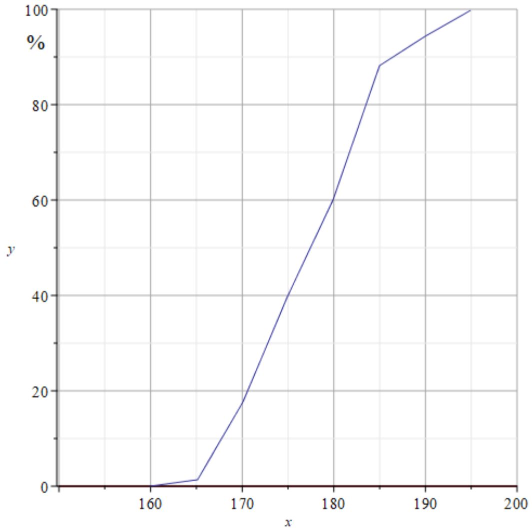
观察。	频率（%）
[0 ; 10]	0
]10 ; 20]	0
]20 ; 30]	10
]30 ; 40]	30
]40 ; 50]	20
]50 ; 60]	30
]60 ; 70]	10
全部的：	*100 %*

制作/绘制总和曲线。

读取四分位数集。

5.04

在足球俱乐部中，测量了少年男孩的身高（以厘米为单位）。结果如求和曲线所示：



读取四分位数集。

阅读 90% 分位数并解释它提供的信息。

区间]175 ; 180] 厘米是6人。总共测量了多少人？

5.05

在跑步比赛中测得：

观察。 完成时间（分钟）	人数 （累计）

35-40	7
40-50	276
50-60	1669
60-70	3210
70-80	4093
80-90	4492
90-120	4896
120-150	4974
150-180	5000

（所测量的系列是指 1977 年 5 月丹麦高中考试的一道旧题。但问题和答案均由作者提供）。

绘制第一轴为时间、第二轴为累积频率的总和曲线。

读取四分位数集。

制作第一个轴上的时间和第二个轴上的频率（百分比）的直方图。在图例中告知 10% 的跑步者对应的柱面积有多少。

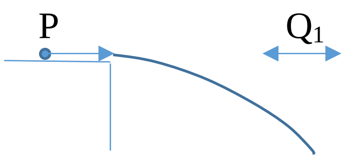
5.06

要求大量各种各样的人从 P 点用最大的力量水平踢足球。球落地的点 Q1 将根据每次踢球的力量而变化。参见图 1。

然后他们被要求用较小的力量踢球，但要足够大以使球能够通过边缘。参见图 2。

您的估计是多少：

- 所有点Q_1 的x 坐标是否服从正态分布？
- 所有点Q_2 的x 坐标是否服从正态分布？



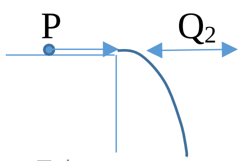


图1 图2

5.07

大厅（1）聚集了 120 人。据了解，现场有15人打羽毛球。

羽毛球运动员打球的频率是多少？

如果只问一个人，遇到羽毛球运动员的概率是多少？

另一个大厅（2）聚集了 120 人，其中 15 人是羽毛球运动员。

如果你问1号馆的1个人，然后2号馆的1个人，遇到2个羽毛球运动员的概率是多少？

5.08

一位唱片骑师想要播放两首民谣、三首迪斯科歌曲和四首摇滚歌曲，但她尚未决定播放顺序。有多少种组合？

5.09

1998 年，IPCC 组织估计了 2000 年至 2100 年大气中二氧化碳最有可能增加的曲线。阅读他们的曲线可以得出以下近似值：

年	2000	2020	2040	2060	2080	2100
二氧化碳浓度以 ppm	370	410	470	535	600	700

为单位。						

ppm 代表“百万分之一”。

通过指数回归确定函数并找出可靠性因子。

估计指数函数似乎合适吗?

（仅供参考，2020 年测量的二氧化碳浓度为 411.4 ppm）。

5.10

如果我们掷三次骰子，有多少种组合?

连续出现三个 6 的可能性有多大?

5.11

三个骰子上有多少个“眼睛”?

用一颗骰子掷出三分之六的可能性有多大?

5.12

必须在由 6 名成员组成的董事会中选举一名工头、副工头和候补工头。第一个选出的人成为工头，下一个成为副工头，第三个成为候补工头。这3个人可以通过多少种方式当选?

Liz 成为工头、Peter 成为副工头、Ann 成为候补工头的概率是多少?

5.13

必须在由 6 名成员组成的董事会中选举一名工头、副工头和候补工头。选举将显示 3 个人中谁担任 3 个职位 - 无论哪个职位。三人之间的决定被推迟到稍后。这3个人的选择有多少种可能？

莉兹和彼得、安当选的可能性有多大？

5.14

丹麦汽车登记号由 24 个字母表中的两个大写字母（28 个字母中的 4 个未使用）和 5 个密码组成。有多少种组合？

拥有数字 AB 12 345 的概率是多少？

5.15

驾校必须拥有三辆新车。经销商有六种型号可以使用。如果可以重复相同的组合，选车的可能性有多少种？

三款是去年的，卖家希望能卖掉。其概率是多少？

5.16

一个国家的三个州聚集在一起举办足球锦标赛。将举行 12 场比赛，并进行分配，以便最大的州 A 必须举行 5 场比赛，第二个州 B 必须举行 4 场比赛，州 C 必须举行 3 场比赛 - 但哪些场比赛呢？

5 张 A 钞票、4 张 B 钞票和 3 张 C 钞票放入罐子中。一共12个笔记。

前三场比赛将抽出三个音符。全部为 A 的概率是多少？

5.17 (继续)

三个音符显示为A、B、B，并且没有放回去。绘制了两个新音符。 B、C 的概率是多少？

5.18

在选举之前，1017 个人会被询问是否会投票给某个政党。
408 人说“是”，512 人说“否”，97 人说“不知道”。全体民众投票给该特定政党的 95% 的信心是多少？

5.19

未来的马术学校想知道学区内有多少人愿意骑马。他们要求分析机构进行一项研究，对结果有高度的信心。
住在那里大约。该地区有3万名10岁以上的人，并且已经有两所骑术学校。该研究所在 10 年间询问了 1500 人，并选择了置信度为 99% 的分析。此外，该研究所假设新的马术学校将吸引 25% 的兴趣者。

51 人回答“是”。

有多少人可能会去骑术学校？

复数

5.20

两个复数的极坐标形式为 $c=(5,\frac{\pi}{4})$ 和 $d=(3,\frac{\pi}{2})$ 。计算 $c\cdot d$ 和 $\frac{c}{d}$

转换为矩形形式（作为向量）并计算 $c \cdot d$ 和 $\frac{c}{d}$

5.21

两个复数以矩形形式表示为 $a = 3 + 4I$ 和 $b = -2 + 5I$ 。计算 $a \cdot b$ 和 $\frac{a}{b}$

转换为极坐标形式并计算 $a \cdot b$ 和 $\frac{a}{b}$

5.22

两个复数以矩形形式表示为 $a = 3 + I$ 和 $b = -2 - 2I$。计算 $a \cdot b$ 和 $\frac{a}{b}$

转换为极坐标形式并计算 $a \cdot b$ 和 $\frac{a}{b}$

在图表中将所有复数显示为向量。

5.23

我们有一个复数： $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + I\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$

将 z 写成指数形式。

计算 z^3 并以矩形形式给出答案。

第1部分。

A 部分 – 提议的解决方案

1A.001

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1} \\
119 \\
+\ 27 \\
\hline
\underline{\underline{146}}
\end{array}
$$

1A.002

$$
\begin{array}{r}
9003 \\
+\ 271 \\
\hline
\underline{\underline{9274}}
\end{array}
$$

1A.003

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1} \\
19.01 \\
+26.55 \\
\hline
\underline{\underline{45.56}}
\end{array}
$$

1A.004

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1} \\
19.01 \\
+357.014 \\
\hline
\underline{\underline{376.024}}
\end{array}
$$

1A.005

$$\begin{array}{r} \overset{1}{7}8 \\ +\ 101.01 \\ +\ \ \ 7.7803 \\ \hline 186.7903 \\ \hline\hline \end{array}$$

1A.006

$$\begin{array}{r} 228 \\ -\ 17 \\ \hline 211 \\ \hline\hline \end{array}$$

1A.007

$$\begin{array}{r} 2\cancel{2}\overset{10}{7} \\ -\ 18 \\ \hline 209 \\ \hline\hline \end{array}$$

1A.008

$$\begin{array}{r} 2\overset{10}{\cancel{2}}\overset{10}{\cancel{2}}.\overset{10}{0}0 \\ -\ 18.34 \\ \hline 208.66 \\ \hline\hline \end{array}$$

1A.009

$$\begin{array}{r} 916{,}07 \\ -\,805.00 \\ \hline \underline{\underline{111.07}} \end{array}$$

1A.010

$$\left.\begin{array}{r} 111 \\ -112 \end{array}\right\} \curvearrowright \left.\begin{array}{r} 112 \\ -111 \\ \hline 1 \end{array}\right\} \curvearrowright \underline{\underline{-1}}$$

1A.011

$$\left.\begin{array}{r} 27 \\ -318 \end{array}\right\} \curvearrowright \left.\begin{array}{r} \overset{2\;\;10}{\cancel{3}18} \\ -\,27 \\ \hline 291 \end{array}\right\} \curvearrowright \underline{\underline{-291}}$$

1A.012

$$\left.\begin{array}{r} 94.17 \\ -\,2016.40 \end{array}\right\} \curvearrowright \left.\begin{array}{r} \cancel{2}016.\cancel{4}0 \\ -\quad 94.17 \\ \hline 1922.23 \end{array}\right\} \curvearrowright \underline{\underline{-1922.23}}$$

1A.013

$$\left.\begin{array}{r} 11.10 \\ -2222.22 \end{array}\right\} \rightsquigarrow \left.\begin{array}{r} 2222.22 \\ -\ \ 11.10 \\ \hline 2211.12 \end{array}\right\} \rightsquigarrow \underline{\underline{-2211.12}}$$

1A.014

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 27 \\ \hline 21 \\ \underline{60} \\ \underline{\underline{81}} \end{array}$$

1A.015

$812 \cdot 694$

1388
6940
555200

563528

1A.016

$812 \cdot 694.03$

138806
694030
5552400

563552.36

1A.017

$812.99 \cdot 694.03$

624627
6246270
138806000
694030000
5552240000

564239.4497

1A.018

$$
\begin{array}{r}
2,22 \cdot 33,33 \\
\hline
6666 \\
66660 \\
666600 \\
\hline
73,9926 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

1A.019

$$
\begin{array}{r|l}
 & 14 \\
\hline
7 & 98 \\
 & \underline{7} \\
 & 28 \\
 & \underline{28} \\
 & 0
\end{array}
\qquad \underline{\underline{14}}
$$

1A.020

$$
\begin{array}{r|l}
 & 08 \\
\hline
12 & 96 \\
 & \underline{0} \\
 & 96 \\
 & \underline{96} \\
 & 0
\end{array}
\qquad \underline{\underline{8}}
$$

1A.021

$$
\begin{array}{r|l}
 & 12 \\
\hline
8 & 96 \\
 & 8 \\
\hline
 & 16 \\
 & 16 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad \underline{\underline{12}}
$$

1A.022

$$
\begin{array}{r|l}
 & 12.5 \\
\hline
8 & 100.0 \\
 & 8 \\
\hline
 & 20 \\
 & 16 \\
\hline
 & 40 \\
 & 40 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad \underline{\underline{12.5}}
$$

1A.023

$$
\begin{array}{r|l}
 & 12.625 \\
\hline
8 & 101.000 \\
 & \underline{8} \\
 & 21 \\
 & \underline{16} \\
 & 50 \\
 & \underline{48} \\
 & 20 \\
 & \underline{16} \\
 & 40 \\
 & \underline{40} \\
 & 0
\end{array}
\qquad
\underline{\underline{12.625}}
$$

1A.024

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1.5833\ldots \\
\hline
12 & 19.0000 \\
 & \underline{12} \\
 & 70 \\
 & \underline{60} \\
 & 100 \\
 & \underline{96} \\
 & 40 \\
 & \underline{36} \\
 & 40 \\
 & \underline{36} \\
 & 4
\end{array}
\qquad
\underline{\underline{1.5833\ldots}}
$$

1A.025

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.125 \\
\hline
96 & 12.000 \\
 & \underline{0} \\
 & 12\,0 \\
 & \underline{9\,6} \\
 & 2\,40 \\
 & \underline{1\,92} \\
 & 480 \\
 & \underline{480} \\
 & 0
\end{array}
\qquad \underline{\underline{0.125}}
$$

1A.026

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.12371\ldots \\
\hline
97 & 12.00000 \\
 & \underline{0} \\
 & 120 \\
 & \underline{97} \\
 & 230 \\
 & \underline{194} \\
 & 360 \\
 & \underline{291} \\
 & 690 \\
 & \underline{679} \\
 & 110 \\
 & \vdots
\end{array}
\qquad \underline{\underline{0.12371\ldots}}
$$

1A.027

$\frac{9}{33} = \frac{3}{11}$

$\frac{112}{84} = \frac{56}{42} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$

$\frac{-52}{65} = \frac{-4}{5}$

$\frac{12}{160} = \frac{6}{80} = \frac{3}{40}$

$\frac{165}{-33} = -5$

$\frac{21}{238} = \frac{3}{34}$

$\frac{437}{769} = \frac{23}{40}$ 除以 19

$\frac{242}{550} = \frac{121}{275} = \frac{11}{25}$

$\frac{910}{13013} = \frac{70}{1001} = \frac{10}{143}$ 先除以 13，然后除以 7

1A.028

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$

$\frac{2}{7} \cdot \frac{9}{3} = \frac{2 \cdot 9}{7 \cdot 3} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$

$\frac{1.2}{2} \cdot \frac{2}{1.2} = \frac{1.2 \cdot 2}{2 \cdot 1.2} = 1$

$\frac{1.2}{2} \cdot \frac{3}{1.2} = \frac{3}{2} (= 1.5)$

1A.029

$\frac{4}{\mathbf{8}} = \frac{20}{40}$

$\frac{6}{\mathbf{10}} = \frac{3}{5}$

$\frac{7}{12} = \frac{14}{\mathbf{24}}$

$\frac{\mathbf{-56}}{48} = \frac{-7}{6}$

$\frac{6}{7} = \frac{\mathbf{24}}{28}$

$\frac{-6}{26} = \frac{6}{\mathbf{-26}}$

1A.030

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{-3}{5} \cdot \frac{2}{1.5} = \frac{3 \cdot (-3) \cdot 2}{4 \cdot 5 \cdot 1.5} = \frac{-18}{30} = \frac{-9}{15} = \frac{-3}{5}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{-3}{5} \cdot \frac{-2}{1.5} = \frac{3 \cdot (-3) \cdot (-2)}{4 \cdot 5 \cdot 1.5} = \frac{18}{30} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$24 \cdot \frac{7}{8} = \frac{24 \cdot 7}{8} = 21$$

$$-24 \cdot \frac{7}{8} = \frac{(-24) \cdot 7}{8} = -21$$

$$24 \cdot \frac{-7}{8} = \frac{24 \cdot (-7)}{8} = -21$$

$$24 \cdot \frac{7}{-8} = \frac{24 \cdot 7}{-8} = -21$$

$$-\frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 7 = \frac{(-3) \cdot 2 \cdot 7}{4} = \frac{-42}{4} = \frac{-21}{2}$$

1A.031

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{1} = 2$$

$$\frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{1} = 1$$

$$\frac{\frac{1}{7}}{\frac{7}{1}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{49}$$

$$\frac{\frac{1}{7}}{7}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{7}{1}}=\frac{1}{7\cdot7}=\frac{1}{49}$$

$$\frac{\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}=\frac{1}{49}$$

$$\frac{\frac{11}{13}\cdot\frac{11}{14}}{\frac{13}{14}}=\frac{11}{13}\cdot\frac{11}{14}\cdot\frac{14}{13}=\frac{11\cdot11}{13\cdot13}=\frac{121}{169}$$

1A.032

$$\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{7}}{2-\frac{10}{4}}=\frac{\frac{14}{21}-\frac{3}{21}}{-\frac{2}{4}}=\frac{\frac{11}{21}}{-\frac{1}{2}}=\frac{11}{21}\cdot\frac{(-2)}{1}=-\frac{22}{21}$$

$$\frac{3-\frac{2}{7}}{4-\frac{5}{4}}=\frac{\frac{19}{7}}{\frac{11}{4}}=\frac{19}{7}\cdot\frac{4}{11}=\frac{76}{77}$$

$$\frac{\frac{2}{3}-3}{-6+\frac{1}{3}}=\frac{-\frac{7}{3}}{-\frac{17}{3}}=-\frac{7}{3}\cdot\frac{(-3)}{17}=\frac{7}{17}$$

$$\frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}=\frac{-\frac{4}{12}-\frac{3}{12}}{\frac{6}{30}-\frac{5}{30}}=\frac{-7}{12}\cdot\frac{30}{1}=-\frac{210}{12}=-\frac{55}{3}$$

$$\frac{\frac{4}{5}-\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}=\frac{\frac{24}{30}-\frac{25}{30}}{\frac{8}{12}-\frac{9}{12}}=\frac{-1}{30}\cdot\frac{(-12)}{1}=\frac{12}{30}=\frac{6}{15}$$

1A.033

$$\frac{3}{7}+\frac{3}{4}=\frac{3\cdot4}{7\cdot4}+\frac{3\cdot7}{4\cdot7}=\frac{12+21}{28}=\frac{33}{28}$$

$$\frac{5}{6}-\frac{2}{9}=\frac{5\cdot9}{6\cdot9}-\frac{2\cdot6}{9\cdot6}=\frac{45-12}{54}=\frac{33}{54}=\frac{11}{18}$$

$$-\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=-\frac{1\cdot6}{4\cdot6}+\frac{5\cdot4}{6\cdot4}=\frac{-6+20}{24}=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$$

1A.034

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}=\frac{1(a-b)}{(a+b)(a-b)}+\frac{1(a+b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{(a-b)+(a+b)}{(a+b)(a-b)}=$$
$$\frac{a-b+a+b}{a^2-b^2}=\frac{2a}{a^2-b^2}$$

1A.035

$$\frac{(-4)\cdot\frac{11}{7}}{-\frac{11}{7}}=(-4)\cdot\frac{11}{7}\cdot\left(-\frac{11}{7}\right)=4$$

$$\frac{(-3)\cdot\frac{9}{13}}{(-4)\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{2}}=(-3)\cdot\frac{9}{13}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{2}{1}=$$
$$\frac{(-3)\cdot9\cdot(-1)\cdot8\cdot2}{13\cdot4\cdot7\cdot1}=\frac{432}{364}=\frac{216}{182}=\frac{108}{91}$$

$$\frac{(-3)\cdot\frac{9}{13}+6\cdot\frac{9}{13}}{\frac{7}{9}}=\frac{\frac{-27}{13}+\frac{54}{13}}{\frac{7}{9}}=\frac{\frac{27}{13}}{\frac{7}{9}}=\frac{27}{13}\cdot\frac{9}{7}=\frac{243}{91}$$

1A.036

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{2}=\frac{\frac{3-2}{6}}{2}=\frac{1}{6\cdot 2}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{6-\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}+4}=\frac{\frac{24-1}{4}}{\frac{7+16}{4}}=\frac{23}{4}\cdot\frac{4}{23}=1$$

$$\frac{3-\frac{1}{3}}{\frac{15}{4}-2}=\frac{\frac{9-1}{3}}{\frac{15-8}{4}}=\frac{\frac{8}{3}}{\frac{7}{4}}=\frac{8}{3}\cdot\frac{4}{7}=\frac{32}{21}$$

$$\frac{\frac{8}{7}+\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}+\frac{16}{3}}=\frac{\frac{24-7}{21}}{\frac{21}{3}}=\frac{\frac{17}{21}}{7}=\frac{17}{147}$$

1A.037

$$\frac{1}{2}=0.5=50\% \qquad \frac{7}{8}=0.875=87.5\%$$

$$\frac{18}{12}=1.5=150\% \qquad \frac{1000}{25}=40=4000\%$$

$$\frac{5}{10}=0.5=50\% \qquad \frac{10}{5}=2=200\%$$

1A.038

$$\frac{35}{140}=\frac{1}{4}=0.25=25\%$$

$$\frac{35}{70}=\frac{1}{2}=0.5=50\%$$

$$\frac{35}{175}=\frac{1}{5}=0.2=20\%$$

1A.039

$100\% = \frac{100}{100} = \frac{1}{1} = 1$

$50\% = \frac{50}{100} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

$250\% = \frac{250}{100} = \frac{25}{10}$

$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

$5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

$2\% = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$

1A.040

结束减去开始： 60% - 50% = 10%

90% - 80% = 10%

40% - 50% = -10%

1A.041

- 降价： 结束减去开始 = 350 – 400 = -50

  相对于400： $\frac{-50}{400} = \frac{-12.5}{100} = -12.5\ \%$

- 降价： 结束减去开始 = 400 – 350 = 50

  相对于350: $\frac{50}{350} \approx \frac{14.3}{100} \approx 14.3\ \%$

1A.042

$x + x + x = 3\text{x}$

$x - x - x = -\text{x}$

$2x - x - x = 0$

$x \cdot y \cdot z = \text{xyz}$

$a + b - 2a = -\text{a} + \text{b} = \text{b} - \text{a}$

$a \cdot b - 2a = \text{ab} - 2\text{a}$

$4b - 13b = -9\text{b}$

1A.043

$\frac{3x}{x} = 3$

$\frac{3x}{y} = \frac{3x}{y}$

$\frac{3x+3y}{y} = \frac{3x}{y} + \frac{3y}{y} = \frac{3x}{y} + 3$

$\frac{3a}{b} + \frac{a}{2b} = \frac{6a}{2b} + \frac{a}{2b} = \frac{7a}{2b}$

$\frac{8b}{b} - \frac{8}{8} = 8 - 1 = 7$

1A.044

$\frac{4}{\mathbf{8}} = \frac{20}{40}$	$\frac{6}{\mathbf{10a}} = \frac{3}{5a}$	$\frac{7aa}{\mathbf{12a}} = \frac{14a}{24}$
$\frac{48}{\mathbf{-56}} = \frac{6}{-7}$	$\frac{6}{7c} = \frac{\mathbf{24c}}{28c^2}$	$\frac{26}{\mathbf{-6}} = \frac{-26}{6}$

1A.045

$x \cdot (2 - y) = 2x + xy$

$-4(x - y) = -4x + 4y$

$(3 - x) \cdot 3 = 9 - 3x$

$(7 - y)2 = 14 - 2y$

$3a(6 - a) = 18a - 3aa$

$2(2 - a)4 = 2(8 - 4a) = 16 - 8a$

1A.046

$4(7a + b) + 8(a + 3b) =$

$28a + 4b + 8a + 24b =$

$36a + 28b$

$6(d - 2e - f) + 2(d - e + 2f) =$

$6d - 12e - 6f + 2d - 2e + 4f =$

$8d - 14e - 2f$

$a(a - b) + b(a + b) =$

$aa - ab + ab + bb =$

$aa + bb$

1A.047

$14 - 7a = 7(2 - a)$

$4a + 8b = 4(a + 2b)$

$10a + 5b = 5(2a + b)$

$8 - 4x = 4(2 - x)$

$18x - 3xx = 3x(6 - x)$

$-6xy + 4x = 2x(-3y + 2)$

1A.048

$\frac{2x+2y}{4} = \frac{2x}{4} + \frac{2y}{4} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$

$\frac{3a-3b}{4} = \frac{3a}{4} - \frac{3b}{4}$

$\frac{3a-3b}{3} = \frac{a}{1} - \frac{b}{1} = a - b$

$\frac{3aa-3ab}{3a} = a - b$

$\frac{3a-3b}{\frac{1}{2}} = \frac{3a}{\frac{1}{2}} - \frac{3b}{\frac{1}{2}} = 3a \cdot \frac{2}{1} - 3b \cdot \frac{2}{1} = 6a - 6b$

1A.049

$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{9} = \frac{6\pi}{18} - \frac{3\pi}{18} + \frac{4\pi}{18} = \frac{6\pi-3\pi+4\pi}{18} = \frac{7\pi}{18}$

$\frac{2\pi}{4\pi} \cdot 8\pi - 5\pi = \frac{2 \cdot 8}{4} \cdot \pi - 5\pi = 4\pi - 5\pi = -\pi$

1A.050

$(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$

$(4+a-b)(a+b) = 4a + 4b - aa + ab - ab - bb$ *

$(2a+b)(b-3a)2 = 4ab - 12aa + 2bb - 6ab$

$(5a-5b)(5a+4b) = 25aa + 20ab - 25ab - 20bb$ *

*可能会进一步减少。

1A.051

$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

$(4x+1)^2 = 16x^2 + 1 + 8x$

$(\frac{1}{2}x+1)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 1 + x$

$(\mathrm{x}-5)^2 = x^2 + 25 - 10\mathrm{x}$

$(2x+2y)^2 = 4x^2 + 4\mathrm{y}^2 + 8xy$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(3a+1)(3a-1) = 9a^2 - 1$

$(3a+4b)(3a-4b) = 9a^2 - 16b^2$

1A.052

$x^2 + 4 - 4x = (x-2)^2$

$4 + x^2 - 4x = (2 - x)^2$

$9 - x^2 = (3 + x)(3 - x)$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$9a^2 + 4b^2 + 12ab = (3a + 2b)^2$

$4 + 36b^2 - 24b = (2 + 6b)^2$

1A.053

$(3x - 5y)^2 = 9x^2 + 25y^2 - 30xy$

$(1 - 2x)^2 = 1 + 4x^2 - 4x$

$(x - \frac{1}{2})^2 = x^2 + \frac{1}{4} - x$

$(-3 - 3x)(-3 + 3x) = 9 - 9x^2$

1A.054

$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$

$4b^2 + 1 - 2b = (2b - 1)^2$

$4^2 - b^2 = 16 - b^2 = (4 + b)(4 - b)$

$(3a)^2 - (4b)^2 = 9a^2 - 16b^2 = (3a + 4b)(3a - 4b)$

1A.055

$\frac{4a^2-9}{4a^2+9-12a} = \frac{(2a+3)(2a-3)}{(2a-3)^2} = \frac{2a+3}{2a-3}$

$$\frac{b^2+9+6b}{b^2+3b}=\frac{(b+3)(b+3)}{b(b+3)}=\frac{b+3}{b}$$

$$\frac{3c^2-12c+12}{5c^2-10c}=\frac{3(c^2-4c+4)}{5c^2-10c}=\frac{3(c-2)(c-2)}{5c(c-2)}=\frac{3(c-2)}{5c}$$

1A.056

$$\frac{4a^2-16a+16}{5a^2-10a}=\frac{4(a-2)(a-2)}{5a(a-2)}=\frac{4(a-2)}{5a}$$

$$\frac{9b^2-16c^2}{3a-4c}=\frac{(3b+4c)(3b-4c)}{3b-4c}=3b+4c$$

$$\frac{8b^2-18c^2}{2b+3c}=\frac{2(4b^2-9c^2)}{2b+3c}=\frac{2(2b+3c)(2b-3c)}{2b+3c}=2(2b-3c)=$$
$$4b-6c$$

1A.057

$x(x+1)+1=x^2+x+1$

$(1+x)x+1=x+x^2+1=x^2+x+1$

$x(x+2x)=x^2+2x^2$

1A.058

$x(x(x+1)+1)+1=$

$x(x^2+x+1)+1=$

x^3+x^2+x+1

1A.059

$x^3 + x^2 + x + 1 =$

$x(x^2 + x + 1) + 1 =$

$x(x(x + 1) + 1) + 1$

1A.060

$(x - 3)^2 + (x + 3)(x - 3) =$

$x^2 + 9 - 6x + x^2 - 9 =$

$2x^2 - 6x$

$(4x - 2)^2 - (2x + 2)^2 - 6x(x - 2) =$

$16x^2 + 4 - 16x - 4x^2 - 4 - 8x - 6x^2 + 12x =$

$6x^2 - 12x$

$(x + 1)^2 + (x - 1)^2 =$

$x^2 + 1 + 2x + x^2 + 1 - 2x =$

$2x^2 + 2$

$-(4x - 5)(4x + 5) + (3x + 2)^2 + 7x^2 =$

$-16x^2 + 25 + 9x^2 + 4 + 12x + 7x^2 =$

$12x + 29$

$(3x-2)^2-(3x+2)(3x-2)+3(3x+2)=$

$9x^2+4-12x-9x^2+4+9x+6=$

$-3x+14$

1A.061

$\sqrt{4}=2$ $\sqrt{16}=4$ $\sqrt{169}=13$

$\sqrt{0}=0$ $\sqrt{-4}=$ 没有解决方案

$\sqrt{-16}=$ 没有解决方案

1A.062

$\sqrt{0.64}=0.8$ $\sqrt{0.81}=0.9$ $\sqrt{\frac{36}{4}}=\sqrt{9}=3$

$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$ $\sqrt{\frac{-4}{-9}}=\frac{2}{3}$

1A.063

$\sqrt{2}=1.41..$ $\sqrt{3}=1.73..$ $\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$

$\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$ $\sqrt{2^2-4}=0$

$\sqrt{10^2-4\cdot 8\cdot 5}=$ 没有解决方案

1A.064

$\sqrt{10\cdot 10}=\sqrt{100}=10$ $\sqrt{10\cdot 10}=\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=10$

$\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6$ $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 6$

1A.065

$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ $\sqrt{\frac{121}{36}} = \frac{11}{6}$

$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$ $\sqrt{\frac{121}{36}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{36}} = \frac{11}{6}$

1A.066

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{4} = 4$ $\sqrt{4} + \sqrt{4} = 2\sqrt{4} = 4$ $\sqrt{4} - \sqrt{4} = 0$

$\sqrt{4} + \sqrt{16} = 2 + 4 = 6$ $\sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$

$\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$ $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$

1A.067

$\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} = 8$ $\sqrt{(-9)^2} = \sqrt{81} = 9$

$\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = a$ $\sqrt{(-ab)^2} = \sqrt{(ab)^2} = ab$

1A.068

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1$ $\sqrt{\frac{a}{a}} = 1$ $\sqrt{\frac{a}{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1$

$\sqrt{\frac{16x}{25y}} = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{4\sqrt{x}}{5\sqrt{y}}$

1A.069

$$10^3 \cdot 10^3 = 10^{3+3} = 10^6$$

$$10^2 \cdot 10^5 = 10^{2+5} = 10^7$$

$$10^{-2} \cdot 10^5 = 10^{-2+5} = 10^3$$

$$10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 10^1 = 10$$

$$10^{\frac{3}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = 10^{\frac{4}{2}} = 10^2 = 100$$

$$10^{-\frac{3}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}} = 10^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = 10^{-\frac{2}{2}} = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

1A.070

$$\frac{1}{10^{-1}} = 10^1 = 10$$

$$\frac{2}{10^{-4}} = 2 \cdot 10^4$$

$$\frac{10^2 \cdot 10^{-1}}{10^{-4}} = 10^2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^4 = 10^{2-1+4} = 10^5$$

$$\frac{10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-1}}{10^{-4} \cdot 10^3} = 10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^4 \cdot 10^{-3} = 10^5$$

$$\frac{10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-1}}{10^{-4} \cdot 10^3} = \frac{10^{3+2-1}}{10^{-4+3}} = \frac{10^4}{10^{-1}} = 10^4 \cdot 10^1 = 10^5$$

1A.071

$$\frac{10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-1}}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3}} = \frac{10^{3+2-1}}{2 \cdot 10^{-4-3}} = \frac{10^4}{2 \cdot 10^{-7}} = \frac{1}{2} \cdot 10^4 \cdot 10^7 = \frac{1}{2} \cdot 10^{11}$$

$$\frac{10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{-\frac{3}{2}} \cdot (10^4)^2}{10^2 \cdot 10^{-1}} = \frac{10^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+4\cdot 2}}{10^{2-1}} = \frac{10^7}{10^1} = 10^{7-1} = 10^6$$

1A.072

$$\frac{10^2 \cdot 10^{-5} \cdot 0.1}{\frac{1}{10} \cdot 10^{-4} \cdot 10^2} = \frac{10^2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-1}}{10^{-1} \cdot 10^{-4} \cdot 10^2} = \frac{10^{-4}}{10^{-3}} = 10^{-4} \cdot 10^3 = 10^{-1}$$

$$\frac{0.01 \cdot 0.1 \cdot \frac{2}{10}}{10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{3}{2}}} = \frac{10^{-2} \cdot 10^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-1}}{10^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{10^2} = 2 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{10^{11} \cdot 10^0 \cdot 10^{-3}}{0.2 \cdot 10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}}} = \frac{10^8}{0.2 \cdot 10^1} = \frac{10^7}{0.2} = \frac{1 \cdot 10^7}{0.2} = 5 \cdot 10^7$$

1A.073

$$\frac{1}{x^{-1}} = x^1 = x$$

$$\frac{2}{x^{-4}} = 2 \cdot x^4$$

$$\frac{x^2 \cdot x^{-1}}{x^{-4}} = x^2 \cdot x^{-1} \cdot x^4 = x^{2-1+4} = x^5$$

1A.074

$$5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

$$4 \cdot 2^{-5} = \frac{4}{2^5} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

$$2 \cdot (-2)^5 = -64$$

$$2 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 = -16 + 4 = -12$$

1A.075

$(2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216$

$((2 \cdot 3)^3)^2 = ((6)^3)^2 = 6^6 = 46\,656$

$\left(\left(\frac{10}{5}\right)^3\right)^2 = ((2)^3)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64$

$\left(\left(\frac{11}{5}\right)^3\right)^2 = \left(\frac{11}{5}\right)^6 = \frac{11^6}{5^6} \approx 113.37 \ldots.$ CAS 的最后一步

1A.076

$6^2 \cdot 6^3 = (6)^{2+3} = 6^5$

$4^6 \cdot 5^6 = (4 \cdot 5)^6 = 20^6$

$\frac{5^5}{5^3} = 5^{5-3} = 5^2 = 25$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5} = 2^{-5}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}\right)^5 = 1$

$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^7}{\left(\frac{3}{4}\right)^6} = \left(\frac{3}{4}\right)^{7-6} = \frac{3}{4}$

$\frac{4^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{16}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{16}{\frac{1}{4}} = 16 \cdot \frac{4}{1} = 64$

$(4^3)^5 = 4^{15}$

$(8^4)^5 = 8^{20}$

1A.077

$$\frac{4^3 \cdot 3^3}{6^3} = \frac{(4 \cdot 3)^3}{(6)^3} = \left(\frac{12}{6}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$\frac{5^3 \cdot 3^3}{18^3} = \frac{(5 \cdot 3)^3}{(6 \cdot 3)^3} = \left(\frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3}\right)^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$\frac{(4^2)^7}{16^7} = \frac{(4^2)^7}{(4^2)^7} = 1$$

$$3^6 \cdot 6^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{3 \cdot 6 \cdot 1}{2}\right)^6 = 9^6$$

$$\left(\frac{4}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot 6^5 = \left(\frac{4 \cdot 1 \cdot 6}{6 \cdot 4}\right)^5 = 1^5 = 1$$

1A.078

$$4^5 \cdot 3^5 \cdot \frac{1}{12^4} = \frac{12^5}{12^4} = 12$$

$$\frac{2^3 \cdot 3^3}{12^3} = \left(\frac{2 \cdot 3}{12}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\frac{4^4 \cdot 8}{2^5} = \frac{(2^2)^4 \cdot 2^2}{2^5} = \frac{2^8 \cdot 2^2}{2^5} = \frac{2^{10}}{2^5} = 2^5 = 32$$

$$(4^3)^2 = 4^6$$

$$4^{3^2} = 4^9$$

1A.079

$$(a \cdot b)^3 = (a \cdot b)(a \cdot b)(a \cdot b) = a^3 \cdot b^3$$

$$((a \cdot b)^3)^2 = (a^3 \cdot b^3)^2 = a^6 \cdot b^6$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3} \;\; or \;\; x^3 \cdot y^{-3}$$

$$\left(\left(\frac{x}{y}\right)^3\right)^2 = \frac{x^6}{y^6} \ or \ x^6 \cdot y^{-6}$$

1A.080

$$\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[8]{8} = 8^{\frac{1}{4}} \cdot \ 8^{\frac{1}{8}} = 8^{\frac{2}{8}} \cdot \ 8^{\frac{1}{8}} = 8^{\frac{3}{8}}$$

$$\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[6]{8} = 6^{\frac{1}{3}} \cdot \ 6^{\frac{1}{6}} = 6^{\frac{2}{6}} \cdot \ 6^{\frac{1}{6}} = 6^{\frac{3}{6}} = \ 6^{\frac{1}{2}} \text{ or } \sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{48^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{48}{6}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$$ 在最后一步使用 CAS，

或者说：8 的三次方根是 2，– 1 次方仍然是 2。

$$\sqrt[5]{243}^3 = (243^{\frac{1}{5}})^3 = 243^{\frac{3}{5}} = 27$$ 在最后一步中使用 CAS，

或者说：243 的五次方根是 3，– 3 次方是 27。

1A.081

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{4} \cdot \ \sqrt{4} = 4^{\frac{1}{3}} \cdot \ 4^{\frac{1}{6}} \cdot \ 4^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{2}{6}+\frac{1}{6}+\frac{3}{6}} = 4^{\frac{6}{6}} = 4^1 = 4$$

$$\frac{\sqrt[3]{6^3} \cdot \sqrt[4]{6^2}}{6\sqrt{6}} = \frac{6^{3 \cdot \frac{1}{3}} \cdot 6^{2 \cdot \frac{1}{4}}}{6 \cdot 6^{\frac{1}{2}}} = \frac{6 \cdot 6^{\frac{1}{2}}}{6 \cdot 6^{\frac{1}{2}}} = 1$$

1A.082

$18x + 13 = 13x + 58 \quad \Leftrightarrow$

$18x - 13x = 58 - 13 \quad \Leftrightarrow$

$5x = 45 \quad \Leftrightarrow$

$x = \frac{45}{5}$ $\Leftrightarrow$

$x = 9$

1A.083

$14(5 + x) = 5(3x - 4) - 3(5 - 2x)$ $\Leftrightarrow$

$70 + 14x = 15x - 20 - 15 + 6x$ $\Leftrightarrow$

$14x - 5x - 6x = -20 - 15 - 70$ $\Leftrightarrow$

$-7x = -105$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{-105}{-7}$ $\Leftrightarrow$

$x = 15$

通过插入测试:

$14(5 + 15) = 5(3 \cdot 15 - 4) - 3(5 - 2 \cdot 15)$ $\Leftrightarrow$

$14 \cdot 20 = 205 + 75$ $\Leftrightarrow$

$280 = 280$ 这是真的。

1A.084

$4 - x = 11$ $\Leftrightarrow$

$-x = 11 - 4$ $\Leftrightarrow$

$-x = 7$ $\Leftrightarrow$

$x = -7$

$5 - x = 5 \quad \Leftrightarrow$

$-x = 5 - 5 \quad \Leftrightarrow$

$-x = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x = 0$

$-3x = 24 \quad \Leftrightarrow$

$x = \frac{24}{-3} \quad \Leftrightarrow$

$x = -8$

$\frac{3}{4}x = 7 \quad \Leftrightarrow$

$x = \frac{4}{3} \cdot 7 \quad \Leftrightarrow$

$x = \frac{28}{3}$

$\frac{1}{2}(1 + x) = 8 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = 8 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}x = 8 - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$

$x = 2 \cdot (8 - \frac{1}{2}) \quad \Leftrightarrow$

$x = 16 - 1 \quad \Leftrightarrow$

$x = 15$

1A.085

$\frac{4y+1}{5} - \frac{4y-3}{4} = -3 \qquad \Leftrightarrow$

$\frac{4(4y+1)-5(4y-3)}{5 \cdot 4} = -3 \qquad \Leftrightarrow$

$16y + 4 - 20y + 15 = -60 \qquad \Leftrightarrow$

$-4y + 19 = -60 \qquad \Leftrightarrow$

$-4y = -79 \qquad \Leftrightarrow$

$y = \frac{79}{4}$

$\frac{z+3}{2z} - \frac{2z-5}{3z} = \frac{1}{6}$ 在哪里 $z \neq 0 \qquad \Leftrightarrow$

$\frac{3(z+3)-2(2z-5)}{6z} = \frac{1}{6} \qquad \Leftrightarrow$

$3z + 9 - 4z + 10 = z \qquad \Leftrightarrow$

$19 = 2z \qquad \Leftrightarrow$

$z = \frac{19}{2}$

1A.086

$\frac{6y-5}{6} - \frac{8-6y}{6} = -\frac{7y+3}{8} - \frac{9-2y}{3} \qquad \Leftrightarrow$

$24\left(\frac{6y-5}{6}\right) - 24\left(\frac{8-6y}{6}\right) = -24\left(\frac{7y+3}{8}\right) - 24\left(\frac{9-2y}{3}\right) \qquad \Leftrightarrow$

$\frac{24}{6}(6y-5) - \frac{24}{6}(8-6y) = -\frac{24}{8}(7y+3) - \frac{24}{3}(9-2y) \Leftrightarrow$

$4(6y-5) - 4(8-6y) = -3(7y+3) - 8(9-2y) \qquad \Leftrightarrow$

$$24y - 20 - 32 + 24y = -21y - 9 - 72 + 16y \quad \Leftrightarrow$$

$$48y - 52 = -5y - 81 \quad \Leftrightarrow$$

$$53y = -29 \quad \Leftrightarrow$$

$$y = -\frac{29}{53}$$

1A.087

$$\frac{5}{y} = \frac{5}{9} \quad \Leftrightarrow$$

$$5y = 9 \cdot 5 \quad \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{9 \cdot 5}{5}$$

$$x = 9$$

$$\frac{a+6}{13} = \frac{5}{8} \quad \Leftrightarrow$$

$$8(a + 6) = 65 \quad \Leftrightarrow$$

$$8a + 48 = 65 \quad \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{65-48}{8} \quad \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{17}{8}$$

$$\frac{6}{5+5} = \frac{b}{5} \quad \Leftrightarrow$$

$$6 \cdot 5 = 10b \quad \Leftrightarrow$$

$$b = \frac{30}{10} = 3$$

$\frac{c}{5} = \frac{15+c}{5+3}$ $\Leftrightarrow$

$c = \frac{75+5c}{8}$ $\Leftrightarrow$

$8c - 5c = 75$ $\Leftrightarrow$

$3c = 75$ $\Leftrightarrow$

$c = 25$

1A.088

$0.45x = 1.35$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{1.35}{0.45} = 3$

$-4x = -\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{1}{16}$

$-\frac{7}{5+3}x = -\frac{1}{6}$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{7}{8}}$ $\Leftrightarrow$

$x = \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{8}{7}\right)$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}$

1A.089

$x^{\frac{1}{2}} = 3$ $\Leftrightarrow$

$(x^{\frac{1}{2}})^2 = 3^2$ $\Leftrightarrow$

$x = 9$

$x^{\frac{1}{2}} - 2 = 0$ $\Leftrightarrow$

$x^{\frac{1}{2}} = 2$ $\Leftrightarrow$

$x = 4$

$2x^{\frac{1}{2}} - 2 = 0$ $\Leftrightarrow$

$2x^{\frac{1}{2}} = 2$ $\Leftrightarrow$

$(2x^{\frac{1}{2}})^2 = 2^2$ $\Leftrightarrow$

$4x = 4$ $\Leftrightarrow$

$x = 1$

1A.090

$\frac{16x-2}{2(2x+1)} = \frac{12x-18}{3x-4}$ 其中 $x \neq -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq -\frac{4}{3}$ $\Leftrightarrow$

$(16x - 2)(3x - 4) = (12x - 18) \cdot 2(2x + 1)$ $\Leftrightarrow$

$48x^2 - 64x - 6x + 8 = 12(4x^2 - 4x - 3)$ $\Leftrightarrow$

$48x^2 - 70x + 8 = 48x^2 - 48x - 36$ $\Leftrightarrow$

$-22x = -44$ $\Leftrightarrow$

$x = 2$

1A.091

$4 + 4x = 2ax + 6$ $\Leftrightarrow$

$4x - 2ax = 6 - 4$ $\Leftrightarrow$

$2x(2 - a) = 2$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{1}{2-a}$ 为了 $x \neq 2$

1A.092

$x^2 - 2x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{2\pm0}{2}$ $\Leftrightarrow$

$x = 1$

1A.093

$x^2 - 2x = 0$ 使用零解 $\Leftrightarrow$

$x(x - 2) = 0$ $\Leftrightarrow$

$x = 0$ 和 $x = 2$

1A.094

$-2 - 3x = -2x^2$ $\Leftrightarrow$

$2x^2 - 3x - 2 = 0$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot(-2)}}{2\cdot2}$ ⇔

$x = \frac{3\pm\sqrt{25}}{4}$ ⇔

$x = 2$ 和 $x = -\frac{1}{2}$

1A.095

$|x| = \sqrt{x}$ 在哪里 $x \geq 0$ ⇔

$x^2 = x$ ⇔

$x^2 - x = 0$ ⇔

$x(x-1) = 0$ ⇔

$x = 0$ 和 $x = 1$

或者：

$|x| = \sqrt{x}$ 在哪里 $x \geq 0$ ⇔

$x^2 = x$ ⇔

$x^2 - x = 0$ ⇔

$x = \frac{1\pm\sqrt{1^2-0}}{2\cdot1}$ ⇔

$x = 0$ 和 $x = 1$

1A.096

$-\sqrt{2-x} = 0$ 在哪里 $-\infty < x \leq 2$ ⇔

$\sqrt{2-x} = 0$ ⇔

$2 - x = 0 \Leftrightarrow$

$x = 2$

1A.097

$x(x-3) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ 和 $x = 3$

$4x(x+4) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ 和 $x = -4$

$(x-3)(x-7) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 3$ 和 $x = 7$

$4(x-5)(x-1) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 5$ 和 $x = 1$

$8(x+4)x = 0 \Leftrightarrow$

$x = -4$ 和 $x = 0$

1A.098

$-x^2 - 2\mathrm{x} + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} \Leftrightarrow$

$x = -3$ 和 $x = 1$

$2x^2 + 4\mathrm{x} - 20 = 0$ ⇔

$x^2 + 2\mathrm{x} - 10 = 0$ ⇔

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1}$ ⇔

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{44}}{2}$ ⇔

$x = \frac{-2+\sqrt{44}}{2}$ 和 $x = \frac{-2-\sqrt{44}}{2}$ ⇔

$x = -1 + \sqrt{11}$ 和 $x = -1 - \sqrt{11}$

$2x^2 - 4\mathrm{x} + 8 = 0$ ⇔

$x^2 - 2\mathrm{x} + 4 = 0$ ⇔

$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$ ⇔

$x = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2 \cdot 1}$ 判别式为负 =>

没有解决方案

1A.099

$-5x^2 - 4\mathrm{x} - 1 = 0$ ⇔

$5x^2 + 4\mathrm{x} + 1 = 0$ ⇔

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 5}$ 判别式为负 =>

没有解决方案

1A.100

$x^3 + x^2 = 0$

猜测：	$x = -1$	=>	$-1 + 1 = 0$	真的
	$x = 1$	=>	$11 + 1 = 0$	错误的
	$x = 0$	=>	$0 + 0 = 0$	真的
	以及根 -1 和 0 之间的猜测：			
	$x = -\frac{1}{2}$	=>	$-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = 0$	错误的

所有其他猜测都被证明是错误的，因此有两个根：

$x = -1$ 和 $x = 0$，这已得到 CAS 的证实。

1A.101

$x^3 + x^2 - 2 = 0$ $\Leftrightarrow$

$x^3 + x^2 = 2$

猜测：	$x = 0$	=>	$0 - 0 = 2$	错误的
	$x = 1$	=>	$1 + 1 = 2$	真的
	$x = 2$	=>	$8 - 4 = 2$	错误的

x<1表示左边太小，x>1 表示左边太大，所以只有 x=1 才是根，这一点得到了CAS的证实。

1A.102

$x^4 = 16$ ⇔

$(x^2)^2 = 4^2$ ⇔

$x^2 = 4$ ⇔

$x = -2$ 和 $x = 2$

也可以通过猜测来解决，通过插入来控制。

该解决方案已得到 CAS 的确认。

$x^4 = 81$ ⇔

$(x^2)^2 = 9^2$ ⇔

$x^2 = 9$ ⇔

$x = -3$ 和 $x = 3$

也可以通过猜测来解决，通过插入来控制。

该解决方案已得到 CAS 的确认。

1A.103

$x^4 + x^2 = 81$

猜测：	$x = 2$	=>	$16 + 4 = 81$	错误的
	$x = 3$	=>	$81 + 9 = 81$	错误的

对于 x=2，可以看出左侧小于右侧。对于 x=3，可以看出左侧比右侧稍大。所以，必须有一个根，大约为：$x \approx 2.9\cdots$

$x = -2$ => $16 + 4 = 81$ 错误的

$x = -3$ => $81 + 9 = 81$ 错误的

对于 x=-2，可以看出左侧小于右侧。对于 x=-3，可以看出左侧比右侧稍大。所以，必须有一个根，大约为：x ≈ -2.9…

只能有 -2 和 -3 之间以及 2 和 3 之间的根。

CAS 确认了两个根：

$x = -2.917\ldots$ 和 $x = 2.917\ldots$

1A.104

$x^4 - 40x^2 + 144 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 4 \cdot 1 \cdot 144}}{2 \cdot 1} \quad \Leftrightarrow$

$x^2 = 4$ 和 $x^2 = 36 \quad \Leftrightarrow$

$x = \pm 2$ 和 $x = \pm 6$

$2x^4 - 64x^2 - 288 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x^4 - 32x^2 - 144 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 4 \cdot 1 \cdot (-144)}}{2 \cdot 1} \quad \Leftrightarrow$

$x^2 = -8$ 这是不可能的，并且 $x^2 = 36 \quad \Leftrightarrow$

$x = \pm 6$

1A.105

$x^4 - 2x^3 - 3x^2 = 0$ $\Leftrightarrow$

$x^2(x^2 - 2x - 3) = 0$

这对于任何一个都是正确的 $x^2 = 0$ 或者 $(x^2 - 2x - 3) = 0$

$x^2 = 0$ 是真的 $x = 0$

$(x^2 - 2x - 3) = 0$ 是真的:

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$ $\Leftrightarrow$

$x = -1$ 和 $x = 3$

综合起来答案就是：$x = 0$ 和 $x = -1$ 和 $x = 3$

1A.106

$10x + 4y = 44$ 和 $2x - y = 7$

等式二： $y = 2x - 7$

代入等式一： $10x + 4(2x - 7) = 44$ $\Leftrightarrow$

$10x + 8x - 28 = 44$ $\Leftrightarrow$

$18x = 72$ $\Leftrightarrow$

$x = 4$

代入等式二： $y = 2 \cdot 4 - 7$ $\Leftrightarrow$

$y = 1$

1A.107

$2x - y = 6$ 和

$3x - 5y = 2$ $\Leftrightarrow$

$6x - 3y = 18$ 和

$6x - 10y = 4$

等式一 –(减) 等式二: $7y = 14$ $\Leftrightarrow$ $y = 2$

代入等式一: $2x - 2 = 6$ $\Leftrightarrow$ $x = 4$

1A.108

$\frac{3}{2x-3y+3} = \frac{4}{3x-4y+3}$ 和 $\frac{5}{3x+4y-6} = \frac{5}{4x+3y+1}$

等式一: $9x - 12y + 9 = 8x - 12y + 9$ $\Leftrightarrow$

$x = 3$

等式二: $20x + 15y + 5 = 15x + 20y - 30$ $\Leftrightarrow$

$-5x + 5y - 35 = 0$

为了 x = 3: $-5 \cdot 3 + 5y - 35 = 0$ $\Leftrightarrow$

$5y = 50$ $\Leftrightarrow$

$y = 10$

1A.109

$x + \frac{1}{2}y = 4$ 和

$2x - 3y = -3$ $\Leftrightarrow$

$2x + y = 8$ 和

$2x - 3y = -2$

等式一 –(减) 等式二: $4y = 10$ $\Leftrightarrow$ $y = \frac{5}{2}$

代入等式一: $x + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = 4$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{11}{4}$

1A.110

$\frac{1}{2}x + 3y = -7$ 和

$-2x + 2y = -14$ $\Leftrightarrow$

$x + 6y = -14$ 和

$-6x + 6y = -42$

等式一 –(减) 等式二: $7x = 28$ $\Leftrightarrow$ $x = 4$

代入等式一: $\frac{1}{2}4 + 3y = -7$ $\Leftrightarrow$ $y = -3$

1A.111

1) 和 2) 成正比。

3) 和 6) 成反比。

1A.112

打开：	○————○	]2 ; 3[	2 < x < 3
	2 3		
关闭：	•————•	[2 ; 3]	2 ≤ x ≤ 3

1A.113

○————	]-17 ; ∞[	x > -17
-17		
•————	[-17 ; ∞[	x ≥ -17

1A.114

$\frac{1}{2}x + 3 > -\frac{1}{3}x + 4$ ⇔

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x > 4 - 3$ ⇔

$\frac{3}{6}x + \frac{2}{6}x > 1$ ⇔

$\frac{5}{6}x > 1$ ⇔

$x > \frac{6}{5}$

$\frac{4}{3}x - 3 > 4 - \frac{1}{3}x$ ⇔

$\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}x > 4 + 3$ ⇔

$\frac{5}{3}x > 7$ ⇔

$x > \frac{3}{5} \cdot 7$ ⇔

$x > \frac{21}{5}$

1A.115

$2x - 4 < 2x + 3 < 6 - x$

我们分为两个不等式：

$2x - 4 < 2x + 3$ 和 $2x + 3 < 6 - x$ ⇔

$0 < 7$ 对所有人来说都是如此 x 和 $x < 1$

综合： $x < 1$ 或： x 属于区间]-∞ ; 1[

第1部分。

B 部分 – 提议的解决方案

1B.01

$25\% - 20\% = 5\% = 8\ m^3$ =>

$100\% = \frac{100}{5} \cdot 8 = 160\ m^3$

或者建立一个方程，其中 V 表示体积：

$\frac{V}{5} + 8 = \frac{V}{4}$ ⇔

$\frac{V}{5} - \frac{V}{4} = -8$ ⇔

$\frac{4V-5V}{20} = -8$ ⇔

$\frac{-V}{20} = -8$ ⇔

$\mathrm{V} = 160\ m^3$

1B.02

1 袋重量 $440 - 419 = 21kg$

最初行李数 $\frac{419}{21} \approx 20$ 包

1B.03

V 代表体积，ΔV 代表每分钟体积的变化，n 代表分钟数：

$\Delta V = 40 - 17 = 23$ 升

$V = \Delta V \cdot n$ =>

$300 = 23 \cdot n$ ⇔

$n \approx 13$ 分钟

1B.04

$5 \cdot 30 \cdot 0.75 = 112.5$ 包

或者更详细：

$$5\ [\text{马匹}] \cdot 30\ [\text{天}] \cdot 0.75\ \left[\frac{\text{包}}{\text{马} \cdot \text{日}}\right] = 112.5\ \text{包}$$

1B.05

$14\% - 10\% = 4\% = 20$ 升 =>

$100\% = \frac{100}{4} \cdot 20 = 500$ 升

或者建立一个方程，其中 V 表示体积：

$0.10 \cdot \mathrm{V} + 20 = 0.14 \cdot \mathrm{V}$ ⇔

$20 = 0.14 \cdot \mathrm{V} - 0.10 \cdot \mathrm{V}$ ⇔

$20 = 0.04 \cdot \mathrm{V}$ ⇔

$V = \frac{20}{0.04} = 500$ 升

1B.06

天数称为n

$\frac{n}{3}\left(\frac{2}{4} \cdot 2.5\right) + \frac{n}{3}\left(\frac{3}{4} \cdot 2.5\right) + \frac{n}{3}\left(\frac{4}{4} \cdot 2.5\right) = 450$ ⇔

$0.4167 \cdot \mathrm{n} + 0.625 \cdot \mathrm{n} + 0.833 \cdot \mathrm{n} = 450$ ⇔

$n = \frac{450}{1.875} \approx 240$ 天

1B.07

$d = 3800\sqrt{h} = 3800\sqrt{2} \approx 5370\ m$

$d = 3800\sqrt{h} = 3800\sqrt{40} \approx 24\,000\ m$

可以在大约以下距离看到山顶：

$d = 3800\sqrt{h} = 3800\sqrt{1000} \approx 120\,000\ m = 120\ km$

1B.08

200 000 is 125%.

不含 25% 增值税: $\frac{200\,000}{1.25} = 160\,000$

对于一辆车来说: $\frac{160\,000}{2} = 80\,000$ 美元

1B.09

$$E = 250 + \frac{n}{2}(n+4) = 250 + \frac{8}{2}(8+4) = 298 \text{ 百万英镑}$$

$$E = 250 + \frac{n}{2}(n+4) = 250 + \frac{12}{2}(12+4) = 346 \text{ 百万英镑}$$

$450 = 250 + \frac{n}{2}(n+4)$ =>

$450 = 250 + \frac{n^2}{2} + 2n$ ⇔

$n^2 + 4n - 400 = 0$ ⇔

$n = \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-400)}}{2 \cdot 1}$ ⇔

$n = 18$ 和 $n = -22$ => -22 不相关。

$n = 16$ 楼层是可以的

1B.10

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{5}{9.82}} = 4.48 \text{ 秒}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{10}{9.82}} = 6.34 \text{ 秒}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{15}{9.82}} = 7.77 \text{ 秒}$$

1B.11

ϱ 和 m 成正比

ϱ 与 V 成反比。

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{15}{0.002} = 7500 \frac{kg}{m^3}$$

1B.12

- 质量间隔 = [15 ; 20[kg.
- 15 kg ≤ 大量的 < 20 kg

1B.13

1小时为60分钟，1分钟为60秒。所以：

$90\,\frac{m^3}{h} = \frac{90}{60 \cdot 60} = 0.025\,\frac{m^3}{s}$ (立方米每秒)

开始: 0.5 (对于平均) $\cdot\, 0.025 \left(\frac{m^3}{s}\right) \cdot 20(s) = 0.25\,m^3$

跑步: $0.025 \left(\frac{m^3}{s}\right) \cdot (12 \cdot 60)(s) = 18\,m^3$

停止: 0.5 (对于平均) $\cdot\, 0.025 \left(\frac{m^3}{s}\right) \cdot 40(s) = 0.5\,m^3$

和: $0.025 + 18 + 0.5 = 18.75\,m^3$

1B.14

总质量: $12 \cdot 12 + 22 \cdot 1 + 11 \cdot 16 = 342\,u$

碳: $\frac{12 \cdot 12}{342} = \frac{144}{342} \approx 0.421 \approx 42.1\%$ 大量的

氢: $\frac{22 \cdot 1}{342} \approx 0.0643 \approx 6.4\%$ 大量的

氧: $\frac{11 \cdot 16}{342} \approx 0.515 \approx 51.5\%$ 大量的

控制: $42.1 + 6.4 + 51.5 = 100\%$,好的

1B.15

总质量: $2 \cdot 1 + 1 \cdot 16 = 18\,u$

氢: $\frac{2 \cdot 1}{18} \approx 0.111 \approx 11.1\%$ 大量的

氧: $\frac{1 \cdot 16}{18} \approx 0.889 \approx 88.9\%$ 大量的

控制: $11.1 + 88.9 = 100\%$,好的

第2部分。

A 部分 – 提议的解决方案

2A.001

$|-5| = 5$

$|5| = 5$

$|0| = 0$

$|\frac{1}{2} + 4| = \frac{9}{2}$

$|\frac{1}{2} - 4| = \frac{7}{2}$

$|-a| = a$

$|-ab| = ab$

$|-5+2| = 3$

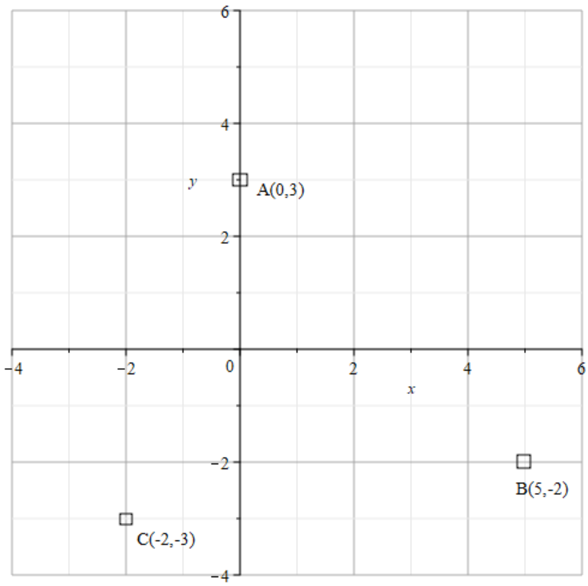
$|-7-5| = 12$

$|-7+5| = 2$

$|-\frac{11}{4}| = \frac{11}{4}$

$|-5018| = 5018$

2A.002



$|AB|^2 = (5-0)^2 + (-2-3)^2 \quad \Leftrightarrow$

$$|AB| = \sqrt{(5-0)^2 + (-2-3)^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$|AB| = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$|AB| = \sqrt{25+25} \quad \Leftrightarrow$$

$$|AB| = \sqrt{50} \quad \approx 7.07$$

$$|BC|^2 = (-2-5)^2 + (-3-(-2))^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$|BC| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$|BC| = \sqrt{49+1} \quad \Leftrightarrow$$

$$|BC| = \sqrt{50} \quad \approx 7.07$$

$$|AC|^2 = (-2-0)^2 + (-3-3)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$|AC| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$|AC| = \sqrt{4+36} \quad \Leftrightarrow$$

$$|AC| = \sqrt{40} \quad \approx 6.3$$

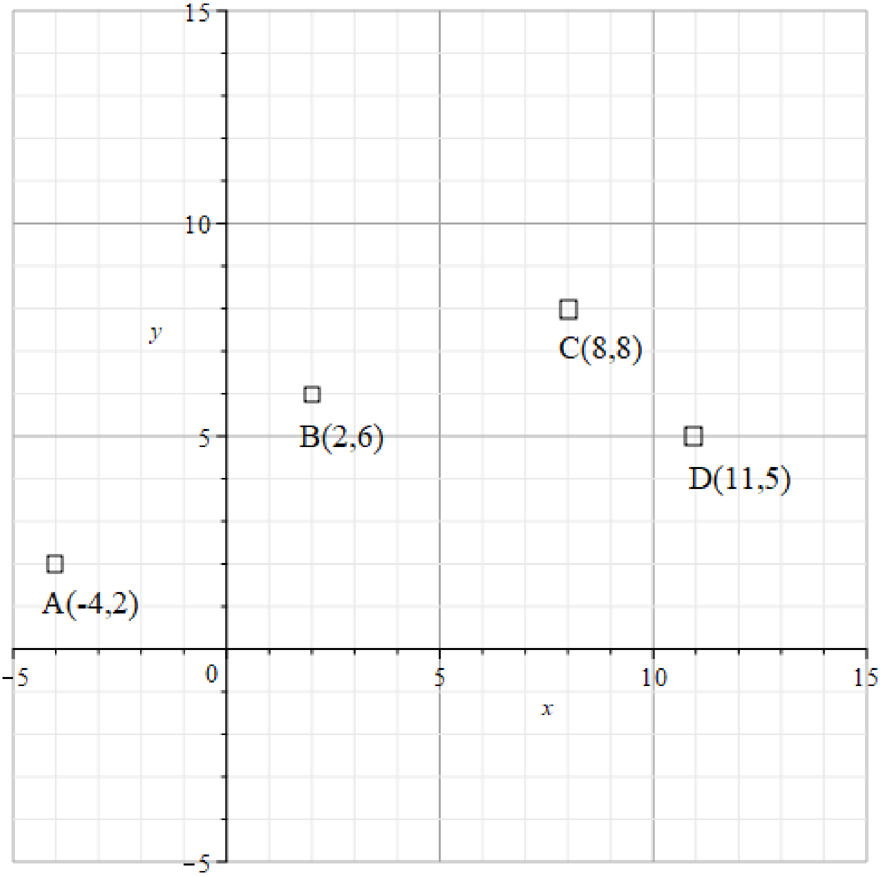
$$|CA|^2 = (0-(-2))^2 + (3-(-3))^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$|CA| = \sqrt{(2)^2 + (6)^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$|CA| = \sqrt{4+36} \quad \Leftrightarrow$$

$$|CA| = \sqrt{40} = |AC| \quad \approx 6.3$$

2A.003



$|AB| = [(2-(-4))^2 + (6-2)^2]^{½} = 52^{½} = \sqrt{52} \approx 7.2$

$|BC| = [(8-2)^2 + (8-6)^2]^{½} = 40^{½} \approx 6.32$

$|CD| = [(11-8)^2 + (5-8)^2]^{½} = 18^{½} \approx 4.24$

$|DA| = [(11-(-4))^2 + (5-2)^2]^{½} = 234^{½} \approx 15.3$

$|AC| = [(8-(-4))^2 + (8-2)^2]^{½} = 180^{½} \approx 15.3$

$|BD| = [(11-2)^2 + (5-6)^2]^{½} = 82^{½} \approx 9.06$

2A.004

$y = a(x - x_1) + y_1$

在哪里 $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-2}{2-(-4)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

和 $(x_1, y_1) = (-4,2)$ 选择A点

所以 $y = \frac{2}{3}(x - (-4)) + 2$ ⇔

$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} + \frac{6}{3}$ ⇔

$y = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$

2A.005

l_1 : $y = 2x + 5$

l_2 : $y = 6x - 3$

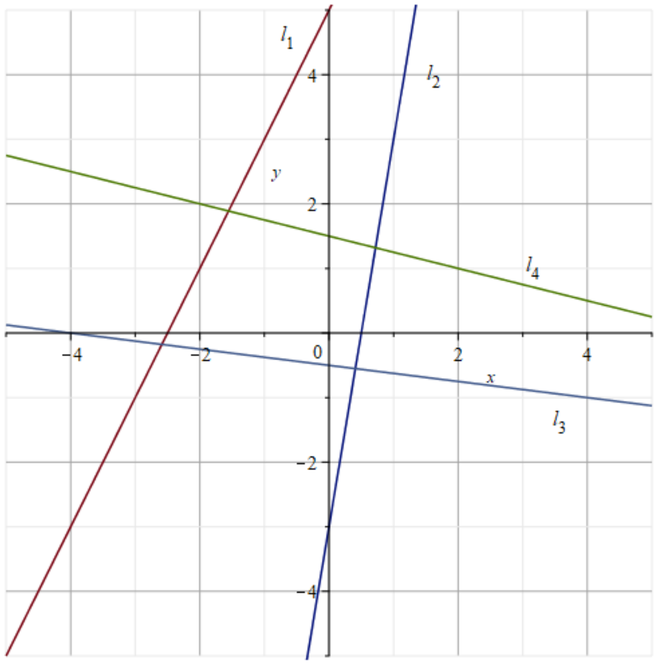
l_3 : $y = -\frac{1}{8}x - \frac{1}{2}$

l_4 : $y = -\frac{1}{4}x + b$ 已插入 P =>

$1 = -\frac{1}{4} \cdot 2 + b$ ⇔

$b = \frac{3}{2}$ =>

$y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

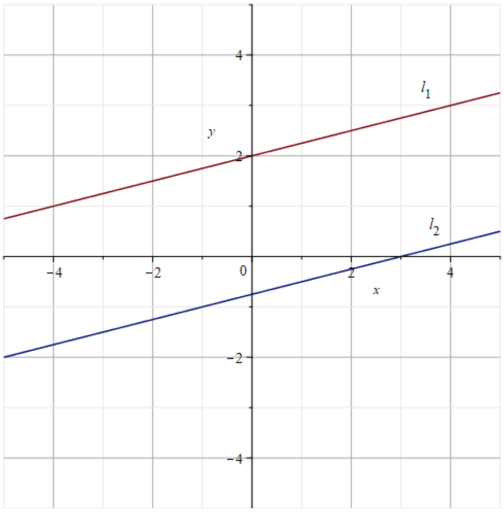


这是 CAS 绘制的草图。也可以使用通过插入找到的坐标手动绘制草图，例如 l1：

x	0	1	2	-1	-2	等等
y	5	7	9	3	1	

$a_{l2} \cdot a_{l3} = 6 \cdot (-\frac{1}{8}) = -\frac{6}{8} \neq -1$ => 不正交

2A.006



（图非必要）。

l_1: 坡 $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{4-(-4)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ => $y = \frac{1}{4}x + b$

插入点 (4,3) $3 = \frac{4}{4} + b$ => $b = 2$

所以 $y = \frac{1}{4}x + 2$

l_2: 等斜率 $a = \frac{1}{4}$ => $y = \frac{1}{4}x + b$

(3,0) 插入 $0 = \frac{3}{4} + b$ => $b = -\frac{3}{4}$

所以 $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$

2A.007

$y = a(x - x_1) + y_1$

l: 在哪里 $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-0}{3-0} = 1$

和 $(x_1, y_1) = (0,0)$ 已插入 0 点

所以 $y = 1(x - 0) + 0$ ⇔

$y = x$

m: 在哪里 $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4-2}{-1-3} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

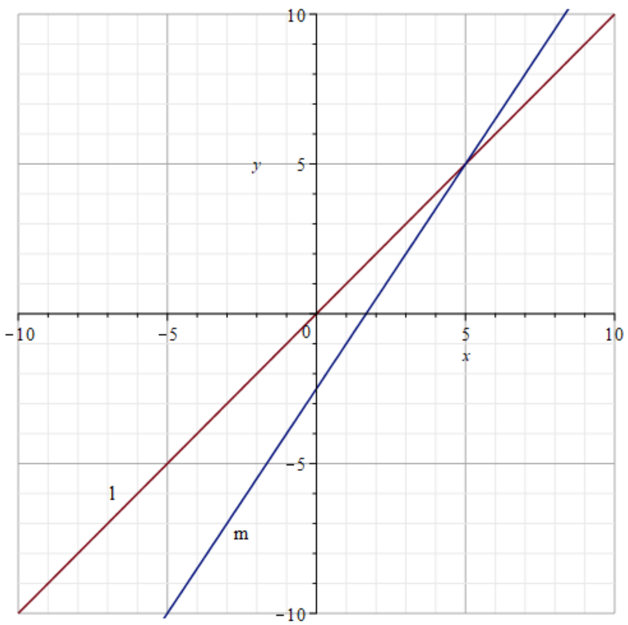
和 $(x_1, y_1) = (3,2)$ 已插入 Q 点

所以 $y = \frac{3}{2}(x - 3) + 2$ ⇔

$y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} + \frac{4}{2}$ ⇔

$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

不同的斜率（1 和$\frac{3}{2}$）=> 不平行



2A.008

l_1: $2x + 4y - 14 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$4y = -2x + 14 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ 坡 $= -\frac{1}{2}$

l_2: 坡也 $= -\frac{1}{2} \quad =>$

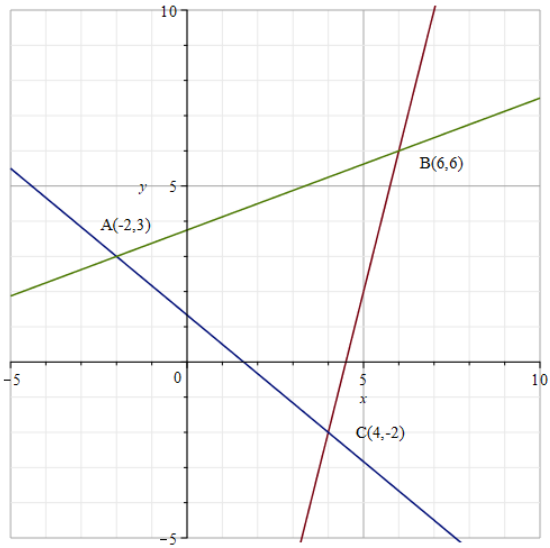
$y = -\frac{1}{2}x + \mathrm{b}$ (5,7) 插入 $=>$

$7 = -\frac{1}{2}5 + \mathrm{b} \quad \Leftrightarrow$

$b = \frac{14}{2} + \frac{5}{2} = \frac{19}{2} \quad =>$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{19}{2}$

2A.009



穿过AC的线: $a = \frac{-2-3}{4-(-2)} = \frac{-5}{6}$

$y = ax + b$ 与 a 和 A 点:

$3 = -\frac{5}{6}(-2) + b$ ⇔

$b = \frac{4}{3}$ =>

$y_{AC} = -\frac{5}{6}x + \frac{4}{3}$

穿过AB的线: $a = \frac{6-3}{6-(-2)} = \frac{3}{8}$

$y = ax + b$ 与 a 和 B 点:

$6 = \frac{3}{8}6 + b$ ⇔

$b = \frac{15}{4}$ =>

$y_{AB} = \frac{3}{8}x + \frac{15}{4}$

穿过BC的线: $a = \frac{-2-6}{4-6} = \frac{-8}{-2} = 4$

$y = ax + b$ 与 a 和 C 点:

$-2 = 4 \cdot 4 + b$ ⇔

$b = -18$ =>

$y_{BC} = 4x - 18$

2A.010

x 轴上的 y 为零: => $2x - 0 = 4$

⇔ $x = 2$

因此与 x 轴相交于点 (2, 0)

x 在 y 轴上为零： => $2\cdot 0 - y = 4$

⇔ $y = -4$

因此与 y 轴的交点为：(0,-4)

2A.011

$3x - 4y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 4y \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{4}x$

$kx + 3y = 12 \quad \Leftrightarrow \quad 3y = -kx + 12 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{k}{3}x + 4$

并行： $\frac{3}{4} = -\frac{k}{3} \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{9}{4}$

正交： $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{k}{3}\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{k}{4} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad k = 4$

2A.012

交叉点： $y_{l1} = y_{l2}$ =>

并使用方程的右侧： $\frac{3}{4}x + 1 = \frac{3}{7}x + \frac{22}{7} \quad \Leftrightarrow$

$\frac{21}{28}x - \frac{16}{28}x = \frac{22}{7} - \frac{7}{7} \quad \Leftrightarrow$

$\frac{21}{28}x = \frac{15}{7} \quad \Leftrightarrow$

$x = 12$

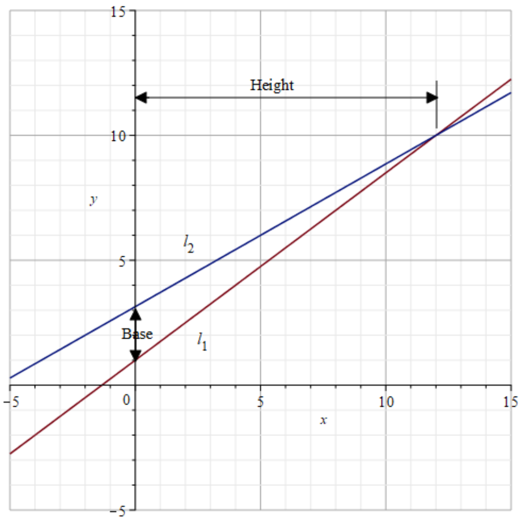
将其插入到 l_1 或 l_2 的方程中，这里我们选择 l_1 :

$y = \frac{3}{4}12 + 1 = 10$ =>

交点： (12,10)

与 y 轴的交点是 x = 0 时插入的 =>

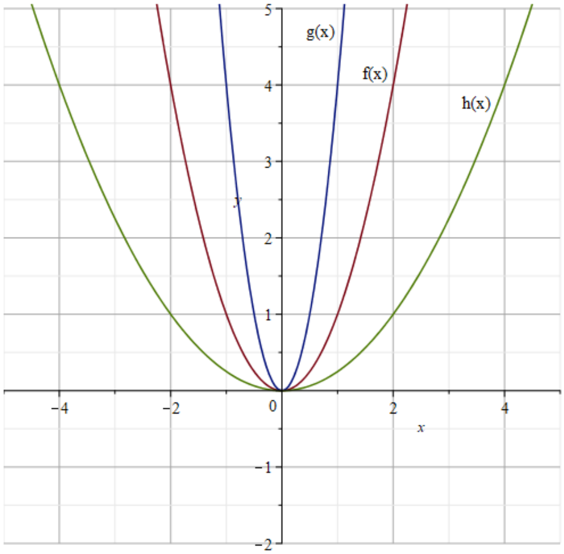
$y_{l1} = 1$ 和 $y_{l2} = \frac{22}{7}$



三角形面积 $= \frac{1}{2} \cdot$ 基线 $\cdot$ 高 =>

A (区域) $= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{22}{7} - \frac{7}{7}\right) \cdot 12 = \frac{90}{7}$

2A.013

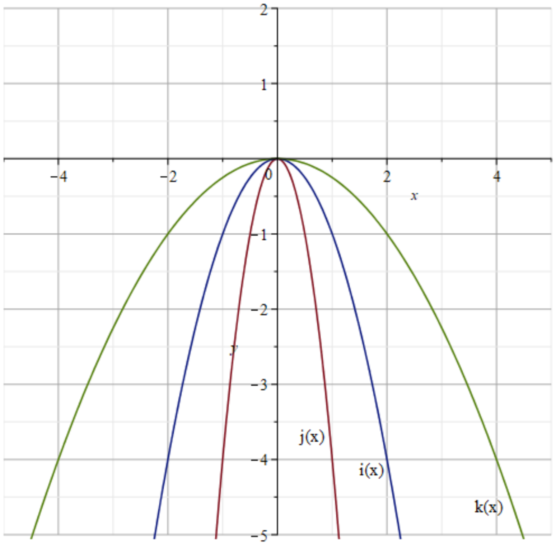


$f(x) = x^2$ $g(x) = 4x^2$ $h(x) = \frac{1}{4}x^2$

这是 CAS 绘制的草图。也可以使用通过插入找到的坐标手动绘制草图，例如 f(x)：

x	0	1	2	-1	-2	Etc.
f(x)	0	1	4	1	4	

2A.014



$i(x) = -x^2$ $\quad$ $j(x) = -4x^2$ $\quad$ $k(x) = -\frac{1}{4}x^2$

2A.015

x 轴上的 y 为零： =>

$x^2 - 2x - 8 = 0$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = 4$ 和 -2 =>

以点为单位的交集：(4,0) 和 (-2,0)

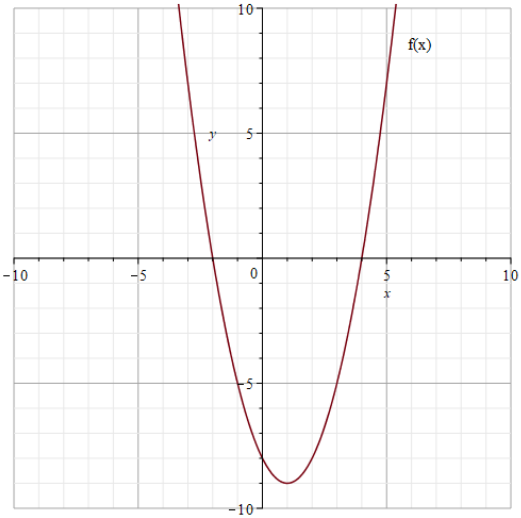
y 轴上的 x 为零： =>

$f(x) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 8$ $\Leftrightarrow$

$f(x) = -8$ =>

交点：(0,-8)

顶点：　　$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right) = \left(\frac{2}{2\cdot 1}, \frac{-36}{4\cdot 1}\right) = (1, -9)$



2A.016

交叉点：　　$y_{线} = y_{抛物线}$ =>

并使用方程的右侧：

$$-x - 2 = 2x^2 + 6x - 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + 7x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

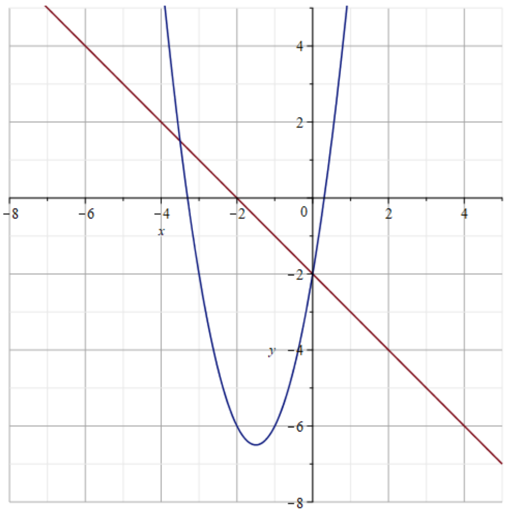
$$x(2x + 7) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 0 \text{ 和 } x_2 = -\frac{7}{2} \quad =>$$

由于交点满足两个方程，因此可以通过插入任一方程（直线或抛物线）来找到 y。这里我们选择最简单的直线方程：

$y_1 = -2$ 和 $y_2 = -\left(-\frac{7}{2}\right) - \frac{4}{2} = \frac{3}{2}$ ⇔

因此交点 (0,-2) 和 $\left(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$



遵守。

2A.017

它们相交为 $x^2 - 4x - 4 = 2x^2 + \mathrm{x}$ ⇔

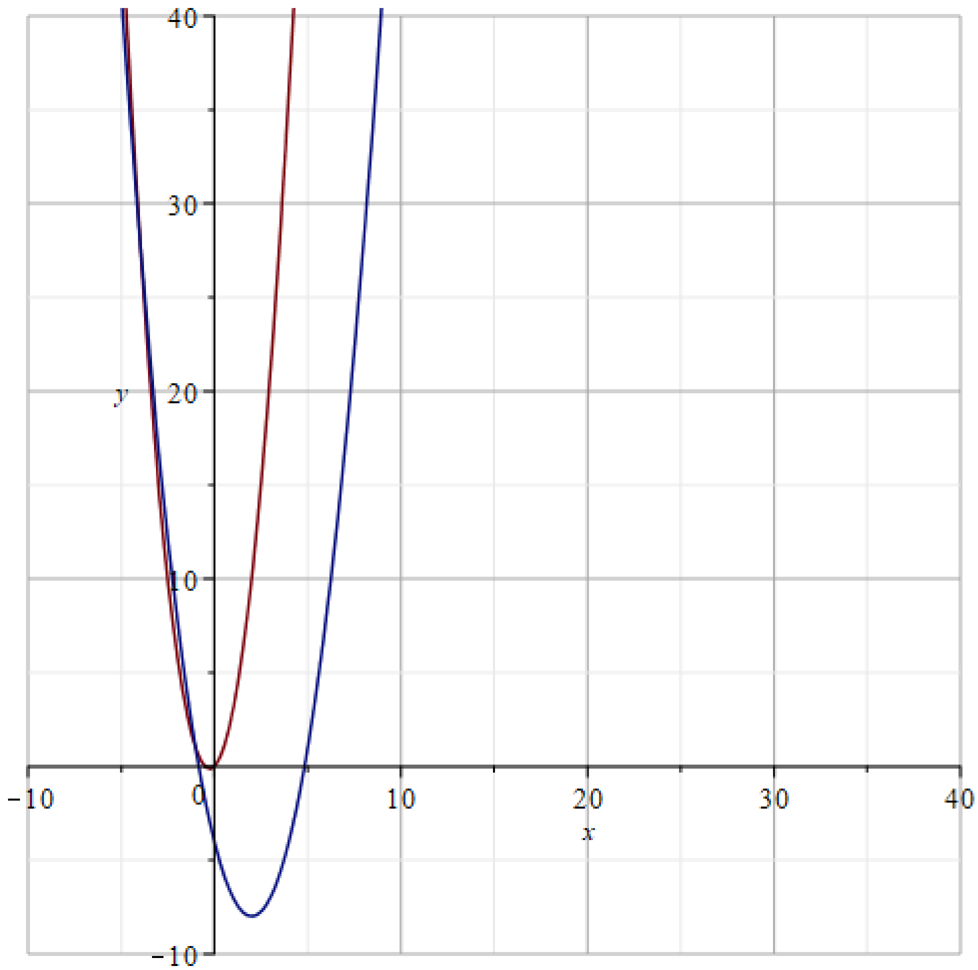
$x^2 + 5\mathrm{x} + 4 = 0$ ⇔

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 3}{2}$ ⇔

$x_1 = -1$ 和 $x_2 = -4$ =>

并通过插入 $y_1 = 1$ 和 $y_2 = 28$ ⇔

因此点的交集：(-1,1) 和 $(-4, 28)$



读取交点并不容易，但它似乎符合计算。

2A.018

$2x = -2x^2 + y \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x^2 + 2x$

$4 = -x + x^2 + y \quad \Leftrightarrow \quad y = -x^2 + x + 4$

交点的 x 坐标

$$2x^2 + 2x = -x^2 + x + 4$$

$$3x^2 + \mathrm{x} - 4 = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

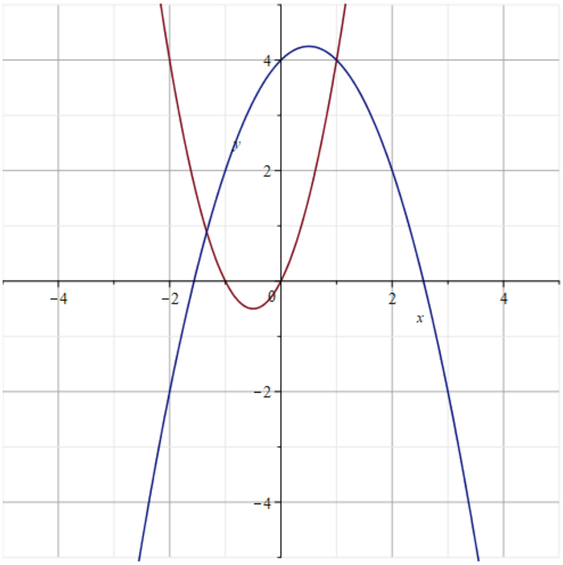
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 3\cdot(-4)}}{2\cdot 3} = \frac{-1\pm 7}{6} \qquad \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 1 \text{ 和 } x_2 = -\frac{4}{3} \quad =>$$

And by insertion in the first equation (either will do)

$$y_1 = 4 \text{ 和 } y_2 = 2\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{9}$$

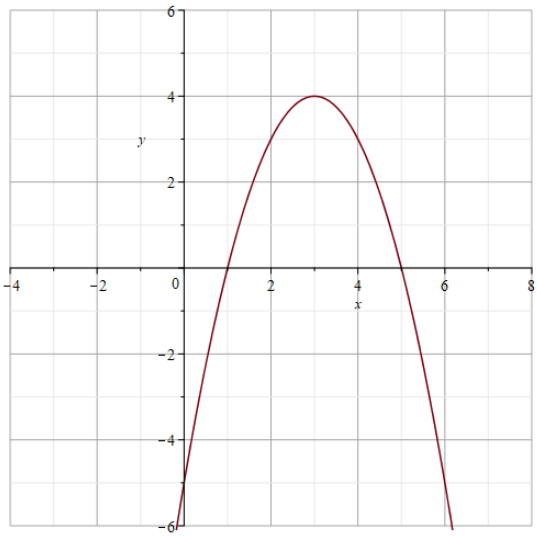
因此点的交集: (1,4) 和 $\left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{9}\right)$



遵守。

2A.019

$$y = -x^2 + 6x - 5$$



读数：x 轴在（1, 0）和（5, 0）处的交点

y 轴交点位于（0, −5）

顶点位于（3, 4）

水平线 y = 5 不会与抛物线相交

计算：

y 在 x 轴上为零 =>

$-x^2 + 6x - 5 = 0$ ⇔

$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} = 5$ 和 1 =>

以点为单位的交集：(5,0) 和 (1,0)

x 在 y 轴上为零： =>

$y = 0^2 + 6 \cdot 0 - 5$ ⇔

$y = -5$ =>

交点：(0,-5)

顶点： $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right) = \left(\frac{-6}{2\cdot(-1)}, \frac{-16}{4\cdot(-1)}\right) = (3{,}4)$

为了 y = 5=> $5 = -x^2 + 6x - 5$ ⇔

$x^2 - 6x + 10 = 0$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 1\cdot 10}}{2\cdot 1} =$ 没有解决方案=>

无交叉点

读数与计算完全一致。

2A.020

$f(x) = x^2 - x - 6$ 根 $x^2 - x - 6 = 0$ ⇔

$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}$ ⇔

$x_1 = 3$ 和 $x_2 = -2$

所以，对于因子 1 => $f(x) = (x-3)(x+2)$

$g(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 8$ 根 $\frac{1}{4}x^2 - x - 8 = 0$ ⇔

$x^2 - 4x - 32 = 0$ ⇔

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-32)}}{2 \cdot 1} \quad \Leftrightarrow$$

$x_1 = 8$ 和 $x_2 = -4$

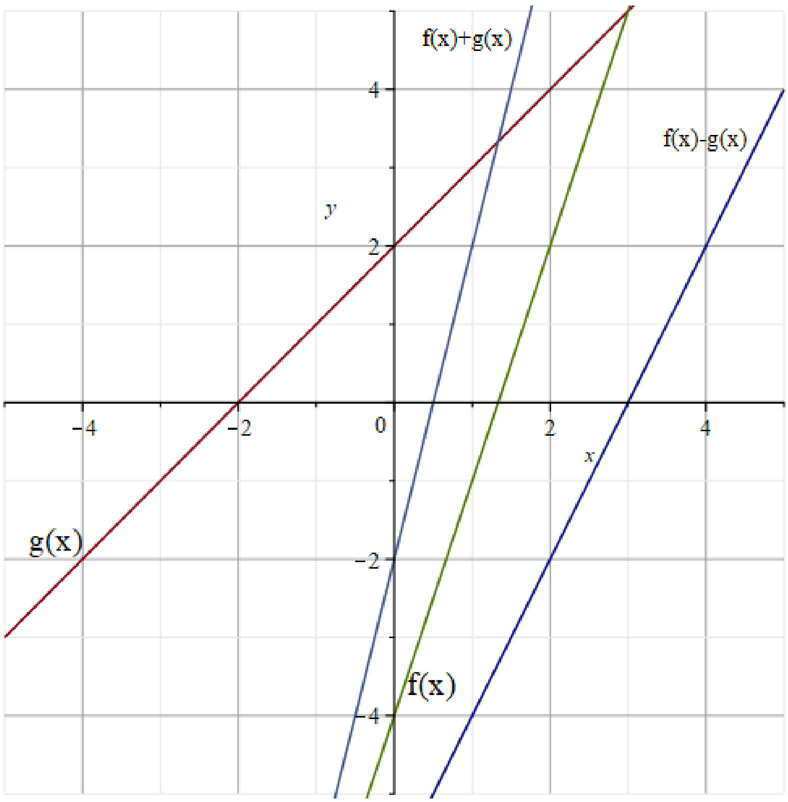
所以，对于因子 $\frac{1}{4}$ => $f(x) = \frac{1}{4}(x-8)(x+4)$

2A.021

$f(x) = 3x - 4$ 和 $g(x) = x + 2$ =>

$f(x) + g(x) = 3x - 4 + (x + 2) = 4x - 2$

$f(x) - g(x) = 3x - 4 - (x + 2) = 2x - 6$



2A.022

$f(g(x)) = 3(x+2) - 4 = 3x + 2 = h(x)$

$h(x) = 3x + 2$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{h(x)-2}{3}$ => 并形成反函数：

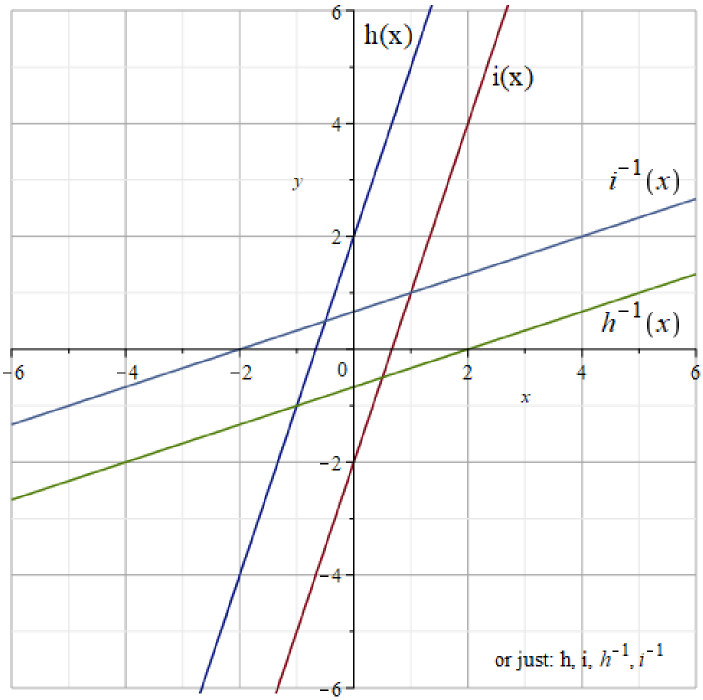
$h^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

$g(f(x)) = (3x-4) + 2 = 3x - 2 = i(x)$

$i(x) = 3x - 2$ $\Leftrightarrow$

$x = \frac{i(x)+2}{3}$ => 并形成反函数：

$i^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$



2A.023

毕达哥拉斯检查 $a^2 + b^2 = c^2$ 或者 $c = (a^2 + b^2)^{½}$

这里 $2^2 + 3^2 = 3.8^2$ ⇔

$13 = 14.44$ =>

假的，不是直角的

$3^2 + 4^2 = 5^2$ ⇔

$9 + 16 = 25$ ⇔

$25 = 25$ 真的 区域 $= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$

$|AB| = ((5-2)^2 + (4-3)^2)^{½} = 10^{½}$

$|BC| = ((10-5)^2 + (0-4)^2)^{½} = 41^{½}$

$|CA| = ((2-10)^2 + (3-0)^2)^{½} = 73^{½}$ =>

$(10^{½})^2 + (41^{½})^2 = (73^{½})^2$ ⇔

$10 + 41 = 73$ 假的，不是直角的

$|DE| = ((2-0)^2 + (4-0)^2)^{½} = 20^{½}$

$|EF| = ((10-2)^2 + (0-4)^2)^{½} = 80^{½}$

$|FD| = ((0-10)^2 + (0-0)^2)^{½} = 100^{½}$ =>

$(20^{½})^2 + (80^{½})^2 = (100^{½})^2$ ⇔

$20 + 80 = 100$ 真的 区域 $= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 80 = 800$

2A.024

$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ ⇔

$x^2 - 6x + y^2 + 4y + 4 = 0$ ⇔

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = 9$ ⇔

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$ =>

所以，中心 C(3, −2) 和半径 = 3

$y^2 - 12y = -x^2 - 16x$ ⇔

$x^2 + 16x + y^2 - 12y = 0$ ⇔

$(x^2 + 16x + 64) + (y^2 - 12y + 36) = 64 + 36$ ⇔

$(x + 8)^2 + (y - 6)^2 = 100$ =>

C(3,-2) 和 r = 3

$2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y = 12$ ⇔

$x^2 - 2x + y^2 + 6y = 6$ ⇔

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = 6 + 1 + 9$ ⇔

$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$ =>

C(1,-3) 和 r = 4

$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 20 = 0$ ⇔

$x^2 - 6x + y^2 + 4y = -20$ ⇔

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = -20 + 9 + 4$ ⇔

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = -7$ =>

右侧为负 => 没有圆圈

2A.025

$x^2 + y^2 + 12x + 35 = 0$ ⇔

$(x^2 + 12x + 36) + (y - 0)^2 = -35 + 36$ ⇔

$(x + 6)^2 + (y - 0)^2 = 1$ =>

C(−6, 0) 且 r = 1 的圆

$x^2 + 12x + y^2 = -36$ ⇔

$(x^2 + 12x + 36) + (y - 0)^2 = -36 + 36$ ⇔

$(x + 6)^2 + (y - 0)^2 = 0$ =>

没有半径 => 没有圆，只有一个点 C(−6, 0)

$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - x + \frac{3}{2}y + \frac{35}{2} = 0$ ⇔

$x^2 + y^2 - 4x + 6y = -70$ ⇔

$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = -70 + 4 + 9$ ⇔

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = -57$ =>

右侧为负 => 没有圆圈

2A.026

C(7,-4)   P(36,41)   Q(50,-30)

$|CP| = ((36-7)^2 + (41+4)^2)^{½} = 53.5 = r$ =>

不，r = 52 的圆不经过点 P。

$|CQ| = ((50-7)^2 + (-30+4)^2)^{½} = 50.2 = r$ =>

不，r = 52 的圆不经过点 Q。

2A.027

C(-3,2) 和 r = 4   =>

$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$

如果从 C 到该点的距离满足毕达哥拉斯法则，即如果
距离^2 = 16，则 P(1,4) Q(-5,-4) R(1,2) 位于圆上

P(1,4) $(1-(-3))^2 + (4-2)^2 = 20$ =>   不

Q(-5,-4) $(-5-(-3))^2 + (-4-2)^2 = 40$ =>   不

R(1,2) $(1-(-3))^2 + (2-2)^2 = 16$ =>   是的

圆周 $= 2\pi r = 2\pi \cdot 4 = 8\pi \approx 25.1$

$A = \pi r^2 = \pi \cdot 16 = 16\pi \approx 50.3$

2A.028

C(2,5) 和 P(-3,-7)

圆方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

在哪里 $(a,b)=(2,5)$

并且 |CP| 是半径 => 毕达哥拉斯：

$|CP|^2=(-3-2)^2+(-7-5)^2=169=13^2=r^2$

所以在这里 $(x-2)^2+(y-5)^2=13^2$

x 轴上的 y = 0，插入：

$(x-2)^2+(0-5)^2=13^2$ ⇔

$x^2-4x-144=0$ ⇔

$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot(-144)}}{2\cdot1}$ ⇔

$x_1\approx 14.2$ 和 $x_2\approx -10.2$ =>

因此与 x 轴相交于点（-10.2 , 0）和（14.2 , 0）

y 轴上的 x = 0，插入：

$(0-2)^2+(y-5)^2=13^2$ ⇔

$y^2-10y-140=0$ ⇔

$y=\frac{10\pm\sqrt{100-4\cdot1\cdot(-140)}}{2\cdot1}$ ⇔

$y_1\approx 17.8$ 和 $y_2\approx -7.85$ =>

因此与 y 轴相交于点（0 , -7.85）和（0 , 17.8）

2A.029

$x^2 - x + y^2 + y = 5$ ⇔

$(x^2 - x + \frac{1}{4}) + (y^2 + y + \frac{1}{4}) = \frac{20}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ⇔

$(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{11}{2}$ =>

$C(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

穿过 $C(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 并垂直于切线（$y = \frac{4}{3}x + \frac{23}{6}$）的线 n 的斜率 $a = -\frac{3}{4}$（自从 $\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -1$），方程：

公式 $y = a(x - x_1) + y_1$ =>

这里 $y = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)$ ⇔

$y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$ 这是第 n 行

新圆的切线与直线 n 相交的点是圆上的一个点，因此，需要两个带有两个未知数的方程来找到该点：

$y = \frac{4}{3}x + \frac{23}{6}$ 和 $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$ =>

$\frac{4}{3}x + \frac{23}{6} = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$ ⇔

$\frac{16}{12}x + \frac{9}{12}x = -\frac{184}{48} - \frac{6}{48}$ ⇔

$\frac{25}{12}x = -\frac{190}{48}$ ⇔

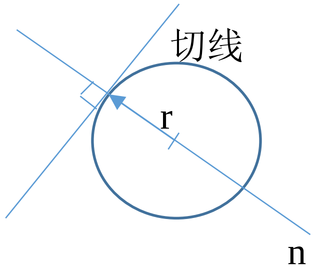
$x = -1.9$ => $y = 1.3$ => 圆上的点：(-1.9 , 1.3)

那么半径²将是 $(-1.9-0.5)^2+(1.3+0.5)^2=9$

和半径 $r=3$

还有圆圈 $(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=3^2$

粗略的草图：



2A.030

表格中的精确数字：

$\cos 60° = \frac{1}{2} = 0.5$ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ $\sin 30° = \frac{1}{2} = 0.5$

$\cos 90° = 0$ $\sin 90° = 1$

来自 CAS 的十进制数：

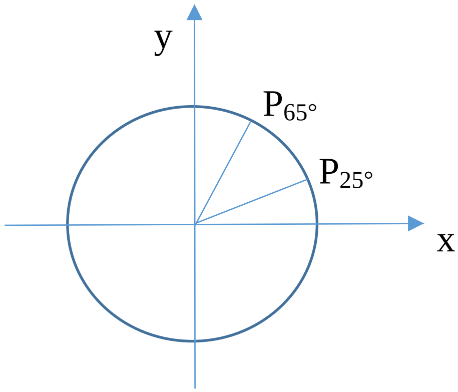
$\cos 100° \approx -0.174$ $\sin 100° \approx 0.985$

$\cos 135° \approx -0.707$ $\sin 135° \approx 0.707$

2A.031

$P_{65°} = (\cos 65°, \sin 65°) \approx (0.423, 0.906)$

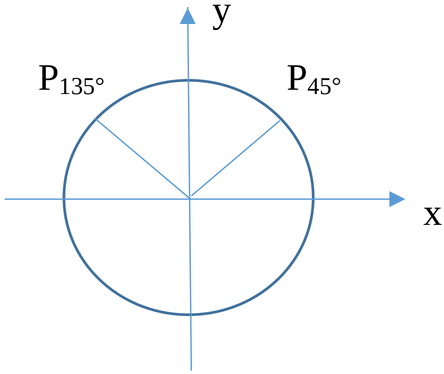
$P_{25°} = (\cos 25°, \sin 25°) \approx (0.906, 0.423)$



2A.032

$P_{45°}$ = (cos 45° , sin 135°) ≈ (0.707 , 0.707)

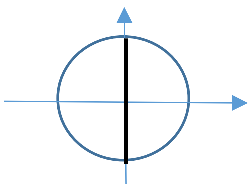
$P_{135°}$ = (cos 135° , sin 135°) ≈ (-0.707 , 0.707)



2A.033

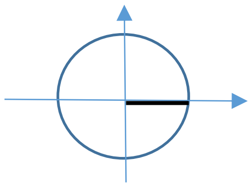
cos v = 0 =>

v = $\cos^{-1}$ 0 = 90° or 270°



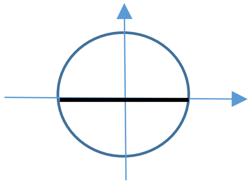
cos v = 1 =>

v = $\cos^{-1}$ = 0°



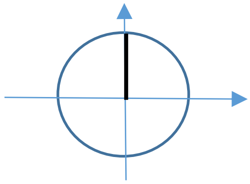
$\sin v = 0 \quad =>$

$v = \sin^{-1} 0° = 0° \text{ or } 180°$



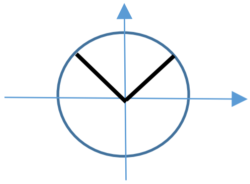
$\sin v = 1 \quad =>$

$v = \sin^{-1} 1 = 90°$



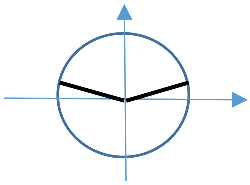
$\sin v = 0.707 \qquad =>$

$v = \sin^{-1} 0.707 \approx 45° \text{ or } 135°$



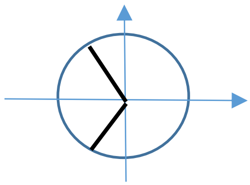
$\sin v = 0.342 \qquad =>$

$v = \sin^{-1} 0.342 \approx 20° \text{ or } 160°$



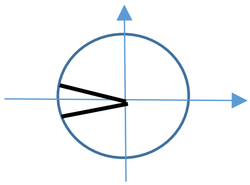
$\cos v = - 0.5 \qquad =>$

$v = \cos^{-1} (- 0.5) = 120° \text{ or } 240°$



$\cos v = - 0.94 \qquad =>$

$v = \cos^{-1} (– 0.94) \approx 160° \text{ or } 200°$



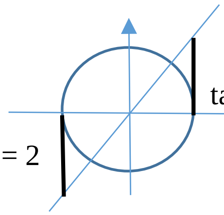
2A.034

$\tan 20° \approx 0.364$ $\qquad$ $\tan 100° \approx - 5.67$

$\sin 20° \approx 0.342$ $\qquad$ $\cos 135° \approx - 0.707$

2A.035

CAS: $\tan^{-1} 2 \approx 63.4°$ or $243.4°$



2A.036

$$\frac{\text{角度（弧度）}}{2\pi} = \frac{\text{角度（以度为单位）}}{360} \Rightarrow \text{这里：} v_{\text{弧度}} = \frac{2\pi \cdot 45}{360} = \frac{\pi}{4}\text{弧度}$$

$$\frac{\text{角度（弧度）}}{2\pi} = \frac{\text{角度（以度为单位）}}{360} \Rightarrow \text{这里：} v_{\text{弧度}} = \frac{2\pi \cdot 90}{360} = \frac{\pi}{2}\text{弧度}$$

2A.037

$$\frac{\text{角度（弧度）}}{2\pi} = \frac{\text{角度（以度为单位）}}{360} \Rightarrow \text{这里：} v_{\text{度}} = \frac{360 \cdot \frac{\pi}{3}}{2\pi} = 60°$$

$$\frac{\text{角度（弧度）}}{2\pi} = \frac{\text{角度（以度为单位）}}{360} \Rightarrow \text{这里：} v_{\text{度}} = \frac{360 \cdot \frac{3\pi}{4}}{2\pi} = 135°$$

2A.038

$360°$ 或者 2π 弧度

2A.039

$180° = \pi$ 弧度

则： 弧长 = 角度 • 半径 =>

其中：　　弧长 ＝ π • 40　　　　⇔

弧长 ≈ 126米

2A.040

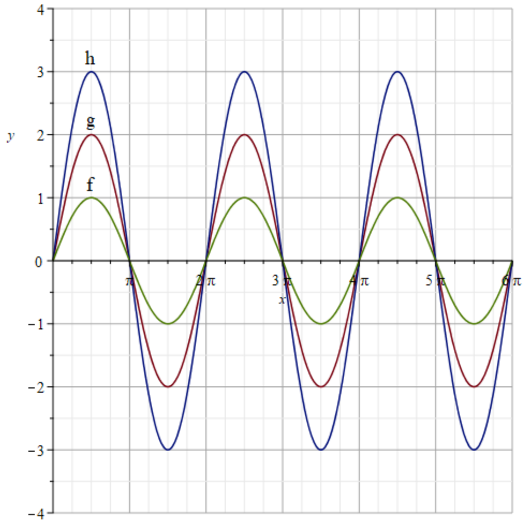
$$v_{\text{弧度}} = \frac{2\pi \cdot 270}{360} = \frac{3\pi}{2}\text{弧度}$$

则：　　弧长 ＝ 角度 • 半径　　　　=>

其中：　　弧长 $= \frac{3\pi}{2} \cdot 0.8$　　　　⇔

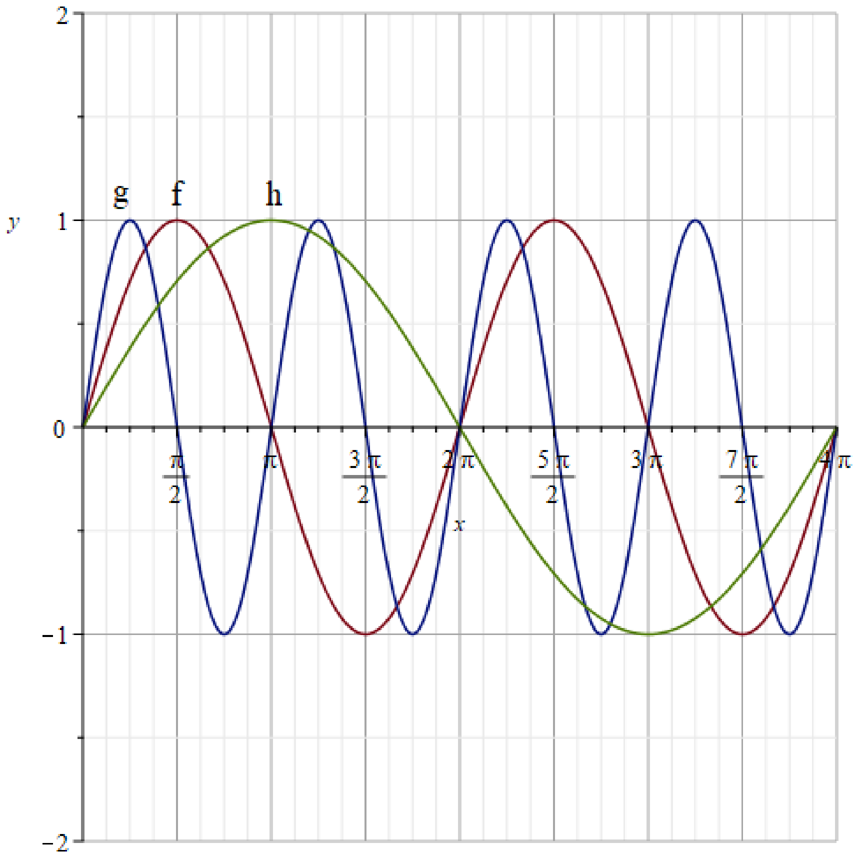
弧长 ≈ 3.77米

2A.041



f = sin x	振幅 ＝ lal = 1	时期 ＝ 2π
g = 2sin x	振幅 ＝ lal = 2	时期 ＝ 2π
h = 3sin x	振幅 ＝ lal = 3	时期 ＝ 2π

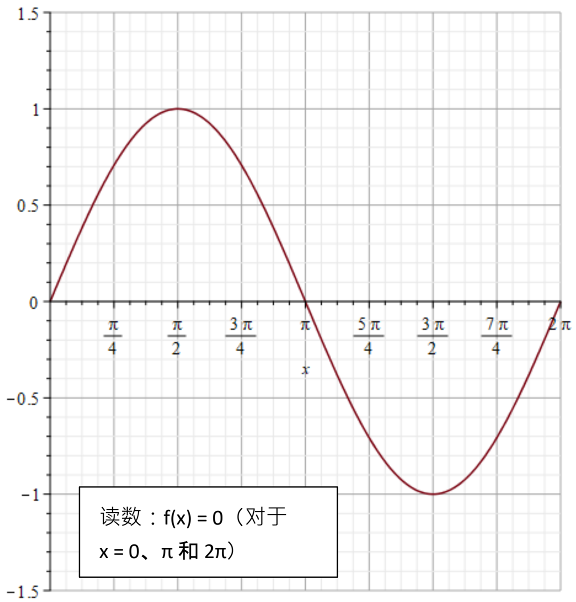
2A.042



f = sin x	振幅 = |a| = 1	时期 = 2π
g = sin 2x	振幅 = |a| = 1	时期 = π
h = $\sin\frac{1}{2}x$	振幅 = |a| = 1	时期 = 4π

2A.043

$f(x) = \sin x$ 为了 $0 \le x \le 2\pi$

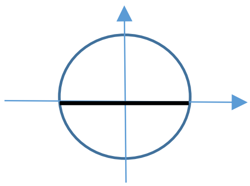


计算:

$f(x) = 0$ =>

$\sin x = 0$ =>

$x = \sin^{-1} 0 = 0$ 和 π 和 2π

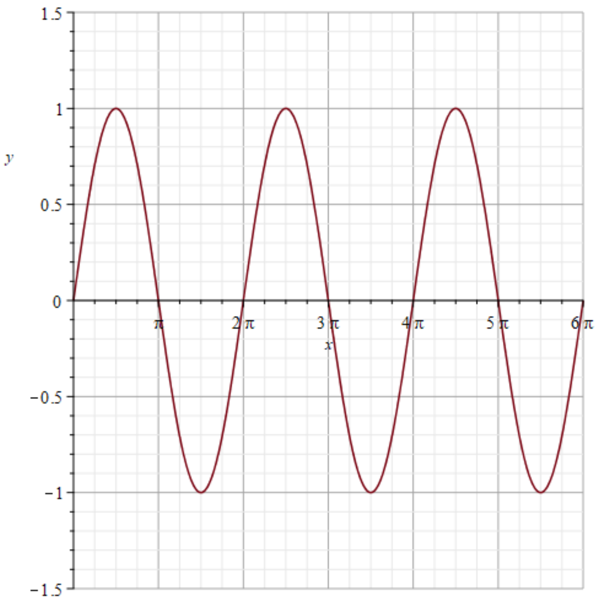


（有些 CAS 只显示一种解，因此最好使用如图所示的单位圆）。

读数和计算符合要求。

2A.044

$f(x) = \sin x$ 为了 $0 \leq x \leq 6\pi$



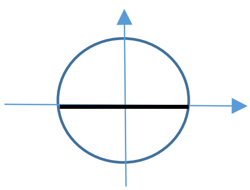
在这里，我们读到 x = 0 和 π 和 2π 定期添加更多。

计算:

$f(x) = 0$ =>

sin x = 0 =>

x = $\sin^{-1}$ 0 rad = 0 和 π 和 2π



某些 CAS 只显示一种解，因此对于一个周期，必须从如图所示的单位圆观察解。对于更多周期，我们必须使用整数（整数（负、零和正））p（p 代表周期）进行扩展，这里是从 0 到 6：

$x = p\pi$ 其中 p 是 0 到 6 之间的整数

这是完整的答案。

或者使用集合论中的符号：

$x = p\pi$ 在哪里 $p \in Z$ 在区间内 [0 , 6]

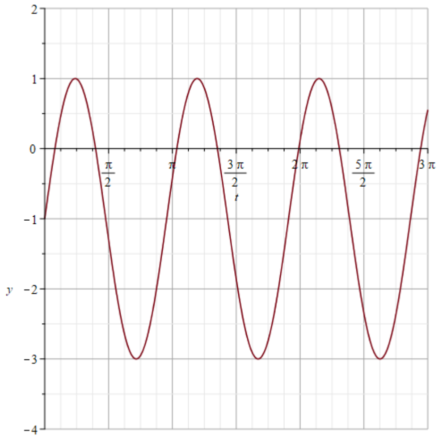
Z是所有整数的符号。

读数和计算符合要求。

2A.045

$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad => \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3} \qquad =>$

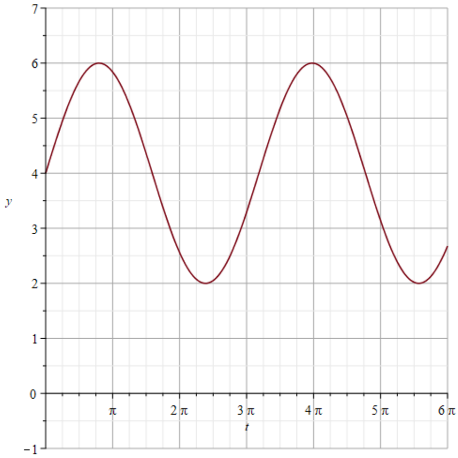
$f(t) = 2 \cdot \sin(\frac{2\pi}{3}t) - 1$



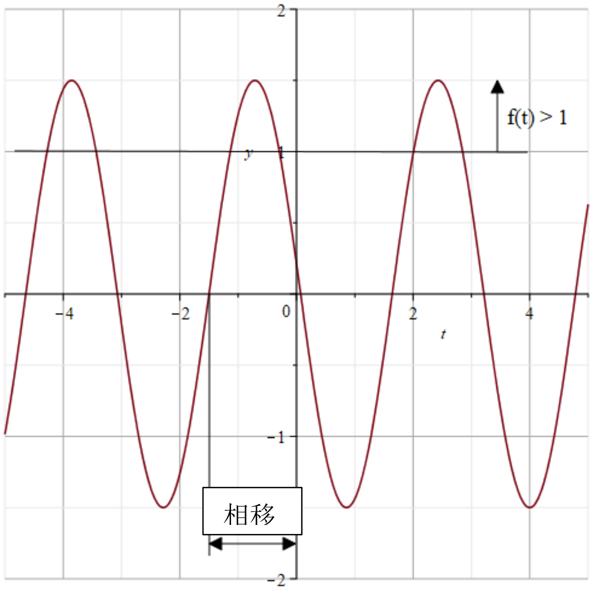
2A.046

$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad => \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \qquad =>$

$f(t) = 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{5}t) + 4$



2A.047



$$相移 = -\frac{\varphi}{\omega} = -\frac{3}{2} = -1.5$$ 遵守

这段时期大约读作： $T \approx 3.1$ （例如从上到上）

期间计算： $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ 遵守

2A.048

$f(t) = 1.5 \cdot \sin(2t + 3)$

插入点（5.5 ， 1.5） =>

$1.5 = 1.5 \cdot \sin(2 \cdot 5.5 + 3)$ ⇔

$1.5 = 1.5$ 真 => 是

2A.049

$2 + (\tan x)^2 = 2 + \tan x$ 在哪里 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ⇔

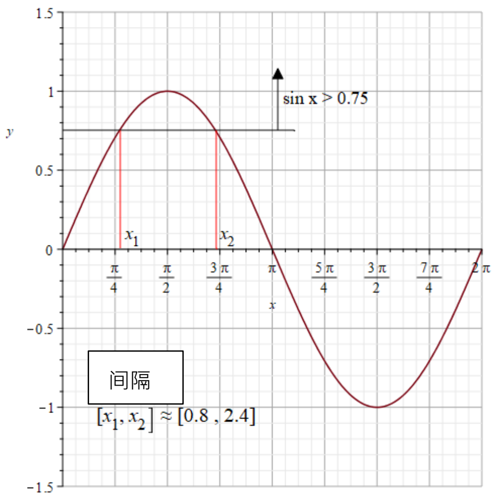
$(\tan x)^2 - \tan x = 0$ ⇔

$\tan x(\tan x - 1) = 0$ ⇔

$\tan x = 0$ 或者 $\tan x = 1$ =>

$x = 0$ 或者 $x = \frac{\pi}{4}$

2A.050



$\sin x = 0.75$ ⇔

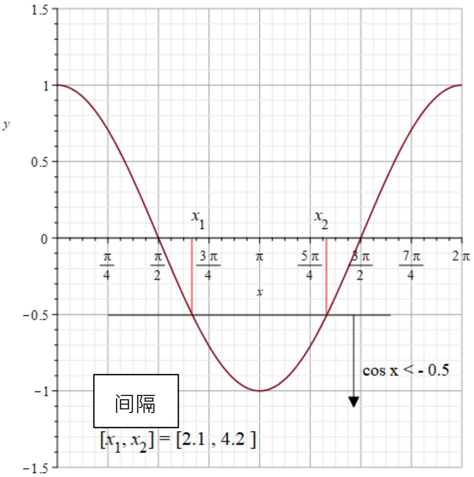
$x_1 = sin^{-1}0.75 \approx 0.85$ 并且由于对称性：

$x_2 = \pi - 0.85 = 2.29$ =>

间隔: $[x_1 , x_2] \approx [0.85 , 2.29]$

考虑到这里的阅读是不确定的，我们可以得出结论，存在合规性。

2A.051



$\cos x = -0.5$ ⇔

$x_1 = cos^{-1}(-0.5) \approx 2.09$ 并且由于对称性：

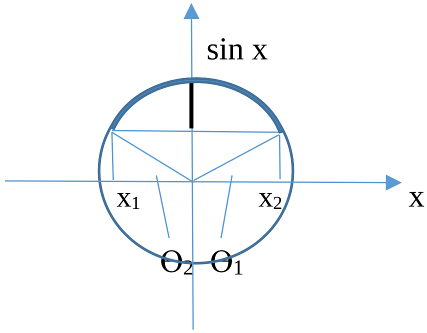
$x_2 - \pi = \pi - x_1$ ⇔

$x_2 = \pi + \pi - x_1 = 2\pi - 2.09 \approx 4.19$ =>

间隔: $[x_1 , x_2] \approx [2.09 , 4.19]$

考虑到这里的阅读是不确定的，我们可以得出结论，存在合规性。

2A.052



x_1被读取为大约 - 0.9

x_2被读取为大约 0.9 =>

领域 ≈]- 0.9 , 0.9[

$\sin\theta = 0.5$ =>

$\theta = \frac{\pi}{6}(30°)$ 或者 $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (150°) =>

$\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ 和 $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$

$x_1 = \cos\frac{5\pi}{6}$ 和 $x_2 = \cos\frac{\pi}{6}$ ⇔

$x_1 \approx -0.866$ 和 $x_2 \approx 0.866$ =>

领域 $=]-0.866\,, 0.866\,[$

2A.053

求解以下方程 $0 \leq x \leq \pi$

$1 = \frac{3\sin x + 1}{4(\sin x)^2 + 1}$ ⇔

$4(\sin x)^2 + 1 = 3\sin x + 1$ ⇔

$4(\sin x)^2 - 3\sin x = 0$ ⇔

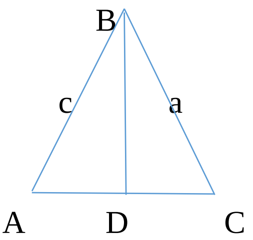
$\sin x\,(4\sin x - 3) = 0$

并使用零解:

$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ 或者 $\quad x = \pi$

$4\sin x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x \approx 0.848$ 或者 $\quad x \approx 2.29$

2A.054



我们绘制线 BD，其中 D = 90° =>

$\cos 70° = \frac{|AD|}{15} \quad \Leftrightarrow \quad |AD| \approx 5.13 \quad =>$

$|AC| = 2 \cdot 5.13 = 10.26$

$sin\frac{B}{2} = \frac{|AD|}{15} = \frac{5.13}{15} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{B}{2} = sin^{-1}\left(\frac{5.13}{15}\right) \quad \Leftrightarrow \quad$ B = 40°

控制: 70 + 70 + 40 = 180 好的.

$\tan A = \frac{|BD|}{|AD} \quad =>$

$|BD| = \tan A \cdot |AD| \quad =>$

$|BD| = \tan 70° \cdot 5.13 \approx 14.09$

2A.055

余弦规则适用：

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{12^2+9^2-6^2}{2 \cdot 12 \cdot 9} \approx 0.875 \quad => \quad$ A = 29°

$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{6^2+12^2-9^2}{2 \cdot 6 \cdot 12} \approx 0.6875 \quad => \quad$ A ≈ 46.6°

$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{6^2+9^2-12^2}{2 \cdot 6 \cdot 9} \approx -0.25$ => $B \approx 104.4°$

控制: 29 + 46.6 + 104.4 = 180 好的.

2A.056

余弦法则 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cosB$

这里 $b^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot cos\, 55°$ =>

$b \approx 6.57$

正弦法则 $\frac{b}{sinB} = \frac{a}{\sin A}$

这里 $\frac{6.57}{sin55°} = \frac{5}{\sin A}$ ⇔ $\sin A \approx 0.623$ =>

$A \approx 38.6°$

$C \approx 180 - 55 - 38.6 = 86.4°$

2A.057

$\frac{sinC}{c} = \frac{sinB}{b}$ ⇔ $sinC = \frac{c}{b} sinB$ =>

$sinC = \frac{6}{7} sin80°$ ⇔

$C \approx 57.6°$

$A = 180 - 80 - 57.6 = 42.4°$

$\frac{b}{sinB} = \frac{a}{\sin A}$ => $\frac{7}{sin80°} = \frac{a}{\sin 42.4°}$ ⇔

$a \approx 4.8$

区域 $= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sinC = \frac{1}{2} \cdot 4.8 \cdot 7 \cdot sin57.6 = 14.2$

2A.058

面积与两条边长成正比。 =>

d = 14 b = 16 c = 18

2A.059

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cosA$ ⇔

$c^2 - 2bc \cdot cosA + b^2 - a^2 = 0$ =>

$c^2 - (2 \cdot 2.7 \cdot cos45°)c + (2.7^2 - 2.3^2) = 0$ ⇔

$c^2 - 3.8c + 2 = 0$ ⇔

$c = \frac{3.8 \pm \sqrt{3.8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$ ⇔

$c = \frac{3.8 \pm 2.54}{2}$ ⇔

$c_1 = 0.63$ 或者 $c_2 = 3.17$

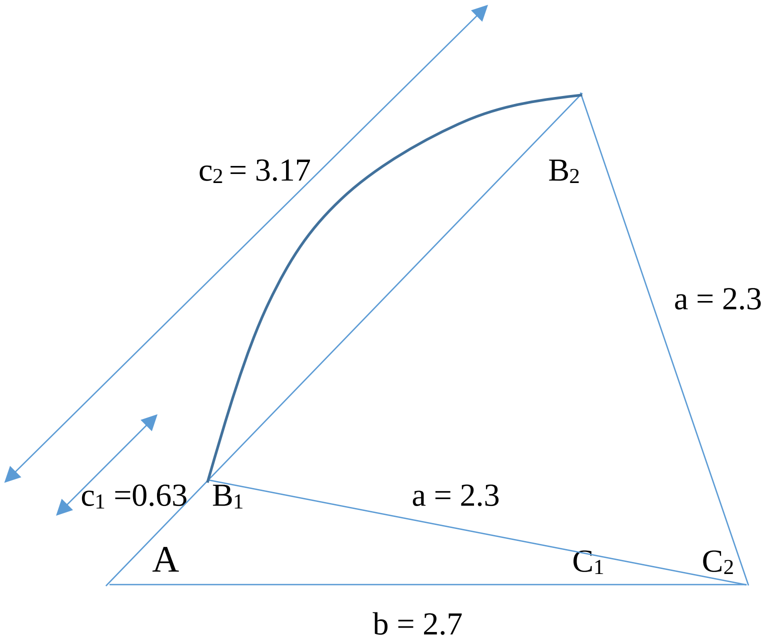
一个有两个解决方案的“棘手三角”。

$$\cos B_1 = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{2.3^2+0.63^2-2.7^2}{2\cdot 2.3\cdot 0.63} \approx -0.553 \Rightarrow \quad B_1 \approx 123.6°$$

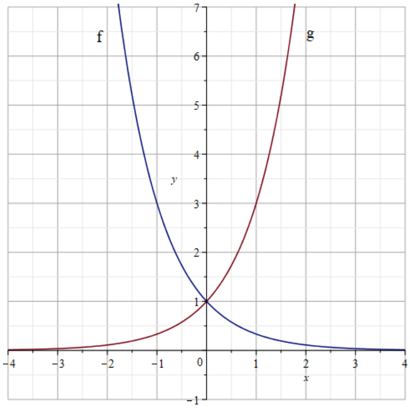
$$\cos B_2 = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{2.3^2+3.17^2-2.7^2}{2\cdot 2.3\cdot 3.17} \approx 0.552 \quad \Rightarrow \quad B_2 \approx 56.5°$$

$$C_1 = 180 - 45 - 123.6 = 11.4°$$

$$C_2 = 180 - 45 - 56.5 = 78.5°$$



2A.060



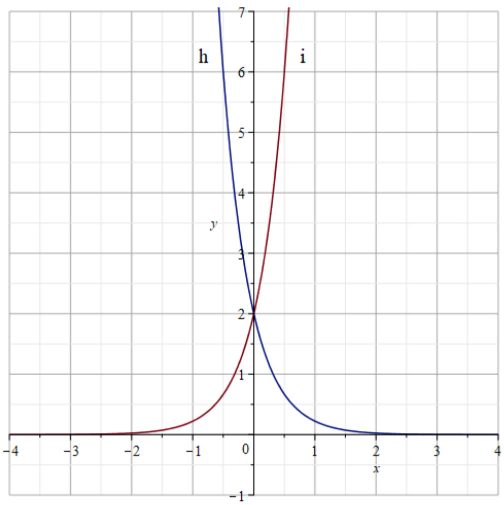
f 呈指数递减并渐近逼近 x 轴（沿 x 正方向）。

g 在 x 正方向上呈指数增加，在 x 负方向上渐近逼近 x 轴。

两者都经过点(0, 1)

它们绕 y 轴对称。

2A.061



h 以比 f 更大的数值斜率（在 2A.060 中）呈指数递减，并且渐近地接近 x 轴（在正 x 方向）。

i 在正 x 方向上以比 g 更大的数值斜率呈指数增加，并在负 x 方向上渐近地接近 x 轴。

两者都经过点(0, 2)

它们绕 y 轴对称。

2A.062

公式　$K_n = K_0(1+r)^n$

这里　$K_n = 40\,000(1+0.06)^4 = 50\,499$ dollars

2A.063

$f(x) = b \cdot a^{kx}$　　在哪里

$a = (1+r) = (1+10\%) = (1+0.1) = 1.1$　　和

$f(0) = b \cdot a^{k \cdot 0} = b \cdot 1 = 1.5$　=>　b = 1.5　和

$f(1) = 1.5 \cdot 1.1^{k \cdot 1} = 1.65$　=>　k = 1　=>

$f(x) = 1.5 \cdot 1.1^x$

2A.064

$f(y) = b \cdot a^{ky}$　　在哪里

$a = (1+r) = (1-10\%) = (1-0.1) = 0.9$　　和

$f(0) = b \cdot a^{k \cdot 0} = b \cdot 1 = 1.5$　=>　b = 1.5　和

$f(1) = 1.5 \cdot 0.9^{k \cdot 1} = 1.35$ => k = 1 =>

$f(y) = 1.5 \cdot 0.9^{y}$

Or:

$f(y) = b \cdot a^{ky}$ => $f(y) = b \cdot c^{y}$ 在哪里

$c = (1 + r) = (1 - 10\%) = (1 - 0.1) = 0.9$ 和

$f(0) = b \cdot c^{0} = b \cdot 1 = 1.5$ => b = 1.5 和

$f(y) = 1.5 \cdot 0.9^{y}$

2A.065

$f(x) = b \cdot a^{kx}$ => 插入点：

$f(0) = 4 = b \cdot a^{k \cdot 0}$ ⇔ $b = 4$ 因为 $a^{k \cdot 0} = 1$

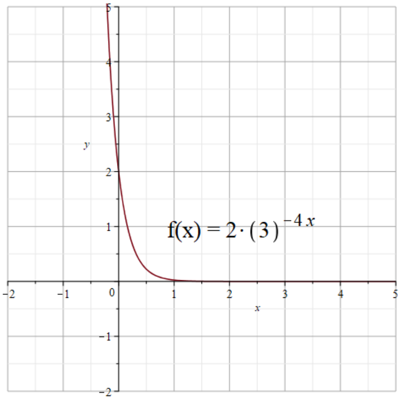
$f(1) = 9 = 4 \cdot a^{k \cdot 1}$ ⇔ $a^{k} = \frac{9}{4}$

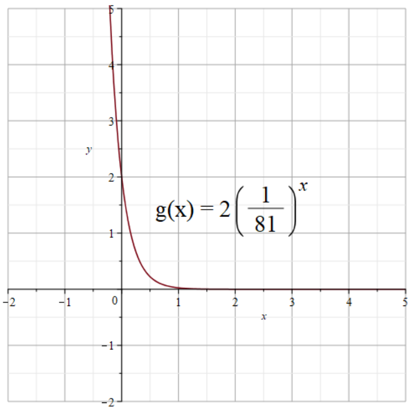
所以： $f(x) = 4\left(\frac{9}{4}\right)^{x}$ b 是 4 a 是 $\frac{9}{4}$ (k **是** 1)

或者与 $a^{k} = c$：

$f(x) = b \cdot c^{x}$ => $f(x) = 4\left(\frac{9}{4}\right)^{x}$ b 是 4 a 是 $\frac{9}{4}$

2A.066





遵守。

2A.067

$f(x) = 2 \cdot e^{0.4 \cdot x} = 2(e^{0.4})^x \approx 2 \cdot 1.49^x$

$g(x) = (-0.5) \cdot e^{(-0.27) \cdot x} = (-0.5) \cdot (e^{-0.27})^x \approx (-0.5) \cdot 0.76^x$

$h(x) = 3 \cdot e^{(-1.3) \cdot x} = 3(e^{-1.3})^x \approx 3 \cdot 0.27^x$

2A.068

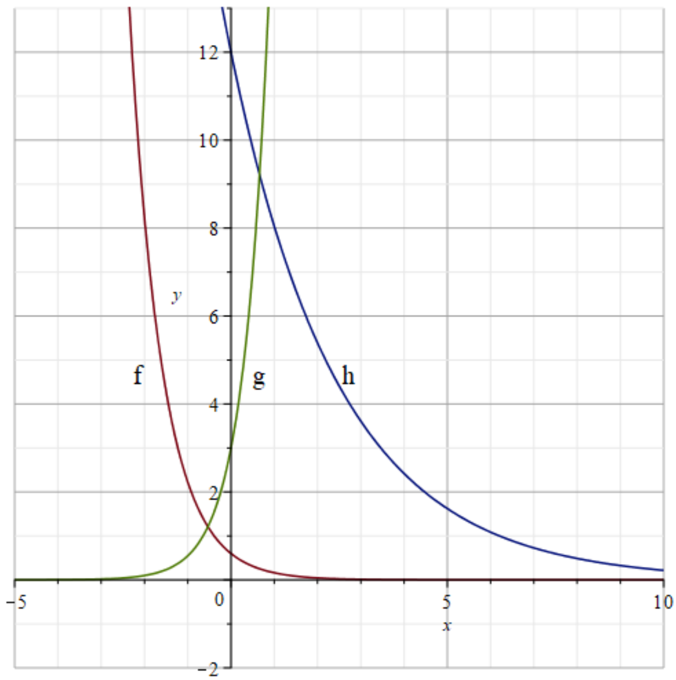
$f(x) = 0.6 \cdot e^{(-1.3)\cdot x} = 0.6 \cdot (e^{-1.3})^x \approx 0.6 \cdot 0.27^x$ 减少

$g(x) = 3 \cdot e^{1.7\cdot x} = 3(e^{1.7})^x \approx 3 \cdot 5.47^x$ 增加

$h(x) = 12 \cdot e^{(-0.4)\cdot x} = 12 \cdot (e^{-0.4})^x \approx 12 \cdot 0.67^x$ 减少

负指数使函数减小，这是在缩短之前观察到的。缩短后观察到碱基数小于1。

f(x) 减小最多，直到接近 x 轴。



2A.069

公式 $y = b \cdot a^{k\cdot x}$ 这里 $N = 150 \cdot e^{0.6\cdot t}$

为了 t = 0 $N_0 = 150 \cdot e^{0.6\cdot 0} = 150$

参考教材第143页：

$$t_{双倍的} = \frac{1}{k} \cdot ln\left(\frac{N_{双倍的}}{N_0}\right) = \frac{1}{0.6} \cdot ln\left(\frac{300}{150}\right) \approx 1.16\ h$$

或者使用 $T_2 = \frac{ln\,2}{ln\,a^k}$ =>

这里为公式的 a^k 插入 $e^{0.6}$： $T_{双倍的} = \frac{ln\,2}{ln\,e^{0.6}} \approx 1.16\ h$

$10\,000 = 150 \cdot e^{0.6 \cdot t} \quad \Leftrightarrow \quad e^{0.6 \cdot t} = \frac{10\,000}{150} \approx 66.7 \quad \Leftrightarrow$

$0.6 \cdot t = ln\,66.7 \quad \Leftrightarrow \quad t =$ 7 小时

2A.070

符号 ≈ 表示使用了 CAS。

$$log\,4 + log5 = log(4 \cdot 5) = log20 \approx 1.3$$

$$log\left(\frac{3}{4}\right) + log\left(\frac{4}{5}\right) = log\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}\right) = log\left(\frac{3}{5}\right) \approx -0.22$$

$$log\,4 - log5 = log\left(\frac{4}{5}\right) \approx -0.097$$

$$log\left(\frac{3}{4}\right) - log\left(\frac{4}{5}\right) = log\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}}\right) = log\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}\right) = log\left(\frac{15}{16}\right) \approx -0.028$$

2A.071

$$ln\,4 + ln5 = ln(4 \cdot 5) = ln20 \approx 3$$

$$ln\left(\frac{3}{4}\right) + ln\left(\frac{4}{5}\right) = ln\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}\right) = ln\left(\frac{3}{5}\right) \approx -0.51$$

$ln\,4 - ln5 = ln\left(\frac{4}{5}\right) \approx -0.22$

$ln\left(\frac{3}{4}\right) - ln\left(\frac{4}{5}\right) = ln\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}}\right) = ln\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}\right) = ln\left(\frac{15}{16}\right) \approx -0.064$

2A.072

$ln(e \cdot e^3) = ln\,e^4 = 4\,ln\,e = 4$

$log(e \cdot e^3) = log\,e^4 = 4\,log\,e \approx 4 \cdot 0.434 \approx 1.74$

$4\,ln\,e^{4-1} = 4\,ln\,e^3 = 4 \cdot 3ln\,e = 4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$

$4\,ln\,e^4 + 4\,ln\,e^3 = 4 \cdot 4ln\,e + 3 \cdot 4\ln e = 16 \cdot 1 + 12 \cdot 1 = 28$

2A.073

$3^{2x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad ln\,3^{2x} = ln\,4 \quad \Leftrightarrow$

$2x \cdot ln\,3 = ln\,4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \frac{ln4}{ln3} \quad \Leftrightarrow$

$2x \approx 1.26 \quad \Leftrightarrow \quad x \approx 0.63$

Or:

$3^{2x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad log\,3^{2x} = log\,4 \quad \Leftrightarrow$

$2x \cdot log\,3 = log\,4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \frac{log4}{log3} \quad \Leftrightarrow$

$2x \approx 1.26 \quad \Leftrightarrow \quad x \approx 0.63$

$3^{-2x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad ln\,3^{-2x} = ln\,4 \quad \Leftrightarrow$

$(-2x) \cdot ln\,3 = ln\,4 \quad \Leftrightarrow \quad -2x = \frac{ln4}{ln3} \quad \Leftrightarrow$

$-2x \approx 1.26 \quad \Leftrightarrow \quad x \approx -0.63$

$ln\ 3x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad e^{ln3x} = e^4 \quad \Leftrightarrow$

$3x = e^4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{e^4}{3} \approx 18.2$

$ln\ 3x + 2 = ln\ 4 \quad \Leftrightarrow \quad ln\ 3x = ln\ 4 - 2 \quad \Leftrightarrow$

$e^{ln3x} = e^{ln4-2} \quad \Leftrightarrow \quad 3x = e^{ln4} \cdot e^{-2} \quad \Leftrightarrow$

$3x = 4 \cdot e^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{3 \cdot e^2} \approx 0.18$

2A.074

$\log(2-2x) = ln\ e^2 \quad \Leftrightarrow \quad \log(2-2x) = 2 \quad \Leftrightarrow$

$2 - 2x = 10^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{100-2}{-2} = -49$

通过插入原始方程 => 定义根来进行控制。

$\log(2x+6) = -0.3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 6 = 10^{-0.3} \quad \Leftrightarrow$

$2x = 10^{-0.3} - 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \approx -2.75$

控制：根已定义。

$\ln x + \ln(x-1) = 2ln\ 2 \quad \Leftrightarrow$

$\ln\big(x(x-1)\big) = ln\ 2^2 \quad \Leftrightarrow$

$e^{\ln(x(x-1))} = e^{ln4} \quad \Leftrightarrow$

$x^2 - x = 4$ ⇔

$x^2 - x - 4 = 0$ ⇔

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2 \cdot 1}$ ⇔

$x \approx 2.56$ (另一个根：x = - 1.56 未定义)

2A.075

$ln\,x - ln(x-1) = ln\,2$ ⇔

$ln\frac{x}{x-1} = ln\,2$ ⇔

$\frac{x}{x-1} = 2$ ⇔

$x = 2x - 2$ ⇔

$x = 2$ 控制：根已定义。

$ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + l\,n(x+4) + 2 = 2$ ⇔

$ln\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot (x+4)\right) = 0$ ⇔

$\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot (x+4)\right) = e^0 = 1$ ⇔

$x + 4 + 1 + \frac{4}{x} = 1$ ⇔

$x^2 + 4x + 4 = 0$ ⇔

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$ ⇔

$x = -2$ 控制：根已定义。

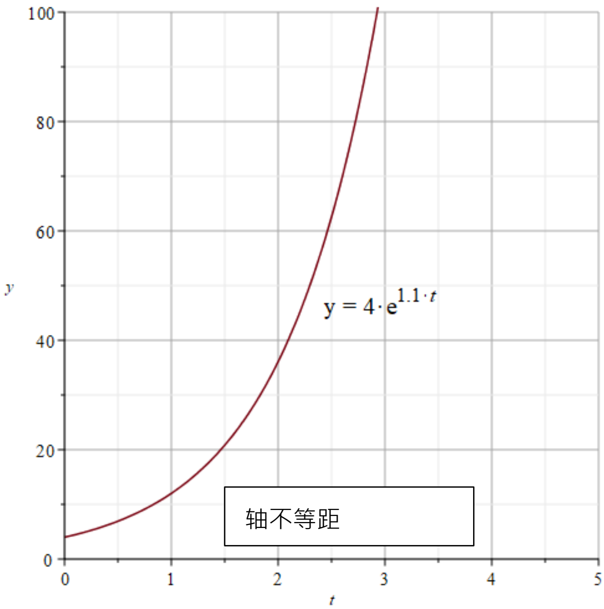
2A.076

$y = 4 \cdot e^{1.1 \cdot t} \quad \Leftrightarrow \quad e^{1.1 \cdot t} = \frac{y}{4} \quad \Leftrightarrow$

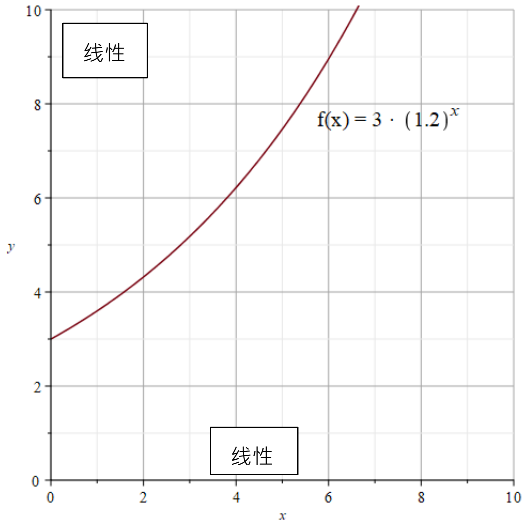
$\ln e^{1.1 \cdot t} = \ln \frac{y}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 1.1t = \ln \frac{y}{4} \quad \Leftrightarrow$

$t = \frac{1}{1.1} \cdot \ln \frac{y}{4}$

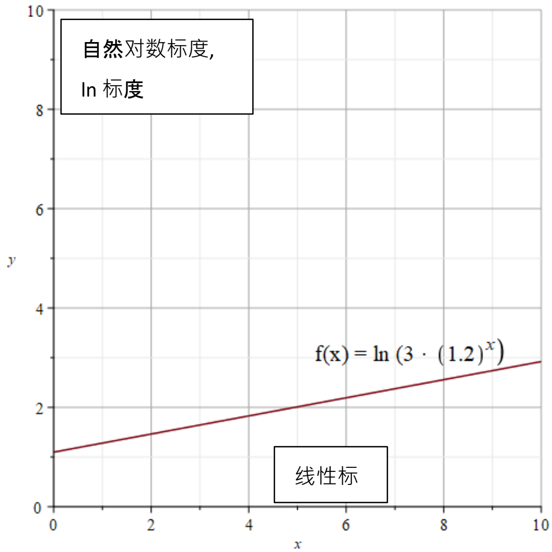
$T_2 = \frac{\ln 2}{\ln a^k}$ 这里： $T_2 = \frac{\ln 2}{\ln e^{1.1}} \approx 0.63$



2A.077

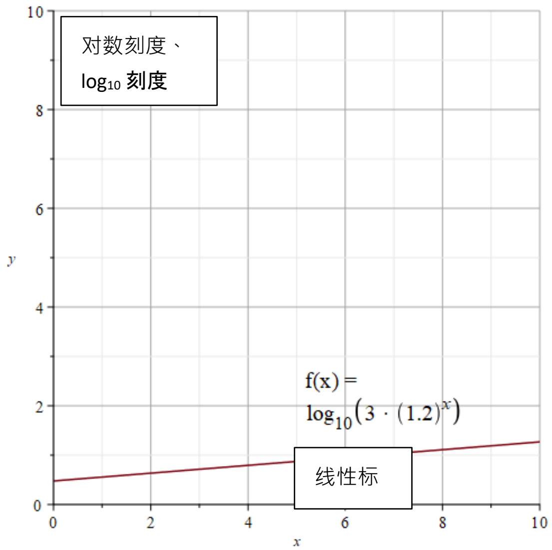


阅读例如：x = 0 => f(x) ≈ 3 和 x = 6 => f(x) ≈ 9



阅读例如： x = 0 => ln f(x) ≈ 1.1 => f(x) ≈ $e^{1.1}$ ≈ 3

和 x = 6 => ln f(x) ≈ 2.2 => f(x) ≈ $e^{2.2}$ ≈ 9



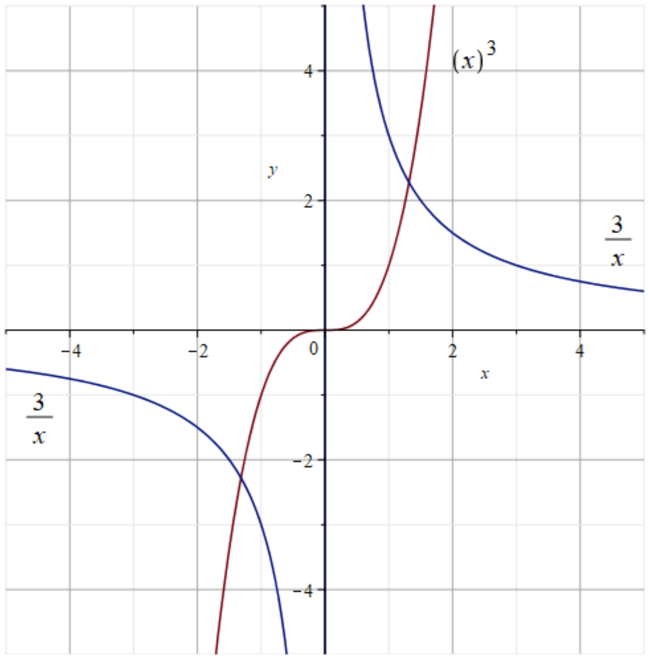
阅读例如： $x = 0 \;=>\; \log f(x) \approx 0.5 \;=>\; f(x) \approx 10^{0.5} \approx 3$

和 $x = 6 \;=>\; \log f(x) \approx 0.95 \;=>\; f(x) \approx 10^{0.95} \approx 9$

将第一个图中的两个读数与其他图中的两个读数进行比较即可得出合规性。

另外，观察到，正常线性图的第一象限中的指数曲线在第二轴(f(x))具有对数刻度的图中变成直线。

2A.078



通过读取交点，可以得出：

(-1.3 ; -2.3) 和 (1.3 ; 2.3)

And by calculation:

$y = \frac{3}{x}$ 和 $y = x^3$ =>

$\frac{3}{x} = x^3 \;\Leftrightarrow\; x^4 = 3 \;\Leftrightarrow\; (x^2)^2 = 3 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 3^{½} \;\Leftrightarrow\; x = \pm(3^{½})^{½}$ =>

$x_1 \approx 1.316$ 和 $x_2 \approx -1.316$ =>

$y_1 \approx 2.28$ 和 $y_2 \approx -2.28$ =>

经计算，交点为：

(1.316 ; 2.28) 和 (-1.316 ; -2.28) 遵守。

第2部分。

B 部分 – 提议的解决方案

2B.01

20 000 的 80% 是 16 m^3

最大限度。每天供应：　$4\,\frac{m^3}{h}\cdot 24$ 小时 $= 96\,m^3$

每天蒸发量：　$20\,m^3$

这对应于 $\frac{16\,000\,m^3}{(96+20)\,\frac{m^3}{天}} \approx$ 138 天 供水。

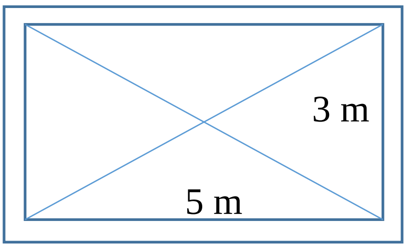
正常干旱三个月后，水量为

$V = (V_{水库} + V_{已收到}) - (V_{提供的} + V_{蒸发了})$　=>

$V = (20\,000\,m^3 + 1000\,m^3)$

$$-\left(4\frac{m^3}{h}\cdot 24\frac{h}{天}\cdot 90\,days + 20\frac{m^3}{天}\cdot 90\,天\right) = 10\,560\,m^3$$

2B.02



我会用卷尺直接测量长度和宽度。

我会通过测量两条对角线来间接检查直角。它们必须相等并测量：

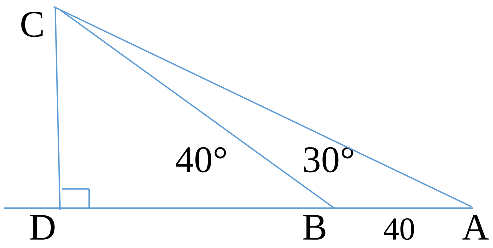
对角线$= \sqrt{5^2+3^2} \approx 5.831$米

2B.03

$tan\, 40° = \frac{高度}{29}$ $\Leftrightarrow$

$高度 = 29 \cdot tan\, 40° = 24.3$ 米

2B.04



我们将顶点命名为 C – 并将基点命名为 D（|CD| = 高度），并形成三个方程：

$tan\, 40° = \frac{|CD|}{|BD|}$ $\quad tan\, 30° = \frac{|CD|}{|AD|}$ $\quad |AD| = |BD| + 40$ $\quad$ =>

$tan\, 40° = \frac{|CD|}{|BD|}$ $\quad tan\, 30° = \frac{|CD|}{|BD|+40}$ $\Leftrightarrow$

$|BD| \cdot tan\, 40° = (|BD| + 40) \cdot tan\, 30°$ $\Leftrightarrow$

$|BD| \approx 0.688 \cdot (|BD| + 40)$ $\Leftrightarrow$

$|BD| \approx 0.688 \cdot |BD| + 27.5$ $\Leftrightarrow$

$|BD| \approx 88.2$ 米

And inserted in the first equation:

$tan\, 40° = \frac{|CD|}{|BD|}$ => $|CD| \approx tan\, 40° \cdot 88.2$

所以： |CD| = 高度 ≈ 74米

2B.05

我们的测量水平面高于海平面五米，并考虑该水平面的三角形。

我们将风车的最高点命名为 C – 基点上方 5 米的点称为 D 。则风车的高度为 |CD| + 5

我们建立三个方程：

$tan\, 28° = \frac{|CD|}{|BD|}$ $tan\, 20° = \frac{|CD|}{|AD|}$ $|AD| = |BD| + 100$ =>

$tan\, 28° = \frac{|CD|}{|BD|}$ $tan\, 20° = \frac{|CD|}{|BD|+100}$ ⇔

$|BD| \cdot tan\, 28° = (|BD| + 100) \cdot tan\, 20°$ ⇔

$|BD| \approx 0.685 \cdot (|BD| + 100)$ ⇔

$|BD| \approx 0.685 \cdot |BD| + 68.5$ ⇔

$|BD| \approx 217$ 米

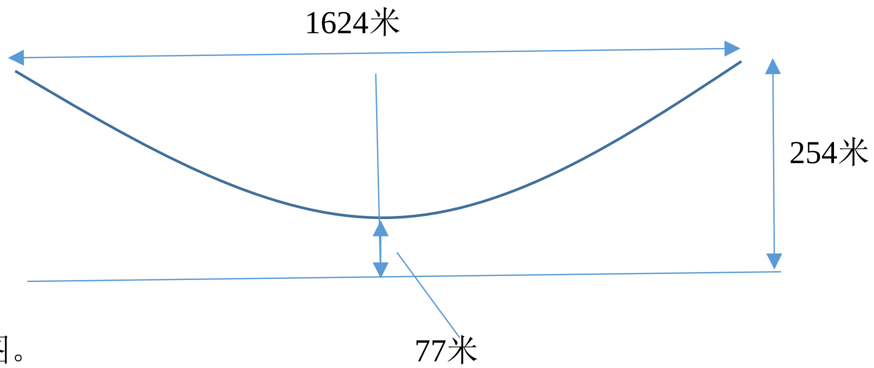
并代入第一个方程：

$tan\, 28° = \frac{|CD|}{|BD|}$ => $|CD| \approx tan\, 28° \cdot 217$

所以：测量装置上方的高度 ≈ 115米 =>

且： |CD| = 海拔高度 ≈ 115 + 5 ≈ 120米

2B.06



原理草图。

抛物线 $y = ax^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$

在哪里 c = 0

和一半 $(254 - 77) = a \cdot 812^2 + b \cdot 812$

而对于另一半 $(254 - 77) = a \cdot (-812)^2 + b \cdot (-812)$

这导致：

$a \cdot 812^2 + b \cdot 812 = a \cdot (-812)^2 + b \cdot (-812)$

这只能适用于 b = 0 =>

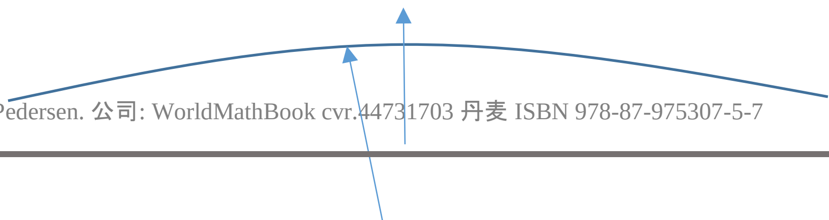
$y = ax^2$ => $(254 - 77) = a \cdot 812^2$ ⇔ $a = 0.000268$ =>

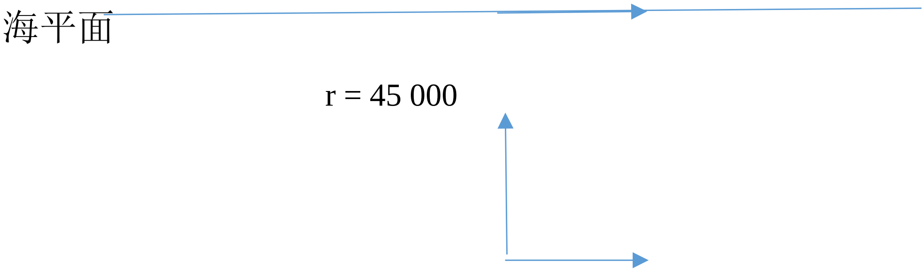
$y = 0.000268 \cdot x^2$

抛物线高77米 => c = 77 =>

$y = 0.000268 \cdot x^2 + 77$

2B.07





原理草图。

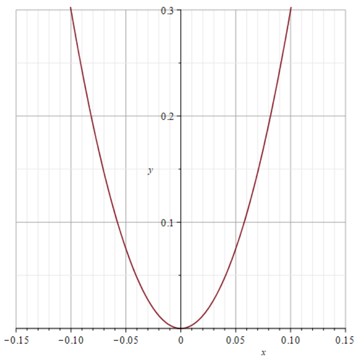
圆圈： $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ =>

(0,0) 在圆心： $(x-0)^2+(y-0)^2=45\,000^2$

(0,0) 在海平面： $(x-a)^2+(y-(-44\,925))^2=45\,000^2$

或者更短： $(x-a)^2+(y+44\,925)^2=45\,000^2$

2B.08



抛物线 $y=ax^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}$ 在哪里 $\mathrm{c}=0$

(-0.1 ; 0.3) 插入： $0.3=a(-0.1)^2+\mathrm{b}(-0.1)$ 方程1

(0.1 ; 0.3) 插入： $0.3=a(0.1)^2+\mathrm{b}(0.1)$ 方程2

具有两个未知数的两个方程：

方程1 $b = \frac{0.3-0.01a}{-0.1} = -3 + 0.1a$ =>

方程2 $0.3 = a(0.1)^2 + (-3 + 0.1a)(0.1)$ ⇔

$0.3 = 0.01a - 0.3 + 0.01a$ ⇔

$0.6 = 0.02a$ ⇔

$a = 30$ =>

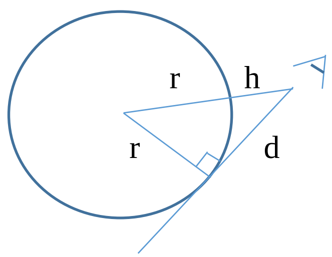
方程1 $b = -3 + 0.1 \cdot 30 = 0$

所以： $y = 30x^2$ 和 $-0.1 \leq x \leq 0.1$

2B.09

我们通过以下公式找到地球的半径：

$O = 2\pi r$ ⇔ $r = \frac{O}{2\pi} = \frac{40\ 000}{2\pi} \approx 6378\ km \approx 6\ 378\ 000\ m$



毕达哥拉斯：

$d^2 + r^2 = (r + h)^2$ ⇔

$d^2 = (r + h)^2 - r^2$

h = 2 m:

$d^2 = 6\ 378\ 002^2 - 6\ 378\ 000^2$ ⇔ $d = 5051\ m \approx 5\ km$

h = 40 m:

$d^2 = 6\ 378\ 040^2 - 6\ 378\ 000^2$ ⇔ $d = 22\ 589\ m \approx 23\ km$

h = 100 m:

$$d^2 = 6\,378\,100^2 - 6\,378\,000^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = 35\,716\,m \approx 36\,km$$

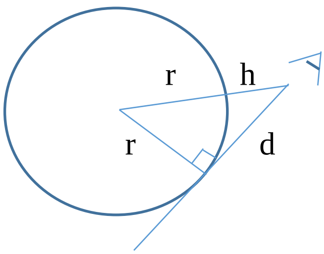
h = 1000 m:

$$d^2 = 6\,379\,000^2 - 6\,378\,000^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = 112\,947\,m \approx 113\,km$$

2B.10

我们通过以下公式找到地球的半径：

$$O = 2\pi r \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{O}{2\pi} = \frac{40\,000}{2\pi} \approx 6378\,km \approx 6\,378\,000\,m$$



毕达哥拉斯：

$$d^2 + r^2 = (r+h)^2 \quad \Leftrightarrow$$

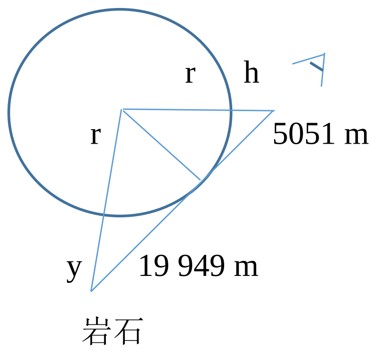
$$d^2 = (r+h)^2 - r^2$$

h = 2 m:

$$d^2 = 6\,378\,002^2 - 6\,378\,000^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = 5051\,m \approx 5\,km$$

以及离岩石更远的距离 = 25 000 – 5051 = 19 949 m

然后我们就可以通过岩石求出我们的视线到大海的距离：



y 是岩石的隐藏高度。

$r^2 + 19\,949^2 = (r+y)^2$ =>

$6\,378\,000^2 + 19\,949^2 = (r+y)^2$ ⇔

$r + y \approx 6\,378\,031$

并插入 r：

$y \approx 6\,378\,031 - 6\,378\,000 \approx$ 31 米

足以隐藏海边的一个小镇）。

2B.11

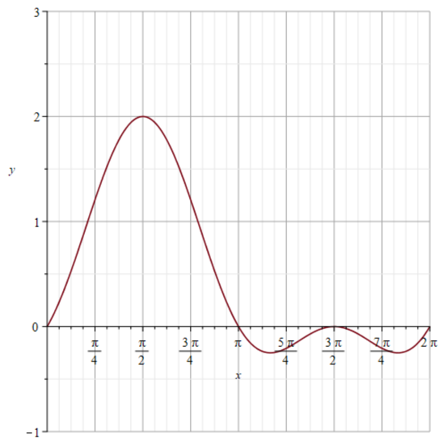
$(\sin x)^2 + \sin x = 0$ 为了 $0 \leq x \leq 2\pi$ ⇔

$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 0$ 和 -1

在一个周期内 $(0 \leq x \leq 2\pi)$ ，对于角度 x = 0、π 和 2π（可以在单位圆中看到），$\sin x = 0$ 发生。

在一个周期内，当 $x = \frac{3\pi}{2}$ 时，$\sin x = -1$ 发生

组合 $x = 0,\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$ 符合图：



2B.12

$(\sin x)^2 + \sin x = 0$　　为了　$0 \le x \le 6\pi$　⇔

$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 0$ 和 -1

在一个周期 $(0 \le x \le 2\pi)$ 中，对于角度 x = 0、 π 和 2π，$\sin x = 0$ 发生

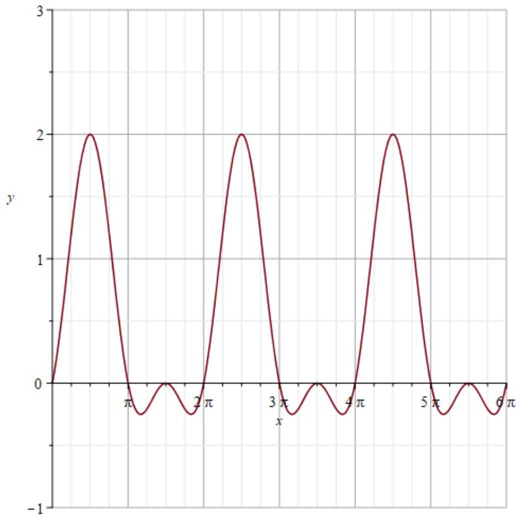
在一个周期内，对于角度 $x = \frac{3\pi}{2}$（可以在单位圆中看到），会发生 $\sin x = -1$ 。

组合 $x = 0,\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$

在三个（或更多）周期中，我们必须使用整数 p（整数）进行展开：

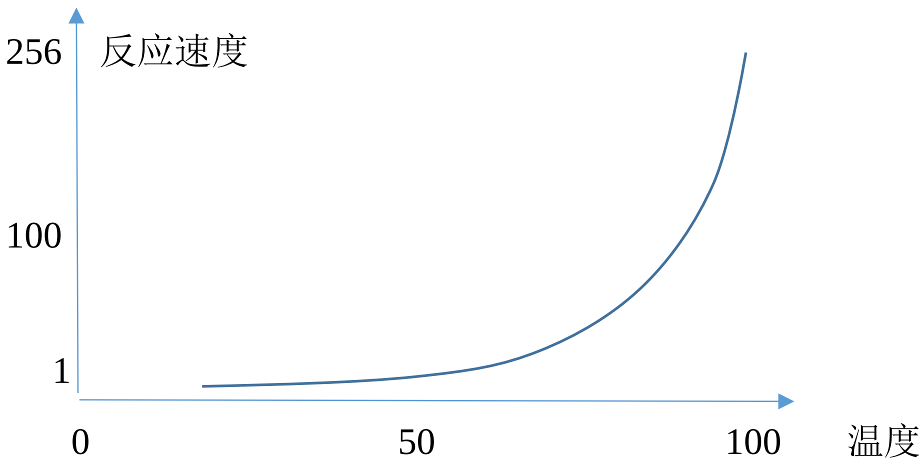
$x = p\pi$ 和 $-\frac{\pi}{2} + 2p\pi$　　这是完整的答案。

读数和计算符合要求。



2B.13

温度	20	30	40	50	60	70	80	90	100	°C
速度	1	2	4	8	16	32	64	128	256	因素



原则上是粗曲线。

它是一个指数函数。

2B.14

温度	20	30	40	50	60	70	80	90	100	°C
速度	1	2	4	8	16	32	64	128	256	因素

公式 $y = b \cdot c^x$ 这里 y = 速度 和 x = 温度

$1 = b \cdot c^{20}$ => $b = \frac{1}{c^{20}}$

$2 = b \cdot c^{30}$ => $b = \frac{2}{c^{30}}$ =>

$\frac{1}{c^{20}} = \frac{2}{c^{30}}$ ⇔ $c^{30} = 2 \cdot c^{20}$

通过CAS或者猜测解决： $c \approx 1.07$ 和 (-1.07) => $c \approx 1.07$

=> $b = 0.25$

所以： $y \approx 0.25 \cdot 1.07^x$

控制： 插入 (100 , 256) =>

$256 \approx 0.25 \cdot 1.07^{100}$ ⇔

$256 \approx 256$ 真的

2B.15

公式 $y = b \cdot a^{k \cdot x}$ 这里 $N = 160 \cdot e^{0.5 \cdot t}$

为了t = 0 $N_0 = 160 \cdot e^{0.5 \cdot 0} = 160$

参考教材第143页：

$$t_{双倍的} = \frac{1}{k} \cdot ln\left(\frac{N_{双倍的}}{N_0}\right) = \frac{1}{0.5} \cdot ln\left(\frac{320}{160}\right) \approx 1.39\ h$$

或者使用 $T_2 = \frac{ln\,2}{ln\,a^k}$ =>

这里为公式的 a^k 插入 $e^{0.5}$： $T_{双倍的} = \frac{ln\,2}{ln\,e^{0.5}} \approx 1.39\ h$

$10\,000 = 160 \cdot e^{0.5 \cdot t}$ ⇔ $e^{0.5 \cdot t} = \frac{10\,000}{160} \approx 62.5$ ⇔

$0.5 \cdot t = ln\,62.5$ ⇔ $t = 8.72$小时

2B.16

P_0是2015年1月1日的产量

P为实际产量

r是每年的增长，这里0.04

n 是年数，这里是 7。所以：

$P = P_0(1+r)^n$ => $P = P_0(1+0.04)^7$ ⇔

$P = P_0 \cdot 1.316$ 成长是：结束 – 开始 = 1.316 – 1 = 0.316

因此，这七年的增长率为 0.316 = 31.6%。

2B.17

$K_n = K_0(1+r)^n$ 我们将在其中找到初始值 K_0

这里： $K_n = 20\,000$ $r = 0.06$ $n = 5$ =>

$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} = \frac{20\,000}{(1+0.06)^5} = 14\,945$ 磅

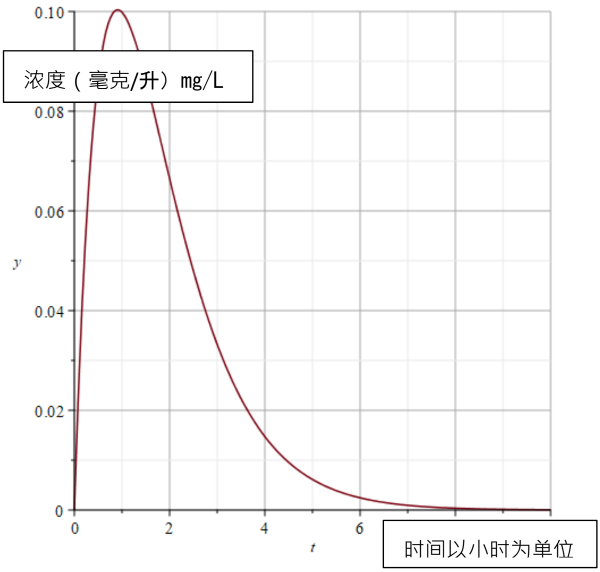
或者，我们可以通过负指数和以下方式“向后”计算（从还款时开始）：

$K_0 = 20\ 000 \quad r = 0.06 \quad n = -5 \quad =>$

$K_n = 20\ 000(1 + 0.06)^{-5} = 14\ 945$ 磅

2B.18

专注 $= f(t) = 0.3 \cdot t \cdot e^{-1.1t}$



读取的最大浓度约为。约后 $0.1\,\frac{mg}{L}$ 0. 9小时。

2B.19

公式	$y = b \cdot c^x$	这里	$N = b \cdot c^t$
在哪里	N = 细菌数量		
	b = 100 000		
	c = 增长基数		

t = 时间以分钟为单位

寻找c $300\,000 = 100\,000 \cdot c^{45} \quad \Leftrightarrow \quad c = 1.0247$

三小时后 $N_{3h} = 100\,000 \cdot 1.0247^{180} \approx 8.08$ 百万

2B.20

$[H^+] = 1 \cdot 10^{-7} \quad => \quad pH = -log\,10^{-7} = 7$

$[H^+] = 1 \cdot 10^{-10} \quad => \quad pH = -log\,10^{-10} = 10$

$[H^+] = 1 \cdot 10^{-3} \quad => \quad pH = -log\,10^{-3} = 3$

$[H^+] = 3 \cdot 10^{-5} \quad => \quad pH = -log\,(3 \cdot 10^{-5}) = 4.5$

2B.21

天然雨水呈弱酸性。

$5.5 = -log\,[H^+] \quad \Leftrightarrow \quad -5.5 = log\,[H^+] \quad \Leftrightarrow$

$10^{-5.5} = 10^{\log[H^+)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{10^{5.5}} = [H^+] \quad \Leftrightarrow$

$[H^+] = 0.000\,003\,2\,\frac{mol\,(\text{摩尔})}{L} = 0.0032\,\frac{mmol\,(\text{毫摩尔})}{L}$

2B.22

$7.8 = -log\,[H^+] \quad \Leftrightarrow \quad -7.8 = log\,[H^+] \quad \Leftrightarrow$

$10^{-7.8} = 10^{\log[H^+)} \quad \Leftrightarrow \quad 10^{-7.8} = [H^+] \quad \Leftrightarrow$

$[H^+] = 0.000\,000\,015\,8\,\frac{mol(\text{摩尔})}{L} = 0.0158 \cdot 10^{-6}\,\frac{mol(\text{毫摩尔})}{L}$

第 3 部分。

A 部分 - 提议的解决方案

3A.001

$f(x) = -x^2 + 4x - 2$ => $\frac{d}{dx}f(x) = -2x + 4$

$g(x) = 8x^2 + x$ => $\frac{d}{dx}g(x) = 16x + 1$

$h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 8$ => $\frac{d}{dx}h(x) = x$

$i(x) = 8x^2 - 1$ => $\frac{d}{dx}i(x) = 16x$

3A.002

$f(x) = 4x^2 + 2$ 和 $f(1) = 6$ =>

$f'(x) = 8x$ 和 $f'(1) = 8$

$f(x) = -6x^2 - x$ 和 $f(1) = -7$ =>

$f'(x) = -12x - 1$ 和 $f'(1) = -13$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ 和 $f(1) = -\frac{5}{2}$ =>

$f'(x) = x$ 和 $f'(1) = 1$

$f(x) = -3x^2 - 1$ 和 $f(1) = -4$ =>

$f'(x) = -6x$ 和 $f'(1) = -6$

3A.003

$f(x) = -\frac{1}{4}x^2$ => $f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x$

这是函数所有切线的斜率 a（顺便说一句，是抛物线）。

重点是 (2,-1) $a = f'(2) = -\frac{1}{2} \cdot (2) = -1$

所有切线均与处方呈直线

$y = ax + b$

b是通过插入我们的点找到的 (x,y) = (2,-1) =>

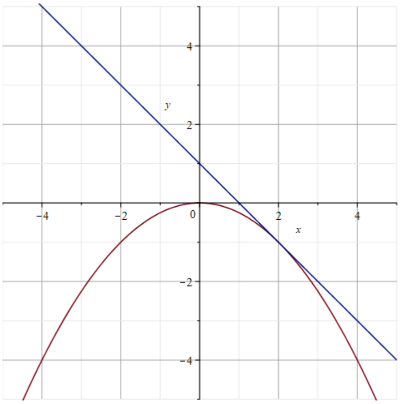
$-1 = (-1) \cdot 2 + b$ ⇔

$b = 1$

插入a和b： $y = (-1)x + 1$ ⇔

$y = -x + 1$

通过图中的草图进行控制：



遵守。

3A.004

$f(x) = 3x^2 \quad => \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = 6x$

为了 $f'(x) = a = 2 \quad => \quad 6x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}$

为了 $x = \frac{1}{3} \quad => \quad f(x) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} = y$

正切方程 $\quad y = ax + b \quad =>$

$\frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} + b \quad \Leftrightarrow$

$b = -\frac{1}{3} \quad =>$

所以 $\quad y = 2x - \frac{1}{3}$

3A.005

$f(x) = x^{½} \quad => \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{2}x^{-½}$

为了 $x = 9 \quad => \quad f(x) = 3$ 和 $f'(x) = \frac{1}{6} = a$

正切方程	$y = ax + b$	=>
	$3 = \frac{1}{6} \cdot 9 + b$	⇔
	$b = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$	=>
所以	$y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$	

3A.006

$f(x) = 4x^2 + x^{½}$ => $f'(x) = 8x + \frac{1}{2}x^{-½}$

$f(x) = x^{½} + 4x - 9$ => $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-½} + 4$

$f(x) = x^{½}(x^{½} - 6) = x - 6x^{½}$ => $f'(x) = 1 - 3x^{-½}$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 8$ => $f'(x) = -x + 4$

3A.007

处方/配方	$y = Ax^2 + Bx + C$		
(0,0) 插入	$0 = 0 + 0 + C$	⇔	C = 0
(4,4) 插入	$4 = A \cdot 4^2 + B \cdot 4$		方程1

$y = Ax^2 + Bx$ =>	$y' = 2Ax + B$	坡
x = 4 和坡度 = 3 插入	$3 = 2A \cdot 4 + B$	方程2

方程1 $B = 1 - 4A$ =>

方程2 $8A + 1 - 4A = 3$ ⇔ $A = \frac{1}{2}$ =>

方程1 $B = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} = -1$

所以 $y = \frac{1}{2}x^2 - x$

3A.008

$y = x^3 - 12x + 1$ => $\frac{dy}{dx} = y' = 3x^2 - 12$ 坡

对于水平切线，斜率为零 =>

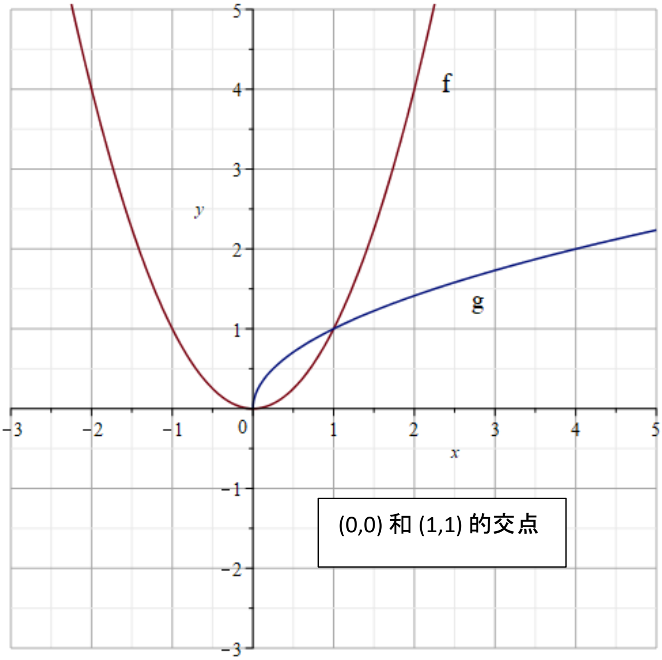
$3x^2 - 12 = 0$ ⇔ $x^2 = 4$ ⇔ $x = \pm 2$

为了 x = 2 $y = 2^3 - 12 \cdot 2 + 1 = -15$

为了 x = -2 $y = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) + 1 = 17$

因此，点存在水平切线： (2,-15) 和 (-2,17)

3A.009



交叉点为 $f(x) = g(x)$ =>

$x^2 = x^{½}$ ⇔

$x^2 - x^{½} = 0$ ⇔

$x^4 - x^{\frac{5}{2}} = 0$ 乘以 x^2 ⇔

$x(x^3 - x^{\frac{3}{2}}) = 0$

这仅适用于 $x_1 = 0$ 和（在括号中）$x_2 = 1$

$x_1 = 0$ 插入 f 中： $f(x) = x^2$ => $f(0) = 0 = y_1$

$x_2 = 1$ 插入 g 中： $g(x) = x^{½}$ => $g(1) = 1 = y_2$

因此，曲线相交于点 (0,0) 和 (1,1)

遵守阅读。

3A.010

$f(x) = x^2 - 4x + 4$

f(x) = y = 0 在 x 轴上： $x^2 - 4x + 4 = 0$ ⇔

$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$ =>

与 x 轴的交点 (2,0)

x = 0 在 y 轴上： $f(x) = 0 - 0 + 4 = 4$ =>

与 y 轴交点 (0,4)

斜率 (2,0) $f'(x) = 2x - 4$ =>

$f'(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$

正切方程 $y = ax + b$ =>

(2,0) 和 a 插入 $0 = 0 \cdot 2 + b$ ⇔

$b = 0$ =>

(2,0) 中的正切 $y = 0$ 等于 x 轴

斜率 (0,4) $f'(x) = 2x - 4$ =>

$f'(0) = -4$

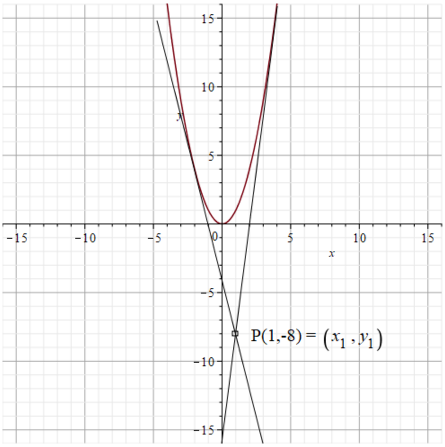
正切方程 $y = ax + b$ =>

(0,4) 和 a 插入 $4 = -4 \cdot 0 + b$ ⇔

$b = 4$ =>

(0,4) 中的正切 $y = -4x + 4$

3A.011



（图非必要）。

曲线（抛物线） $y = x^2$ => $f'(x) = 2x = a$

正切方程 $y = a(x - x_1) + y_1$

抛物线和两条切线有两个共同点。这些点的 x 坐标是通过插入正切方程找到的： $x^2 = 2x(x-1) + (-8)$ ⇔

$-x^2 + 2x + 8 = 0$ ⇔

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1) \cdot 8}}{2 \cdot (-1)}$ ⇔

$x = -2$ 和 $x = 4$

切线 1 $y = a(x - x_1) + y_1$

在哪里 $a = \frac{16-(-8)}{-4-1} = 8$

所以 $y = 8(x-1) + (-8)$ ⇔

$y = 8x - 16$

切线 2 $y = a(x - x_1) + y_1$

在哪里 $a = \frac{4-(-8)}{-2-1} = -4$

所以 $y = -4(x-1) + (-8)$ ⇔

$y = -4x - 4$

3A.012

$f(x) = \frac{\mathrm{x}}{x+1}$ 和 $x \neq -1$ （领域） =>

$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$ 切线斜率

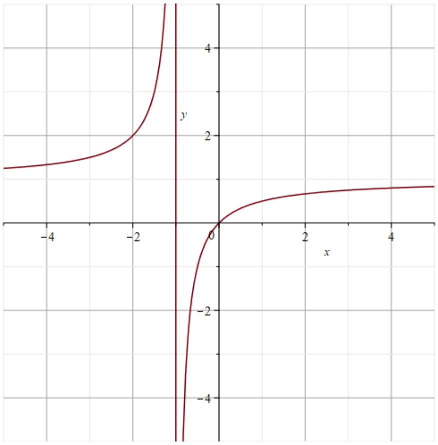
水平切线斜率 = 0 =>

$\frac{1}{(x+1)^2} = 0$ ⇔

$1 = 0$ 这对于所有 x 来说都是假的。所以，没有根 =>

无水平切线。

通过草图控制：



遵守。

3A.013

$y = 3x^2 - 4$ => $\frac{dy}{dx} = y' = 6x$

水平切线 $y' = 6x = 0$ ⇔

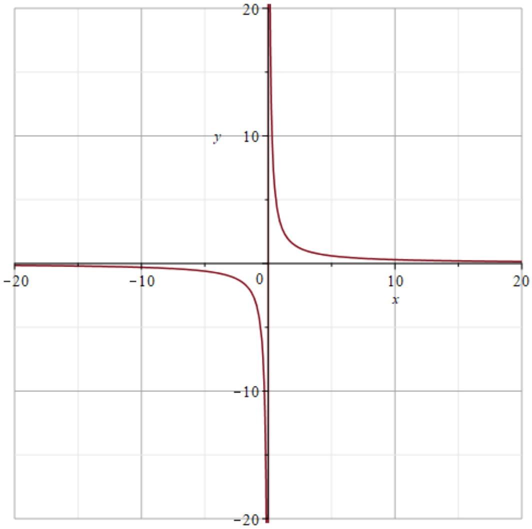
$x = 0$ => $y = -4$ =>

点的水平切线 (0,-4)

这里的处方$y = Ax^2 + Bx + C$中的因子A为+3，因此分支朝上，因此(0, −4)是最小值。

3A.014

$x \cdot y = k$ 和 $x \neq 0$ 和 $y \neq 0$ 共享双曲线。



由于未定义 y = 0，因此曲线无法穿过 x 轴。

由于未定义 x = 0，因此曲线无法穿过 y 轴。

因此，这两个轴是渐近线而不是切线。

这似乎也是正确的观察。

3A.015

水平切线?

$x \cdot y = k$ 和 $x \neq 0$ 和 $y \neq 0$ ⇔

$y = k \cdot \frac{1}{x} = k \cdot x^{-1}$ =>

$y' = -k \cdot x^{-2}$

水平切线 $y' = -k \cdot x^{-2} = 0$ ⇔

$\frac{1}{x^2} = 0$ ⇔

$1 = 0$ 这是错误的 =>

无水平切线。

3A.016

水平渐近线?

$x \cdot y = k$ 和 $x \neq 0$ 和 $y \neq 0$ ⇔

$y = k \cdot \frac{1}{x} = k \cdot x^{-1}$ =>

$y' = -k \cdot x^{-2} = -k \cdot \frac{1}{x^2}$

如果斜率趋于零，则存在水平渐近线：

$y' \to 0$ => $-k \cdot \frac{1}{x^2} \to 0$

这发生在 $x \to \pm\infty$ => $y \to 0$

从原函数可以看出 $y = k \cdot \frac{1}{x}$

因此该行 $y = 0$ 是一条水平渐近线。

y = 0 是 x 轴。

3A.017

垂直切线?

$x \cdot y = k$ 和 $x \neq 0$ 和 $y \neq 0$ ⇔

$y = k \cdot \frac{1}{x} = k \cdot x^{-1}$ =>

$y' = -k \cdot x^{-2} = -k \cdot \frac{1}{x^2}$

如果斜率变得无穷大，则存在垂直切线，这发生在 x=0 且未定义的情况下 =>

没有垂直切线。

3A.018

垂直渐近线？

$x \cdot y = k$ 和 $x \neq 0$ 和 $y \neq 0$ $\Leftrightarrow$

$y = k \cdot \frac{1}{x} = k \cdot x^{-1}$ =>

$y' = -k \cdot x^{-2} = -k \cdot \frac{1}{x^2}$

如果斜率趋向无穷大，则存在垂直渐近线：

$y' \to \pm\infty$ => $-k \cdot \frac{1}{x^2} \to \pm\infty$

这发生在 $x \to 0$

从原函数可以看出 $y = k \cdot \frac{1}{x}$

因此该行 $x = 0$ 是一条垂直渐近线。

x=0 是 y 轴。

3A.019

$f(x) = (x^2 - 3x + 3)^{\frac{1}{3}}$ $x \in \mathrm{R}$（x属于所有实数） =>

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 3x + 3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x - 3) = \frac{2x-3}{\frac{1}{3}(x^2-3x+3)^{\frac{2}{3}}}$

水平切线为 $f'(x) = 0$ =>

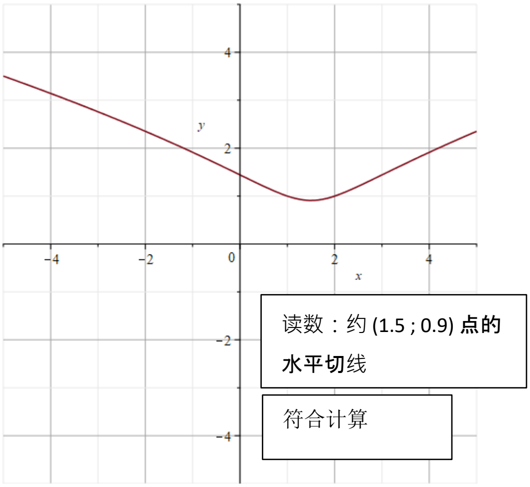
$$2x - 3 = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$x = 1.5$$

x 插入 f 中 $\qquad f(x) = (1.5^2 - 3 \cdot 1.5 + 3)^{\frac{1}{3}}$

$$f(x) \approx 0.909$$

是的，有一条水平切线 (1.5 ; 0.909)



3A.020

使用技巧：“外”•“内”：

$f(x) = (4x-2)^3 \qquad => \qquad f'(x) = 3(4x-2)^2 \cdot 4$

$g(x) = (2x-2)^{½} \qquad => \qquad g'(x) = \frac{1}{2}(2x-2)^{-½} \cdot 2$

$h(x) = (x^3 + x^2)^{½} \qquad => \qquad h'(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x^2)^{-½} \cdot (3x^2 + 2x)$

$i(x) = (e^x - 3x)^5 \qquad => \qquad i'(x) = 5(e^x - 3x)^4 \cdot (e^x - 3)$

$j(x) = (5^x + 2)^{-3} \qquad => \qquad j'(x) = -3(5^x + 2)^{-4} \cdot (5^x \cdot ln5)$

和乘积规则

$k(x) = xe^x \quad => \quad k'(\text{x}) = 1 \cdot e^x + xe^x$

3A.021

$f(x) = e^{3x} \quad => \quad f'(x) = 3e^{3x}$

$g(x) = 3^x \quad => \quad g'(x) = 3^x \cdot \ln 3$

$h(x) = e^{3x+2} \quad => \quad h'(x) = e^{3x+2} \cdot 3$

$i(x) = -7e^{2x} \quad => \quad i'(x) = -7e^{2x} \cdot 2$

$j(x) = \ln(4x^3 + x^2) \quad => \quad j'(x) = \frac{1}{4x^3+x^2} \cdot (12x^2 + 2x) \quad \Leftrightarrow$

$j'(x) = \frac{x(12x+2)}{x(4x^2+x)} \quad \Leftrightarrow$

$j'(x) = \frac{12x+2}{4x^2+x}$

$k(x) = x^2e^x \quad => \quad k'(x) = 2xe^x + x^2e^x \quad \Leftrightarrow$

$k'(x) = e^x(2x + x^2)$

3A.022

$y = \ln x \quad => \quad \frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{x}$

$y = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad => \quad \frac{dy}{dx} = y' = -x^{-2}$

$y = \frac{\ln \text{x}}{x^2} \quad => \quad \frac{dy}{dx} = y' = \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - 2 \cdot \ln x}{x^3}$

$$y = \frac{x^2}{lnx} \quad => \quad \frac{dy}{dx} = y' = \frac{2x \cdot lnx - \frac{1}{x} \cdot x^2}{(ln\,x)^2} = \frac{2x \cdot lnx - x}{(ln\,x)^2} = \frac{x(2\,lnx - 1)}{(ln\,x)^2}$$

3A.023

$f(x) = 4lnx - (lnx)^4$ 和 $x > 0$

与 x 轴的交点，其中 y = 0 =>

$4lnx - (lnx)^4 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$lnx(4 - (ln\,x)^3) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$ln\,x = 0$ 和 $4 - (ln\,x)^3 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x = 1$ 和 $(ln\,x)^3 = 4 \quad \Leftrightarrow$

$x = 1$ 和 $ln\,x = 4^{\frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow$

$x = 1$ 和 $x \approx e^{1.59} \approx 4.89$

水平切线在哪里

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0 \quad => \quad 4 \cdot \frac{1}{x} - 4(lnx)^3 \cdot \frac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow$

$4 - 4(lnx)^3 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$(lnx)^3 = \frac{4}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow$

$ln\,x = 1^{\frac{1}{3}} = 1 \quad \Leftrightarrow$

$x = e$

插入到函数中给出：

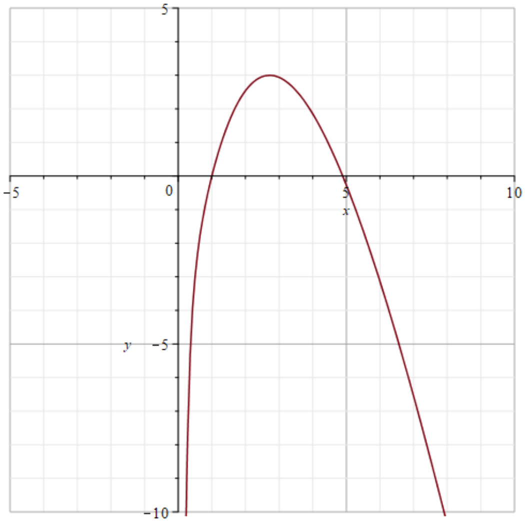
$f(x) = 4lnx - (lnx)^4$ =>

$f(e) = 4lne - (lne)^2 = y$ ⇔

$y = 4 - 1 = 3$

结合起来，我们只有一条水平切线：(e , 3)

如果我们在区间]0 , e[中插入 x 值，我们会得到小于 3 的 y 值。因此，(e, 3) 是最大值。



遵守。

3A.024

$f(x) = \sin x - \cos x$ $f'(x) = \cos x + \sin x$

$g(x) = 4\cos x + 2x - 8$ $g'(x) = -4\sin x + 2$

$h(x) = \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$ $h'(x) = \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$

$i(x) = 4\tan x + 2$ $i'(x) = 4 + 4(\tan x)^2$

3A.025

$y = \cos 2x \quad => \quad \frac{dy}{dx} = 2 \cdot (-\sin 2x)$ 外・内

$y = \sin\frac{1}{x} \quad => \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$

$y = \sin(x^2 + x) \quad => \quad \frac{dy}{dx} = (2x + 1) \cdot \cos(x^2 + x)$

$y = (\sin x)^4 \quad => \quad \frac{dy}{dx} = \cos x \cdot 4(\sin x)^3$

$y = \sin x^4 \quad => \quad \frac{dy}{dx} = 4x^3 \cdot \cos x^4$

$y = 2(\tan x)^2 \quad => \quad \frac{dy}{dx} = (1 + (\tan x)^2) \cdot 4\tan x$

3A.026

$y = \sin x \cdot \sin x \quad => \quad y' = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x$

$\Leftrightarrow \quad y' = 2 \cdot \cos x \cdot \sin x$

$y = (\cos x)^2 = \cos x \cdot \cos x$

$=> \quad y' = -\sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot (-\sin x)$

$\Leftrightarrow \quad y' = -2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

$y = 2\sin x - \frac{1}{2}\cos x \quad => \quad y' = 2\cos x + \frac{1}{2}\sin x$

$y = 3\tan x + 4 \quad => \quad y' = 3(1 + (\tan x)^2)$

$\Leftrightarrow \quad y' = 3 + 3(\tan x)^2$

3A.027

简短的方法：

最大限度 = 振幅 + k = 1.5 + 0.5 = 2

最低限度 = 振幅 - k = -1.5 + 0.5 = -1 =>

范围 = [-1 ; 2]

漫长的路：

$f(t) = 1.5 \cdot \sin(2t+3) + 0.5$ => $\frac{df(x)}{dx} = 1.5 \cdot \cos(2t+3) \cdot 2$

$(2t+3)$ 是角度.

微分系数的水平正切 = 斜率 = 0

$$1.5 \cdot \cos(2t+3) \cdot 2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\cos(2t+3) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$cos^{-1}(\cos(2t+3)) = cos^{-1}0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(2t+3) = \frac{\pi}{2} \quad 和 \quad -\frac{\pi}{2}$$

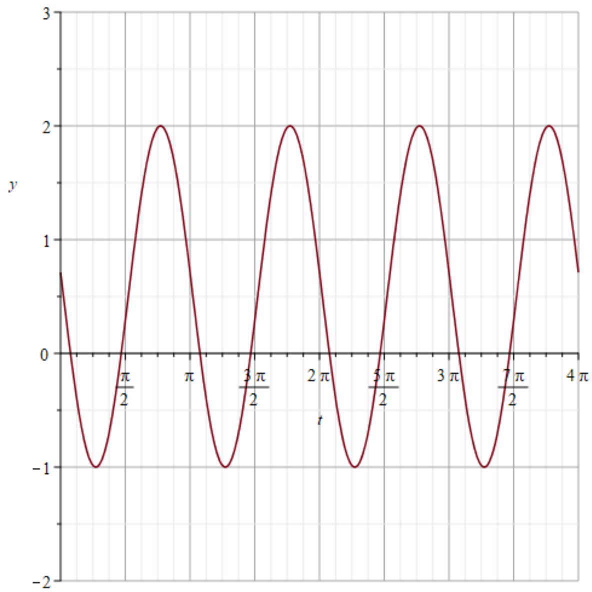
插入到函数中：

$f(t) = 1.5 \cdot \sin\frac{\pi}{2} + 0.5$ => $1.5 \cdot 1 + 0.5 = 2$

$f(t) = 1.5 \cdot \sin(-\frac{\pi}{2}) + 0.5$ => $1.5 \cdot (-1) + 0.5 = -1$

所以，最大。在 f(t) = 2 和最小值时在 f(t) = -1 时

范围 = [-1 ; 2]



遵守。

3A.028

我们可以找到极值点之前和之后的函数值（在第二轴上），看看它们如何变化。这是最简单的方法。

我们还可以计算二阶导数 y´´，从而查看切线的斜率是增加还是减少。增加意味着最小值。减少意味着最大值。

3A.029

我们可以找到极值点之前和之后的函数值（在第二轴上），看看它们如何变化。这是最简单的方法。

我们还可以计算二阶导数 y´´

如果 y´´ 以移位符号递增，则它是最小值.

如果 y´´ 随移位符号减小，则它是最大值.

如果 y´´ 前后均为正，则递增函数会暂停.

如果 y´´ 前后均为负数，则递减函数会暂停.

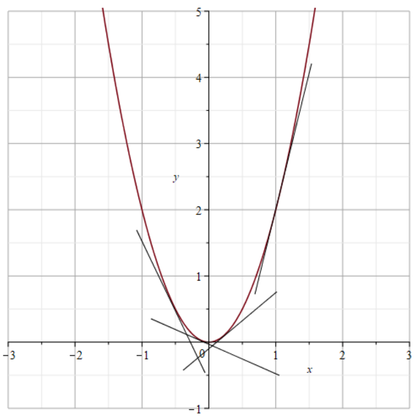
3A.030

$y = 2x^2$ => $y' = 4x$ => $y'' = 4$

y´´ 为正，这意味着切线斜率随着 x 值的增加而不断增加。

因此 (0,0) 是最小值。

在图中，我们观察到斜率不断增加的切线：首先具有较小的负斜率，然后具有越来越大的正斜率：



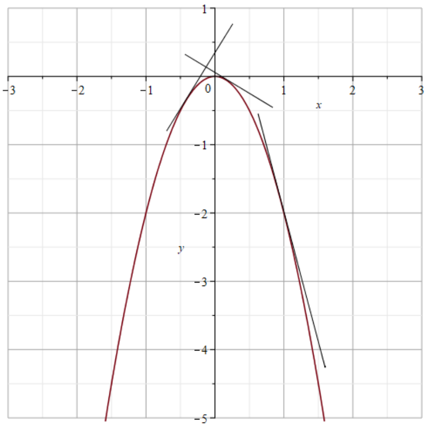
3A.031

$y = -2x^2$ => $y' = -4x$ => $y'' = -4$

y´´ 为负数，这意味着随着x值的增加，切线斜率不断减小。

因此 (0,0) 是最大值。

在图中，我们观察到斜率不断减小的切线：首先具有较小的正斜率 – 然后具有越来越大的负斜率：



3A.032

$f'(x) = 4x + 1$ => $f(x) = 4\frac{x^2}{2} + x + k$

⇔ $f(x) = 2x^2 + x + k$

$g'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ => $g(x) = 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + x + k$

⇔ $g(x) = x^3 - 2x^2 + x + k$

$h'(x) = -x - \frac{4}{x^2}$ => $h(x) = -\frac{x^2}{2} - 4(-x^{-1}) + k$

$h(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{4}{x} + k$

$i'(x) = 4x^{-5}$ => $i(x) = 4(\frac{x^{-4}}{-4}) + k$

$$i(x) = -x^{-4} + k$$

$$j'(x) = \frac{1}{x^{½}} = x^{-½} \quad => \quad j(x) = \frac{x^{½}}{\frac{1}{2}} + k$$

$$j(x) = 2x^{½} + k$$

$$k'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{½}} = x^{-½} \quad => \quad k(x) = \frac{x^{½}}{\frac{1}{2}} + k$$

$$\Leftrightarrow \quad k(x) = 2x^{½} + k$$

3A.033

$$f(x) = 0 \quad => \quad F(x) = k$$

$$g(x) = 1 \quad => \quad G(x) = x + k$$

$$h(x) = 2\pi \quad => \quad H(x) = 2\pi x + k$$

$$i(x) = \frac{5}{x^{½}} = 5x^{-½} \quad => \quad I(x) = 5\frac{x^{½}}{\frac{1}{2}} + k$$

$$\Leftrightarrow \quad I(x) = 10x^{½} + k$$

$$j(x) = 8x^3 + 6x^{-4} - \frac{6}{x^6} \quad => \quad J(x) = 8\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^{-3}}{-3} - 6\frac{x^{-5}}{-5} + k$$

$$\Leftrightarrow \quad J(x) = 2x^4 - 2x^{-3} + \frac{6}{5}x^{-5} + k$$

$$k(x) = 2e^x \quad => \quad K(x) = 2e^x + k$$

3A.034

$$f'(x) = 2x - 9 \quad => \quad f(x) = x^2 - 9x + k$$

$g'(x) = x^{-6} - \frac{1}{x}$ => $g(x) = \frac{x^{-5}}{-5} - ln\ |x| + k$

$h'(x) = 15^x$ => $h(x) = \frac{15^x}{ln15} + k$

3A.035

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x} = \frac{2^x}{1^x} = \left(\frac{2}{1}\right)^x = 2^x$ =>

$F(x) = \frac{2^x}{ln2} + k$

$g(x) = (2x+3)^2 = 4x^2 + 9 + 12x$ =>

$G(x) = \frac{4}{3}x^3 + 9x + 6x^2 + k$

$h(x) = \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = x - 2$ =>

$H(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + k$

3A.036

$f(x) = 2x + 3$ => $F(x) = x^2 + 3x + k$

(2,0) 插入 => $F(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 + k = 0$

⇔ $k = -10$

K 插入 => $F(x) = x^2 + 3x - 10$

$g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ => $G(x) = \frac{x^3}{3} - x^{-1} + k$

(2,0) 插入 => $G(2) = \frac{2^3}{3} - 2^{-1} + k = 0$

⇔ $k = -\frac{8}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{16}{6} + \frac{3}{6} = -\frac{13}{6}$

k 插入 => $G(x) = \frac{x^3}{3} - x^{-1} - \frac{13}{6}$

$h'(x) = 4x^3 + 2x$ => $H(x) = x^4 + x^2 + k$

(2,0) 插入 => $H(2) = 2^4 + 2^2 + k = 0$

⇔ $k = -20$

k 插入 => $H(x) = x^4 + x^2 - 20$

3A.037

$f(x) = x^{-½}$ 和 x > 0 => $F(x) = 2x^{½} + k$ 和 $x > 0$

F(16) = 16 => $F(16) = 2 \cdot 16^{½} + k = 16$

⇔ $k = 8$

k 插入 => $F(x) = 2x^{½} + 8$ 和 $x > 0$

3A.038

$f(x) = 4x^3 + 9x^2 + 4x - 1$ ⇔

$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (4x^3 + 9x^2 + 4x - 1)\,dx$ =>

$F(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + k$

(1,8) => $1^4 + 3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 + k = 8$

⇔ $k = 3$

=> $F(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 3$

3A.039

$\mathrm{F(x) = x + \sin x \cdot \cos x}$ =>

$f(x) = 1 + \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x)$ ⇔

$f(x) = 1 + (\cos x)^2 - (\sin x)^2$ ⇔

并利用基本关系:

$f(x) = (\cos x)^2 + (\cos x)^2$ ⇔

$f(x) = 2(\cos x)^2$ 显示。

3A.040

$\int (2x-3)^3\,dx \quad =$ $\quad t = 2x - 3$ => 代换

$\int t^3\,\frac{dt}{2} \quad =$ $\quad \frac{dt}{dx} = 2$ =>

$\frac{1}{2}\int t^3\,\frac{dt}{2} \quad =$ $\quad dx = \frac{dt}{2}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot t^4 + k_t \quad =$

$\frac{1}{8}(2x-3)^4 + k_x$ $\quad t = 2x - 3$ 插入和 k 移位。

$\int x(4x^2-1)^4\,dx \quad =$ $\quad t = 4x^2 - 1$ =>

$\int x \cdot t^4\,\frac{dt}{8x} \quad =$ $\quad \frac{dt}{dx} = 8x$ =>

$\frac{1}{8}\int t^4\,dt \quad =$ $\quad dx = \frac{dt}{8x}$

$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{5}t^5 + k_t \quad =$

$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5}(4x^2 - 1)^5 + k_x$

3A.041

$\int \sin 2x \cdot x \ dx \quad =$ 部分的

$\left(-\frac{1}{2} cos\ 2x\right) \cdot x - \int \left(-\frac{1}{2} cos\ 2x\right) \cdot 1\ dx \quad =$ 和替代

$-\frac{1}{2} x \cdot cos\ 2x + \frac{1}{2} \int cos\ 2x\ dx \quad =$

$-\frac{1}{2} x \cdot cos\ 2x + \frac{1}{4} sin\ 2x + k$

$\int\ sin\, x \cdot x^2\ dx \quad =$ 部分的

$(-cos\ x) \cdot x^2 - \int (-cos\ x) \cdot 2x\ dx \quad =$

$(-cos\ x) \cdot x^2 + 2 \int\ cos\ x \cdot x\ dx \quad =$

$(-cos\ x) \cdot x^2 + 2\ (sin\, x \cdot x - \int\ sin\ x \cdot 1\ dx) \quad =$ 又偏了

$(-cos\ x) \cdot x^2 + 2x \cdot sin\, x - 2 \int\ sin\ x\ dx \quad =$

$(-cos\ x) \cdot x^2 + 2x \cdot sin\, x + 2 \cos x + k$

3A.042

计算具体积分

$\int_0^2 (3x^2 - 6x + 2)\ dx \quad = \quad [x^3 - 3x^2 + 2x]^2{}_0 \ =$

$(8 - 12 + 4) - (0 - 0 + 0) \quad = \quad 0$

$$\int_1^2 (x^2+1)\,dx \quad = \quad \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_1^2 \quad =$$

$$\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right) \quad = \quad \left(\frac{8}{3}+\frac{6}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{3}\right) \quad = \quad \frac{10}{3}$$

3A.043

$$\int_0^5 (y^2-2y)\,dy \quad = \quad \left[\frac{y^3}{3}-y^2\right]_0^5 = \left(\frac{125}{3}-25\right)-(0-0) = \frac{50}{3}$$

$$\int_0^\pi \sin u\,du \quad = \quad [-cos\,u]^\pi{}_0 \quad = \quad -\cos\pi-(-\cos 0) \quad =$$

$$1+1 \;=\; 2$$

3A.044

$$\int_0^1 (x^2+1)x^{½}\,dx \quad = \quad \int_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}}+x^{½}\right)dx \quad = \left[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 =$$

$$\left(\frac{2}{7}+\frac{2}{3}\right)-(0+0) \quad = \quad \frac{6}{21}+\frac{14}{21} \quad = \quad \frac{20}{21}$$

$$\int_0^\pi (sin\,x+x)\,dx \quad = \quad \left[-cos\,x+\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi \;=$$

$$\left(-\cos\pi+\frac{\pi^2}{2}\right)-(-\cos 0+0) \;= \left(1+\frac{\pi^2}{2}\right)-(-1) \quad = \quad \frac{\pi^2}{2}+2$$

3A.045

$\int_{-½}^0 (y+1)^2\,dy$ $\qquad\qquad$ $t = y+1 \quad$ => $\quad$ 代换

$\frac{dt}{dy} = 1$ =>

$dy = dt$

改变限制 $t_{下} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

$t_{上} = 0 + 1 = 1$ 所以:

$\int_{½}^{1} t^2 \, dt \quad =$

$\left[\frac{t^3}{3}\right]^1 ½ \quad =$

$\left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{\frac{1}{8}}{3}\right) \quad = \quad \frac{8}{24} - \frac{1}{24} \quad = \quad \frac{7}{24}$

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(6-3y)^2} \, dy$ $t = 6 - 3y$ => 代换

$\frac{dt}{dy} = -3$ =>

$dy = -\frac{dt}{3}$

改变限制 $t_{下} = 6 - 3(-1) = 9$

$t_{上} = 6 - 3 \cdot 1 = 3$ 所以:

$\int_{9}^{3} \frac{1}{t^2} \frac{-dt}{3} \quad =$

$-\frac{1}{3} \int_{9}^{3} \frac{1}{t^2} \, dt \quad = \quad -\frac{1}{3} \int_{9}^{3} t^{-2} \, dt \quad =$

$-\frac{1}{3} \left[-t^{-1}\right]^3 9 \quad = \quad \left(\frac{1}{9}\right) - \left(\frac{1}{27}\right) \quad = \quad \frac{3}{27} - \frac{1}{27} \quad = \quad \frac{2}{27}$

3A.046

$\int_{-2}^{-1}(y+1)^2\,dy$ $t = y + 1$ => 代换

$\frac{dt}{dy} = 1$ =>

$dy = dt$

改变限制 $t_{下} = -2 + 1 = -1$

$t_{上} = -1 + 1 = 0$ 所以:

$\int_{-1}^{0} t^2\,dt$ =

$\left[\frac{t^3}{3}\right]^{0}_{-1}$ =

$(0) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

3A.048

$\int_{-2}^{-1}(y+1)^2\,dx$ = 没有解决方案

以 y 函数方式收集所有非常小的 dx 片段是不可能的。或者，如果我们考虑一个区域：不可能从一侧为 dx，另一侧为 y 函数的微观区域中找到整个区域。它必须是 x-x 或 y-y。

3A.049

$\int_{0}^{\pi}(\sin\frac{x}{2} + \cos 2x)\,dx = \int_{0}^{\pi}\sin\frac{x}{2}\,dx + \int_{0}^{\pi}\cos 2x\,dx$

现在，我们使用替换分别计算两个积分：

$\int_{0}^{\pi}\sin\frac{x}{2}\,dx$ $t = \frac{x}{2}$ => 代换

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}$ =>

$$dx = 2dt$$

改变限制 $t_{下} = \frac{0}{2} = 0$

$t_{上} = \frac{\pi}{2}$ 所以:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot 2dt =$

$2[-cos]^{\frac{\pi}{2}}{}_0 = 0 - (-2) = 2$

And

$\int_0^{\pi} cos\ 2x\ dx$ $t = 2x$ => 代换

$\frac{dt}{dx} = 2$ =>

$dx = \frac{1}{2}dt$

改变限制 $t_{下} = 2 \cdot 0 = 0$

$t_{上} = 2\pi$ 所以:

$\int_0^{2\pi} cos\ t \cdot \frac{1}{2}dt =$

$\frac{1}{2}[sin\ t]^{2\pi}{}_0 = 0 - 0 = 0$

综合：$2 + 0 = 2$

3A.050

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + sinx) \cdot cos\, x\, dx$

$t = 1 + sinx$ => 代换

$\frac{dt}{dx} = cos\, x$ =>

$dx = \frac{dt}{\cos x}$

改变限制

$t_{下} = 1$

$t_{上} = 2$ 所以:

$\int_1^2 t \cdot cos\, x \cdot \frac{dt}{\cos x} =$

$\int_1^2 t \cdot dt =$

$\left[\frac{1}{2}t^2\right]^2{}_1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

3A.051

我们尝试分部分集成（部分集成）：

$$\int_0^{\pi} cos\, x \cdot (1 + x)\ dx = [sin\, x \cdot (1 + x)]^{\pi}{}_0 - \int_0^{\pi} sin\, x \cdot 1\ dx$$

$$= [sin\, x \cdot (1 + x)]^{\pi}{}_0 - [-cos\, x]^{\pi}{}_0$$

$$= (0 - 0) - (1 - 1) = 0$$

3A.052

我们尝试分部分集成（部分集成）：

$$\int_1^2 x^3 \cdot ln\, x\ dx = \left[\frac{1}{4}\, x^4 \cdot ln\, x\right]^2{}_1 - \int_1^2 \frac{1}{4} x^4 \cdot \frac{1}{x}\, dx =$$

$$4\, ln\, 2 - 0 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^3\, dx = 4 \ln 2 - \frac{1}{16}\, [\, x^4]^2{}_1 =$$

$4\ln 2 - (1 - \frac{1}{16}) \quad = \quad 4\ln 2 - \frac{15}{16}$

3A.053

$\int_1^2 x(x^2-1)^4\, dx$ $\quad t = x^2 - 1 \quad => \quad$ 代换

$\frac{dt}{dx} = 2x \quad =>$

$dx = \frac{dt}{2x}$

改变限制 $\quad t_{下} = 1 - 1 = 0$

$t_{上} = 4 - 1 = 3 \quad$ 所以:

$\int_0^3 x \cdot t^4 \frac{dt}{2x} \quad =$

$\frac{1}{2}\int_0^3 t^4 dt \quad =$

$\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{t^5}{5}\right]^3{}_0 \quad =$

$\frac{1}{2} \cdot ((\frac{243}{5}) - (0)) \quad = \quad \frac{243}{10}$

3A.054

$\int_1^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx \quad = \quad \int_1^9 \ln x \cdot x^{-½}\ dx \quad =$ $\quad$ 部分的

$[2x^{½} \cdot \ln x]^9{}_1 - \int_1^9 x^{-1} \cdot 2x^{½}\ dx \quad =$

$[2x^{½} \cdot \ln x]^9{}_1 - 2\int_1^9 x^{-½}\, dx \quad =$

$[2x^{½} \cdot \ln x]^9{}_1 - 2[2x^{½}]^9{}_1 \quad =$

$(6\ln 9 - 2\ln 1) - 2(6 - 2) \quad = \quad 6\ln 9 - 8 \quad \approx \quad 5.18$

3A.055

$\int_1^4 \frac{3^{x^{1/2}}}{x^{1/2}}\,dx \ =$

$t = x^{1/2}$ => 代换

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ => 这里我们隔离 dt

$2dt = x^{-1/2} \cdot dx$

改变限制

$t_{下} = 1^{1/2} = 1$

$t_{上} = 4^{1/2} = 2$ 所以:

$\int_1^2 3^t \cdot 2dt \ =$

$2\int_1^2 3^t \cdot dt \ =$

$2\left[\frac{3^t}{\ln 3}\right]_1^2 \ =$

$2\left(\frac{9}{\ln 3}\right) - 2\left(\frac{3}{\ln 3}\right) \ = \ \frac{12}{\ln 3} \ \approx \ 0.91$

3A.056

$\int_0^a (2y+4)\,dy = 0 \ \Leftrightarrow \ [y^2+4y]^a{}_0 = 0 \ \Leftrightarrow$

$a^2 + 4a - (0) = 0 \ \Leftrightarrow \ a(a+4) = 0 \ \Leftrightarrow$

$a = 0$ 或者 $a = -4$

$\int_0^a (-6y+2)\,dy = 0 \ \Leftrightarrow \ [-3y^2+2y]^a{}_0 = 0 \ \Leftrightarrow$

$-3a^2 + 2a - (0) = 0 \Leftrightarrow \ a(-3a+2) = 0 \ \Leftrightarrow$

$a = 0$ 或者 $a = \frac{2}{3}$

3A.057

$\int_1^2 ax\,dx = 10 \quad \Leftrightarrow \quad a\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 10 \quad \Leftrightarrow$

$a(2 - \frac{1}{2}) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{20}{3}$

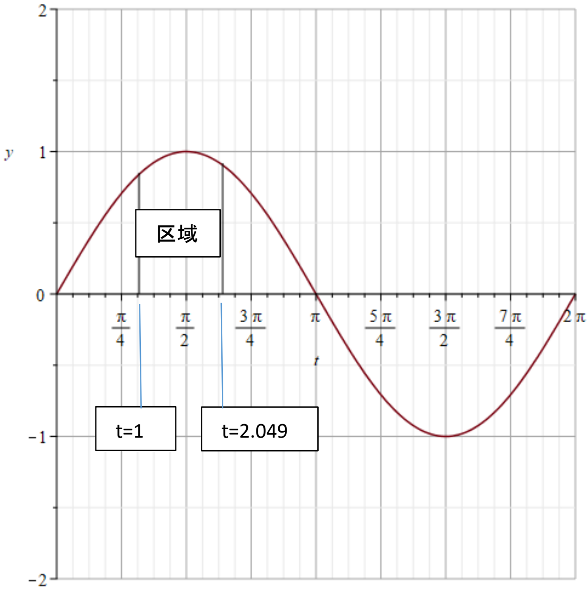
3A.058

$\int_1^a \sin t\,dt = 1 \quad \Leftrightarrow \quad [-\cos t]^a{}_1 = 1 \quad \Leftrightarrow$

$-\cos a - (-\cos 1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\cos a + 0.54 = 1$

$\cos a = 0.54 - 1 = -0.46 \quad \Leftrightarrow \quad a \approx 2.049$ 弧度

所以，如果我们看一条从 1 弧度到 2.049 弧度的正弦曲线，这条曲线下方的面积就是 1。如图：



看起来正确的是显示的面积为 1。

3A.059

$f(x) = x^3 - \frac{1}{4}x + 1$ 和 $g(x) = \frac{3}{4}x + 1$

交叉点为 $x^3 - \frac{1}{4}x + 1 = \frac{3}{4}x + 1 \quad \Leftrightarrow$

$$x^3 - x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x(x^2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ 和 } x = 1 \text{ 和 } x = -1$$

我们的面积积分的极限是哪些，但是哪条曲线是上面的曲线等等？然而，我们只需进行计算，然后在 A 为负数时取数值

$$A = A_1 + A_2 \quad =>$$

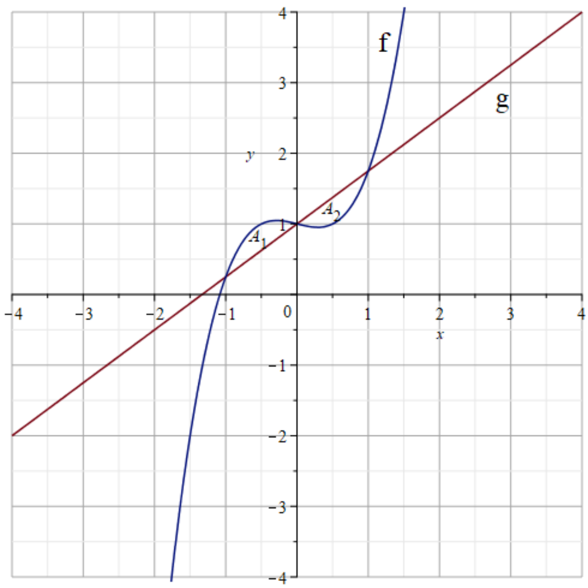
$$A = \int_{-1}^{0}(f - g)dx + \int_{0}^{1}(f - g)dx \quad =>$$

$$A = \int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx + \int_{0}^{1}(x^3 - x)dx \quad \Leftrightarrow$$

$$A = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} \quad \Leftrightarrow$$

$$A = \left(0 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right) + \left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{2}$$

两个区域（A_1 和 A_2）结果均为正值，因此我们无需通过数值进行干扰。



3A.060

$y = 1 - x^2$ 与 x 轴相交为 y = 0=>

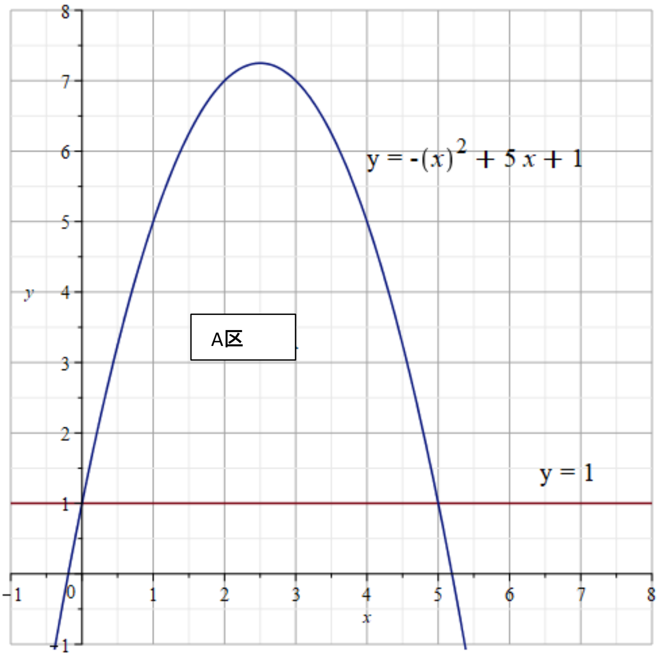
$1 - x^2 = 0$ ⇔ $x = -1$ 和 $x = 1$ =>

区域 $= \int_{-1}^{1}(1 - x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]^{1}_{-1} =$

$\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 - \frac{-1}{3}\right) = \frac{4}{3}$

3A.061

$y = -x^2 + 5x + 1$ 和 $y = 1$



路口 $-x^2+5x+1=1$ ⇔

$x(5-x)=0$ ⇔

$x=0$ 和 $x=5$ (= 阅读) =>

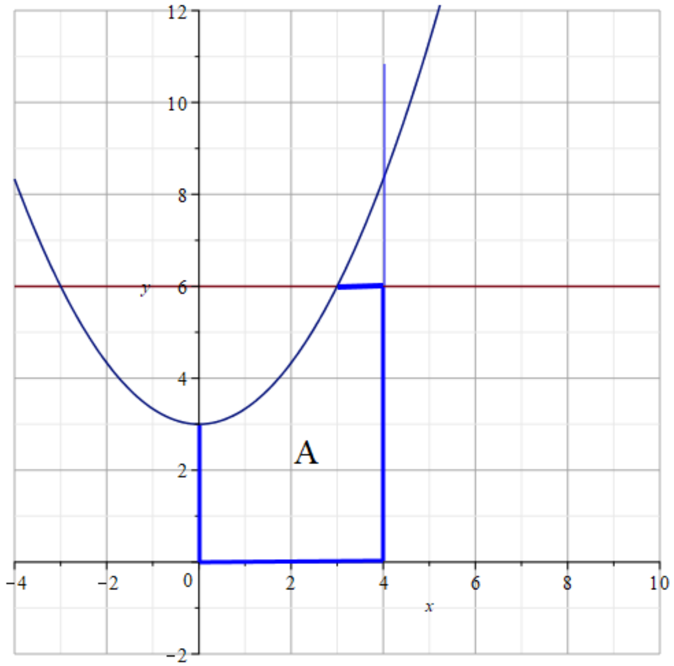
面积的计算方法是：上曲线减去下曲线（位于找到的限制（0 和 5）之间）：

$$A=\int_0^5((-x^2+5x+1)-(1))\,dx=\int_0^5((-x^2+5x)\,dx=$$

$$\left[-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}\right]_0^5=\left(\frac{125}{2}-\frac{125}{3}\right)=\frac{125}{6}$$

3A.062

x = 0 x = 4 y = 0 y = 6 $y=\frac{1}{3}x^2+3$



抛物线与直线的交点 y = 6

$\frac{1}{3}x^2 + 3 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}x^2 + 3 = 6 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 3$

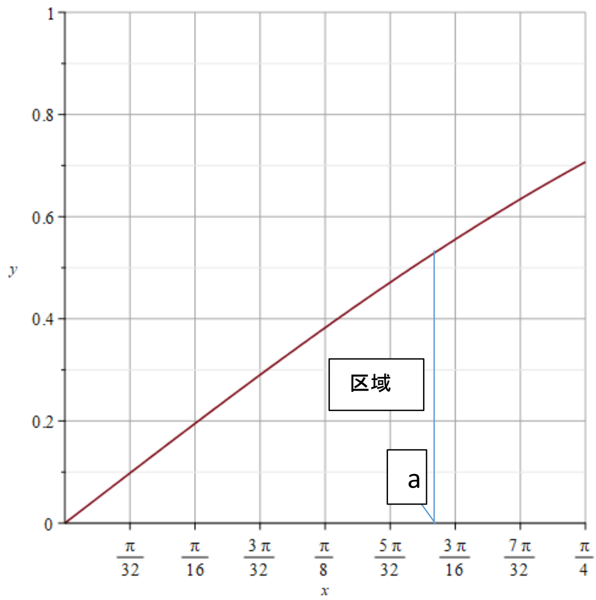
然后，A 可以计算为从 x = 0 到 x = 3 的抛物线下方的面积加上 y = 6 和从 x = 3 到 x = 4 的矩形下方的面积

$A = \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^2 + 3\right) dx + (1 \cdot 4) =$

$\left[\frac{x^3}{9} + 3x\right]_0^3 + 4 = \big((3+9) - (0)\big) + 4 = 16$

3A.063

$y = \sin x$



$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \; dx = [-\cos x]^{\frac{\pi}{4}}{}_0 = -cos\,\frac{\pi}{4} - (-\cos 0) =$

$-0.707 + 1 \approx 0.293$

现在我们找到一个：

$\int_0^a \sin x \; dx = \frac{A}{2} \approx 0.146 \quad \Leftrightarrow$

$[-\cos x]^a{}_0 = -cos\,a - (-\cos 0) = 0.146 \quad \Leftrightarrow$

$-cos\,a + 1 = 0.146 \quad \Leftrightarrow$

$cos\,a = -0.146 + 1 \quad \Leftrightarrow$

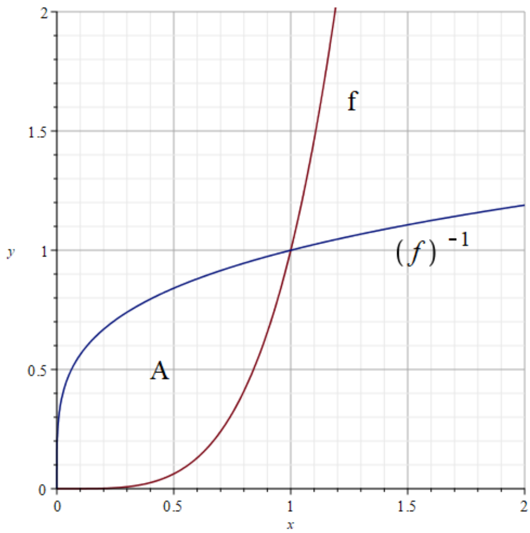
$a \approx 0.547$

3A.064

$y = x^4 \quad \Leftrightarrow \quad y^{\frac{1}{4}} = x$

我们交换名字：　　$x^{\frac{1}{4}} = y$　　或者　　$y = x^{\frac{1}{4}}$

更好的名字：　$f(x) = x^4$ 和 $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{4}}$ 为了 $x \geq 0$



路口　　$x^4 = x^{\frac{1}{4}}$

猜根　　=>　　$x = 0$ 和 $x = 1$　　=>

$$A = \int_0^1 (\frac{x^4}{4} - x^4)\, dx = \left[\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{x^5}{5}\right]^1{}_0 = \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\right) - (0) = \frac{3}{5}$$

公式　　$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 \cdot dx$

这里是　　上 - 下　　=>

$$V_x = \pi \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 dx - \pi \int_0^1 (x^4)^2\, dx \quad \Leftrightarrow$$

$$V_x = \pi \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\, dx - \pi \int_0^1 x^8\, dx \quad \Leftrightarrow$$

$$V_x = \pi \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]^1{}_0 - \pi \left[\frac{1}{9}x^9\right]^1{}_0 \quad \Leftrightarrow$$

$$V_x = \pi\left(\frac{2}{3} - 0\right) - \pi\left(\frac{1}{9} - 0\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$V_x = \frac{5}{9}\pi \approx 1.75$$

3A.065

公式 $$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 \cdot dx \quad =>$$

这里 $$V_x = \pi \int_{-1}^{2} (x^2 + 2)^2 \cdot dx \quad \Leftrightarrow$$

$$V_x = \pi \int_{-1}^{2} (x^4 + 4 + 4x^2)\, dx \quad \Leftrightarrow$$

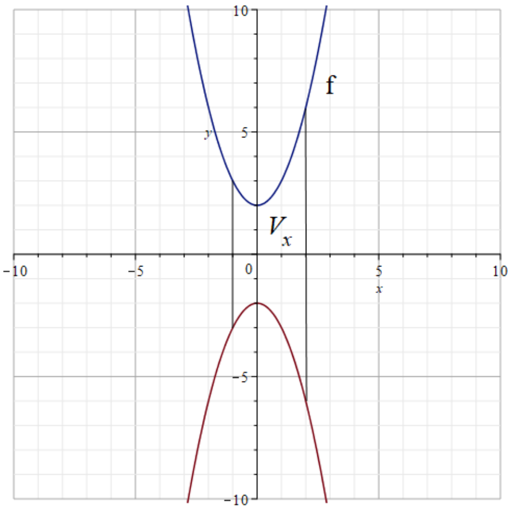
$$V_x = \pi \left[\frac{x^5}{5} + 4x + \frac{4x^3}{3}\right]_{-1}^{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$V_x = \pi\left(\frac{32}{5} + 8 + \frac{32}{3}\right) - \pi\left(-\frac{1}{5} - 4 - \frac{4}{3}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$V_x = \pi\left(\frac{96}{15} + \frac{120}{15} + \frac{160}{15}\right) - \pi\left(-\frac{3}{15} - \frac{60}{15} - \frac{20}{15}\right) \Leftrightarrow$$

$$V_x = \pi\left(\frac{376}{15} + \frac{83}{15}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$V_x = \frac{459}{15}\pi \approx 96.1$$



3A.066

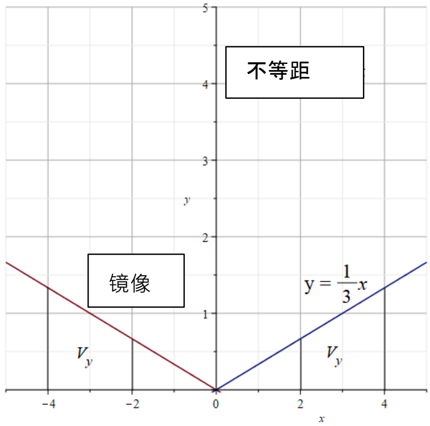
公式 $V_y = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$

$y = \frac{1}{3}x$ => $V_y = 2\pi \int_2^4 x \cdot \frac{1}{3}x \ \ dx$ ⇔

$V_y = \frac{2}{3}\pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4$ ⇔

$V_y = \frac{2}{3}\pi \left(\frac{64}{3} - \frac{8}{3}\right)$ ⇔

$V_y = \frac{110}{9}\pi \approx 38.4$

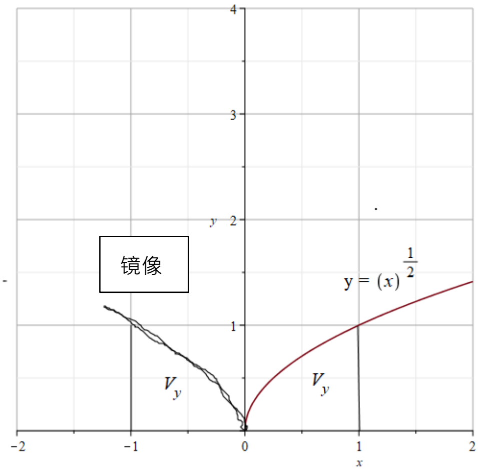


$y = \sqrt{x} = x^{½}$ $\qquad$ $V_y = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^{½}\ dx$ $\quad \Leftrightarrow$

$$V_y = 2\pi \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 \quad \Leftrightarrow$$

$$V_y = 2\pi \left(\frac{2}{5} - 0\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$V_y = \frac{4}{5}\pi \approx 2.51$$



手绘的镜像曲线没有数学定义，因此它只是一个指示体积的工作草图。

3A.067

$y = x^{-\frac{3}{2}}$ =>

$V_y = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^{-\frac{3}{2}}\, dx = 2\pi[2x^{½}]^4{}_2 = 2\pi(4 - 2 \cdot 2^{½}) \approx$ $2.34\pi \approx 7.36$

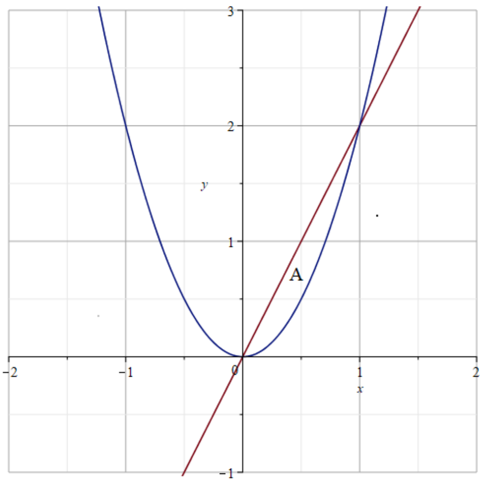
3A.068

$f(x) = 2x^2$ 和 $g(x) = 2x$ =>

交叉点为 $2x^2 = 2x \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ 和 $x = 1$



$V_y = 2\pi \int_0^1 x \cdot 2x\, dx - 2\pi \int_0^1 x \cdot 2x^2\, dx \Leftrightarrow$

$V_y = 2\pi \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 - 2\pi \left[\frac{2x^4}{4}\right]_0^1 \Leftrightarrow$

$V_y = 2\pi\left(\frac{2}{3} - 0\right) - 2\pi\left(\frac{2}{4} - 0\right) = \frac{4\pi}{3} - \frac{4\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$

3A.069

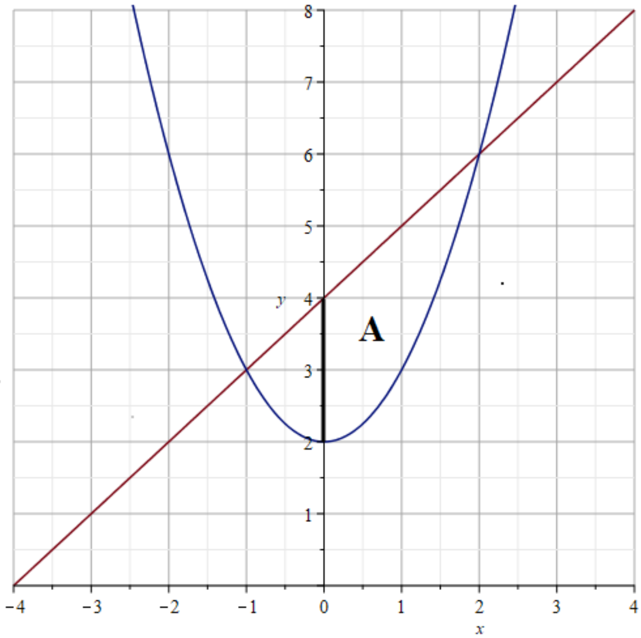
$f(x) = x^2 + 2$ 和 $g(x) = x + 4$ =>

交叉点为 $x^2 + 2 = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow$$

$x = -1$ 和 $x = 2$

仅第一象限的面积 => 限制: x = 0 和 x = 2



$$V_y = 2\pi \int_0^2 x \cdot (x+4)\ dx - 2\pi \int_0^2 x \cdot (x^2+2)\ dx \Leftrightarrow$$

$$V_y = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^2 - 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + x^2\right]_0^2 \Leftrightarrow$$

$$V_y = 2\pi\left(\frac{8}{3} + 8\right) - 2\pi(4+4) = \frac{16}{3}\pi$$

3A.070

古尔丁 • 福梅尔 1:

表面积 = 宽度· 2 πr =>

$A = (x_1 - x_2) \cdot 2\pi \cdot r$ =>

$A = (40 - 20) \cdot 2\pi \cdot 50$ ⇔

$A = 2000\,\pi \approx 6283$

横截面积 = 宽度 • 厚度 = 20 · 3 = 60

古尔丁 • 福梅尔 2:

$V = A \cdot 2\pi \cdot r$ =>

$V = 60 \cdot 2\pi \cdot 50$ ⇔

$V = 6000\,\pi \approx 18\,850$

3A.071

古尔丁 • 福梅尔 2:

$V = A \cdot 2\pi \cdot r$ =>

$V = (\pi \cdot 8^2) \cdot (2\pi \cdot 80)$ ⇔

$V = 10\,240\,\pi^2 \approx 101\,065$

3A.072

公式 $l = \int_a^b (1 + f'(x)^2)^{½}\, dx$ 在哪里 $f'(x) = y' = x^{½}$

这里 $l = \int_0^2 (1 + (x^{½})^2)^{½}\, dx =$ 代换

$\int_0^2 (1 + \mathrm{x})^{½}\, dx =$ $t = 1 + x$ =>

$\int_a^b t^{½}\, dt =$ $\frac{dt}{dx} = 1$ ⇔

$\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]^{b}{}_{\text{a}} \quad =$ $\qquad dx = dt$

$\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]^{2}{}_{0} \quad = \left(\frac{2}{3}(1+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\right) \approx 2.8$ $\quad$ =>

$l \approx 2.8$

3A.073

公式 $\quad l = \int_a^b (1 + f'(x)^2)^{½}\, dx$ $\quad$ 在哪里

$y = x^2$ $\quad$ => $\quad y' = 2x$ $\quad$ =>

$l = \int_0^2 (1 + (2x)^2)^{½}\, dx \approx 4.65$

对于大多数 CAS，您只需输入积分并按“Enter = 进入”即可。也许您必须输入“simplify = 简化”等才能获得十进制数。

3A.074

公式 $\quad l = \int_a^b (1 + f'(x)^2)^{½}\, dx$ $\quad$ 在哪里

$y = \sin x$ $\quad$ => $\quad y' = \cos x$ $\quad$ =>

$l = \int_0^2 (1 + (cos\ x)^2)^{½}\, dx \approx 2.35$

对于大多数 CAS，您只需输入积分并按“Enter = 进入”即可。也许您必须输入“simplify = 简化”等才能获得十进制数。

3A.075

$\frac{dy}{dx} = 2y$ => $y' - 2y = 0$

定理1 $y' + ay = 0$ => $y = c \cdot e^{-ax}$

这里 $y' - 2y = 0$ => $y = c \cdot e^{2x}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{8}y$ => $y' + \frac{1}{8}y = 0$

定理1 $y' + ay = 0$ => $y = c \cdot e^{-ax}$

这里 $y' + \frac{1}{8}y = 0$ => $y = c \cdot e^{-\frac{1}{8}x}$

3A.076

$\frac{dy}{dx} = x^2$

定理3 $y' + ay = h(x)$ =>

$y = e^{-ax} \cdot \int h(x) \cdot e^{ax} \cdot dx + c \cdot e^{-ax}$

这里 $y' + 0 = x^2$ =>

$y = 1 \cdot \int x^2 \cdot 1 \cdot dx + c \cdot e^0$ ⇔

$y = \frac{x^3}{3} + c$

插入点 (2,3) $3 = \frac{2^3}{3} + c$ ⇔ $c = \frac{1}{3}$ =>

$y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}$

3A.077

$\frac{dy}{dx} - y = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y' - y = 2$

定理2 $\qquad y' + ay = b \quad => \quad y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$

这里 $\qquad y' - y = 2 \quad => \quad y = -2 + c \cdot e^{x}$

因为 $\qquad a = -1$ 和 $b = 2$

插入点 $(10, -2)$

$-2 = -2 + c \cdot e^{10} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{0}{e^{10}} = 0 \quad => \quad y = -2$

3A.078

$\frac{dy}{dx} - 3y = -2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y' - 3y = -2$

定理2 $\qquad y' + ay = b \quad => \quad y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$

这里 $\qquad y' - 3y = -2 \quad => \quad y = \frac{2}{3} + c \cdot e^{3x}$

因为 $\qquad a = -3$ 和 $b = -2$

插入点 $(\ln 4, -\frac{2}{3})$

$-\frac{2}{3} = \frac{2}{3} + c \cdot e^{3 \cdot ln4} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{-\frac{4}{3}}{e^{3 \cdot ln4}} = \frac{-\frac{4}{3}}{64} = \frac{-4}{192} = \frac{-1}{48} \qquad =>$

$y = \frac{2}{3} - \frac{1}{48} \cdot e^{3x}$

3A.079

$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{4} - 6 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y' + \frac{y}{4} - 6 = 0$

定理2 $\qquad y' + ay = b \quad => \quad y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$

这里 $y' + \frac{y}{4} = 6 \quad => \quad y = 24 + c \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

因为 $a = \frac{1}{4}$ 和 $b = 6 \quad => \quad \frac{b}{a} = \frac{6}{\frac{1}{4}} = 24$

插入点 (ln 2, ln 3)

$$ln\,3 = 24 + c \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot ln2} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{ln3 - 24}{e^{-\frac{1}{4} \cdot ln2}} \approx \frac{-22.9}{0.84} \approx -27.2 \quad =>$$

$$y \approx 24 - 27.2 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot x}$$

3A.080

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{4} - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' + \frac{y}{4} - 6 = 0$$

定理2 $y' + ay = b \quad => \quad y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$

这里 $y' + \frac{y}{4} = 6 \quad => \quad y = 24 + c \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

因为 $a = \frac{1}{4}$ 和 $b = 6 \quad => \quad \frac{b}{a} = \frac{6}{\frac{1}{4}} = 24$

插入点 (ln 16, ln e) = (ln 16, 1)

$$1 = 24 + c \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot ln16} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{-23}{e^{-\frac{1}{4} \cdot ln16}} = -46 \quad =>$$

$$y = 24 - 46 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot x}$$

3A.081

$$\frac{dy}{dx} = 2y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{2y} = dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot y^{-1} \cdot dy = dx \quad \Leftrightarrow$$

$\frac{1}{2}\int y^{-1}\cdot dy=\int dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}ln\,y+c_1=x+c_2 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}ln\,y=x+c \quad \Leftrightarrow \quad ln\,y=2x+2c \quad \Leftrightarrow \quad e^{ln\,y}=e^{2x+2c} \quad \Leftrightarrow$

$y=e^{2x}\cdot e^{2c} \quad \Leftrightarrow \quad y=e^{2x}\cdot k$

3A.082

$\frac{dy}{dx}=y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y^2}=dx \quad \Leftrightarrow \quad \int y^{-2}\cdot dy=\int dx \quad \Leftrightarrow$

$-y^{-1}+c_1=x+c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}=-x+c \quad \Leftrightarrow \quad y=-\frac{1}{x+c}$

两次积分形成一个常数，将其组合为 c。

通过代入原微分方程进行控制：

左边 $\frac{dy}{dx}=\left(-\frac{1}{x+c}\right)'$ =>

$\frac{dy}{dx}=\frac{0-(1\cdot(-1))}{(x+c)^2}=\frac{1}{(x+c)^2}$

右边 $y^2=(-\frac{1}{x+c})^2=\frac{1}{(x+c)^2}$

所以，左边等于右边 => 真的。

CAS 呈现相同的结果。遵守。

3A.083

$y'=-2y+2e^x$

定理3 $y'+ay=h(x)$ =>

$y=e^{-ax}\cdot\int h(x)\cdot e^{ax}\cdot dx+c\cdot e^{-ax}$

这里 $y'+2y=2e^x$ =>

$$y = e^{-2x} \cdot \int 2e^{x} \cdot e^{2x} \cdot dx + c \cdot e^{-2x}$$

其中积分 $\int 2e^{x} \cdot e^{2x} \cdot dx = 2\int e^{3x} dx = \frac{2}{3} e^{3x}$ =>

已插入 $y = e^{-2x} \cdot \frac{2}{3} e^{3x} + c \cdot e^{-2x}$ ⇔

不定 $y = \frac{2}{3} e^{x} + c \cdot e^{-2x}$

插入点（0, 0） $0 = \frac{2}{3} e^{0} + c \cdot e^{-2 \cdot 0}$ ⇔

$$0 = \frac{2}{3} + c \cdot 1 \quad ⇔$$

$$c = -\frac{2}{3} \quad =>$$

具体的 $y = \frac{2}{3} e^{x} - \frac{2}{3} e^{-2x}$

3A.084

$y' = xy + x$ ⇔ $y' - xy = x$

定理4 $y' + g(x) \cdot y = h(x)$ =>

$$y = e^{-G(x)} \cdot \int h(x) \cdot e^{G(x)} \cdot dx + c \cdot e^{-G(x)}$$

这里 $y' - xy = x$ =>

在哪里 $g(x) = -x \ => \ G(x) = -\frac{1}{2} x^2$ =>

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot \int x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot dx + c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

其中积分:

$\int x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx =$ 代换

$-\int x \cdot e^{t} \frac{dt}{x} =$ $t = -\frac{x^2}{2}$ =>

$-\int e^t dt =$ $\qquad \frac{dt}{dx} = -x \quad \Leftrightarrow$

$-e^t = -e^{-\frac{1}{2}x^2}$ $\qquad dx = -\frac{dt}{dx}$

插入/组合 $\quad y = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot (-e^{-\frac{1}{2}x^2}) + c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \Leftrightarrow$

$y = -1 + c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ (不定)

3A.085

$y' = xy \quad \Leftrightarrow \quad y' - xy = 0$

可以通过分离变量来解决（定理 0），但这里我们利用定理 4：

定理4 $\quad y' + g(x) \cdot y = h(x) \quad =>$

$y = e^{-G(x)} \cdot \int h(x) \cdot e^{G(x)} \cdot dx + c \cdot e^{-G(x)}$

这里 $\quad y' - xy = 0 \quad =>$

在哪里 $\quad g(x) = -x \ => \ G(x) = -\frac{1}{2}x^2$

和 $h(x) = 0 \quad =>$

插入/组合 $\quad y = 0 + c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \Leftrightarrow$

$y = c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ (不定)

所以，定理4也适用于更简单的情况，因此被广泛使用。

3A.086

$\frac{dy}{dt} = ay(m-y) \quad => \quad y = \frac{m}{1+ce^{-amt}}$

这里 m = 200 a = 0.001 y = 20 for t = 0 年

(0,20) 插入 $20 = \frac{m}{1+ce^{-am\cdot 0}}$ ⇔

$1 + c = \frac{200}{20}$ ⇔

$c = 9$ =>

c 插入 $y = \frac{200}{1+9\cdot e^{-0.2t}}$

t 为了 y = 50

$50 = \frac{200}{1+9\cdot e^{-0.2t}}$ ⇔ $1 + 9e^{-0.2t} = \frac{200}{50}$ ⇔

$9e^{-0.2t} = 3$ ⇔ $e^{-0.2t} = \frac{1}{3}$ ⇔

$ln\ e^{-0.2t} = ln\ \frac{1}{3}$ ⇔ $-0.2t \approx -1.019$ ⇔

$t \approx 5{,}5$ 年

t 为了 y = 100

$100 = \frac{200}{1+9\cdot e^{-0.2t}}$ ⇔ $1 + 9e^{-0.2t} = \frac{200}{100}$ ⇔

$9e^{-0.2t} = 1$ ⇔ $e^{-0.2t} = \frac{1}{9}$ ⇔

$ln\ e^{-0.2t} = ln\ \frac{1}{9}$ ⇔ $-0.2t \approx -2.197$ ⇔

$t \approx 11$ 年

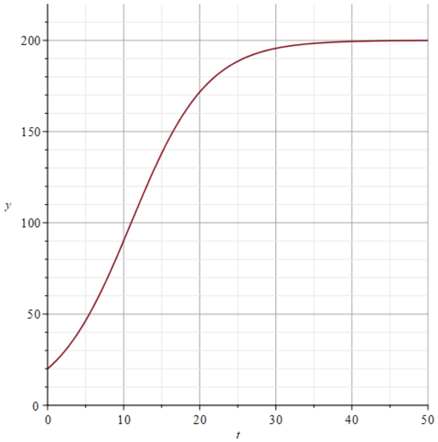
t for y = 199

$199 = \frac{200}{1+9\cdot e^{-0.2t}}$ ⇔ $1 + 9e^{-0.2t} = \frac{200}{199}$ ⇔

$9e^{-0.2t} = -1 + \frac{200}{199}$ ⇔ $e^{-0.2t} = 0.0056$ ⇔

$ln\ e^{-0.2t} = ln\ 0.0056 \Leftrightarrow \qquad -0.2t \approx -7.49 \qquad \Leftrightarrow$

$t \approx 37$ 年



$y = \frac{200}{1+9\cdot e^{-0.2t}}$ 计算和读数的合规性。

3A.087

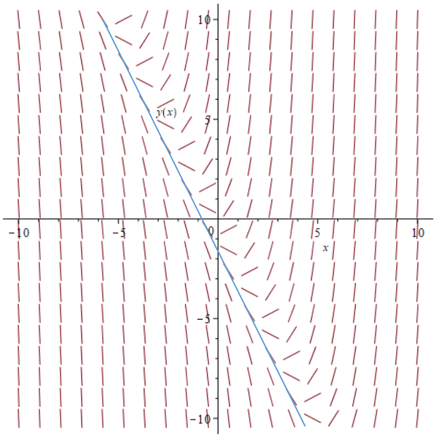
$y' = y + 2x$ 解决了： $y = -2x - 2 + ce^x$

对于 c = 0，解曲线将是一条直线，方程如下：

$$y = -2x - 2 + 0 \cdot e^x \qquad \Leftrightarrow$$

$$y = -2x - 2$$

如图所示：



3A.088

$z = x^2 + y^3$ => $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 0 = 2x$

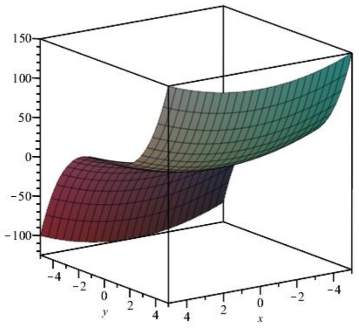
$z = x^2 + y^3$ => $\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 3y^2 = 3y^2$

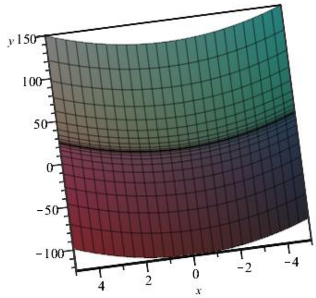
下面用三幅图展示了函数 $z = x^2 + y^3$ 。

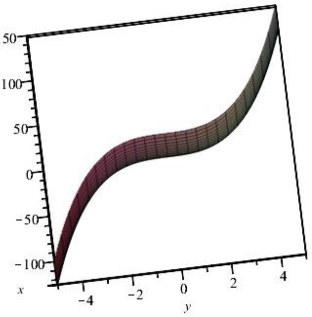
图 1 显示了概览。

在图 2 中，3D 曲线被转动，以便我们可以看到 x 轴和 z 轴（向上）。（显示的小 y 是告诉我们 y 方向“从纸中出来”）。网格使我们更容易看到曲线的斜率。尽管 3D 坐标系不是等距的，但可以看出切线斜率符合 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$

在图 3 中，3D 曲线被转动，以便我们可以看到 y 轴和 z 轴（向上）。（所示的小 x 是告诉我们，x 方向“从纸中出来”）。网格使我们更容易看到曲线的斜率。虽然3D坐标系不是等距的，但可以看出切线斜率符合 $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$







3A.089

$z = \frac{4}{3}x^3 + y - y^{½}$ 和 $y \geq 0$ =>

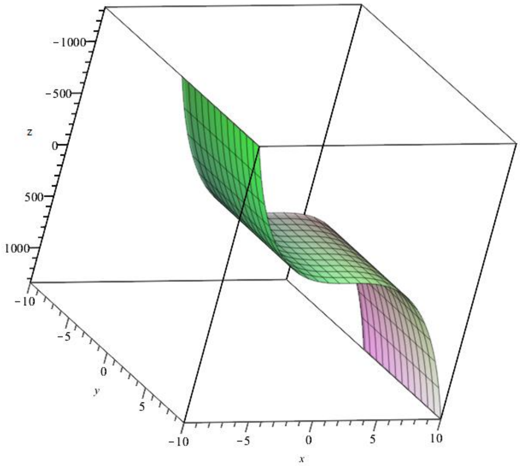
$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^2 + 0 - 0 = 4x^2$ 和

$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 1 - \frac{1}{2}y^{-½} = 1 - \frac{1}{2}y^{-½}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^2 = 0$ ⇔ $x^2 = 0$ ⇔

$x = 0$ 和所有值 $y \geq 0$

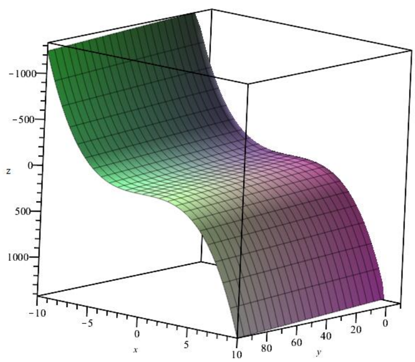
因此，在 x-z 平面中，在 $y \geq 0$ 的所有值上，曲线都有一个 $x = 0$ 的驻点。我们还在图中看到：



我们看到一行： $x = 0$ 和所有值 $y \geq 0$

遵守

（顺便说一句，这条线朝着 +y 方向稍微下降，如果我们增加图表的 y 值就可以看到这一点：



就像一把椅子向右倾斜。

我们还可以从 (z,y) 平面的计算斜率看出：

$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - \frac{1}{2} y^{-½}$ 其中斜率受 y 影响 / 是 y 的函数。)

3A.090

$x - y = \frac{x}{z}$ $\Leftrightarrow$ $z = \frac{x}{x-y}$ =>

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{0 \cdot (x-y) - x \cdot (0-1)}{(x-y)^2} = \frac{x}{(x-y)^2}$ 商公式

3A.091

$z = \cos(xy)$ => $\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin(xy) \cdot y$ 外/内

3A.092

$z = 2x^2 + 3y^2$ =>

$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 0 = 4x$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 6y = 6y$

$z = 2x^2 + 3y^2$ => $z = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 5^2 = 77$ =>

$(x, y, z) = (1,5,77)$

梯度在 $(1,5,77) = \begin{pmatrix} 4x \\ 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 \\ 6 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 30 \end{pmatrix}$

和 $|坡度| = (4^2 + 30^2)^{½} = 106^{½} \approx 10.3$

3A.093

$z = sin\,x - cos\,y$ =>

$\frac{\partial z}{\partial x} = cos\,x - 0 = cos\,x$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y} = 0 - (-\sin y) = \sin y$

$z = sin\,x - cos\,y$ => $z = sin\frac{\pi}{2} - cos\frac{\pi}{4}$ ⇔

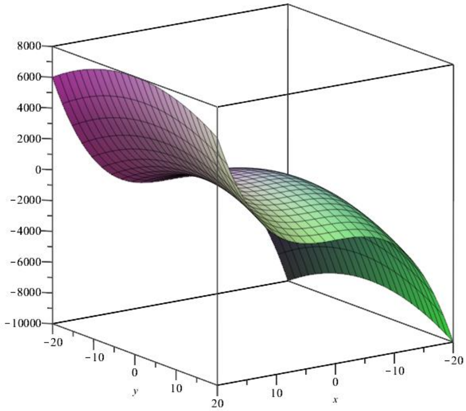
$z = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.293$ => $(x, y, z) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$

梯度在 $\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

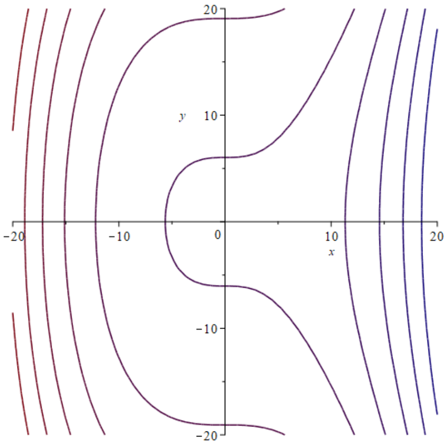
和 $|坡度| = (0^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2)^{½} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$

3A.094

功能显示 $f(x, y) = z = x^3 - 5y^2$



函数的水平曲线 $f(x,y) = z = x^3 - 5y^2$



3A.095

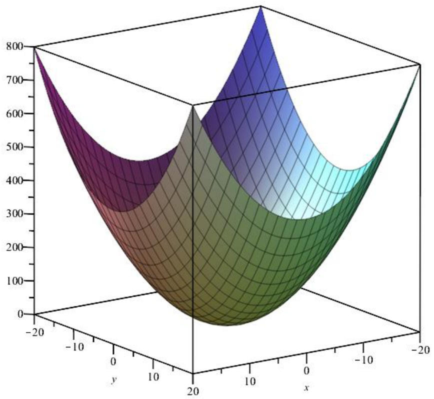
$f(x,y) = z = x^2 + y^2$ => $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ => $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$二阶导数为正，这意味着对于更大的 x 值，切线斜率不断增加。

$$f(x,y) = z = x^2 + y^2 \quad => \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \quad => \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

二阶导数为正，这意味着对于更大的 y 值，切线斜率不断增加。

结合起来，我们得到斜率逐渐增加的切线，即（0, 0, 0）是最小值。

$f(x,y) = z = x^2 + y^2$ 显示：



3A.096

$$f(x,y) = z = -x^2 - y^2 \quad => \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -2x \quad => \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$$

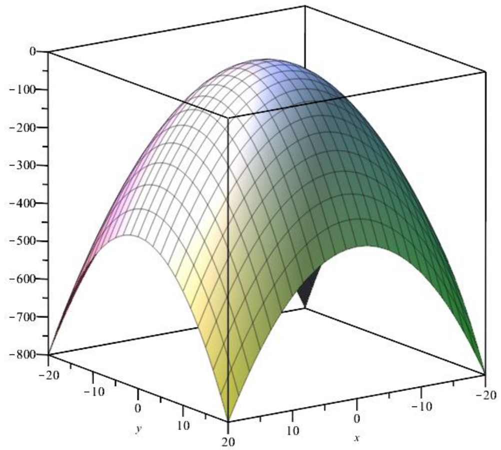
二阶导数为负，这意味着对于更大的 x 值，切线斜率不断减小。

$$f(x,y) = z = -x^2 + -y^2 \quad => \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y \quad => \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

二阶导数为负，这意味着对于较大的 y 值，切线斜率不断减小。

结合起来，我们得到斜率递减的切线，即（0, 0, 0）是最大值。

$f(x, y) = z = -x^2 - y^2$ 显示：



第 3 部分。

B 部分 – 提议的解决方案

3B.001

周长 $= 3x + 2y$ （三角形是等边三角形）

面积 $= A_{矩形} + A_{三角形} = xy + \frac{1}{2}x \cdot x \sin 60°$ $\Leftrightarrow$

$A \approx xy + 0.433 \cdot x^2$

x 和 y 由刚刚找到的两个方程得出：

$10 = 3x + 2y \quad \Leftrightarrow \quad 2y = 10 - 3x \quad \Leftrightarrow \quad y = 5 - \frac{3}{2}x$

插入A中 => $A = x\left(5 - \frac{3}{2}x\right) + 0.433x^2$ $\Leftrightarrow$

$A = 5x - 1.5x^2 + 0.433x^2$ $\Leftrightarrow$

$A = -1.067x^2 + 5x$

A 的最大值为 $\frac{dA}{dx} = 0$ =>

$-2.134x + 5 = 0$ $\Leftrightarrow$

$x \approx 2.34$ 米 =>

$y \approx 5 - \frac{3}{2}2.34 \approx 1.49$ 米

3B.002

$$周长 = x + \frac{2\,\pi\,\frac{x}{2}}{2} + 2y = x + \frac{\pi}{2}x + 2y = 10 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{10 - x - \frac{\pi}{2}x}{2} = 5 - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x$$

$$面积 = A_{矩形} + A_{半圆} = xy + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

y 插入 A 中 => $A = x(5 - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x) + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$A = 5x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{8}x^2 \Leftrightarrow$

$A \approx 5x - 0.5x^2 - 0.785x^2 + 0.393x^2 \Leftrightarrow$

$A \approx 5x - 0.892x^2$

A 的最大值为 $\frac{dA}{dx} = 0$ =>

$5 - 2 \cdot 0.892x = 0 \Leftrightarrow$

$x \approx \frac{5}{1.78} \approx 2.8$ 米 =>

$y \approx 5 - \frac{2.8}{2} - \frac{\pi}{4}2.8 \approx 1.4$ 米

查看: 周长 $= 2.8 + \frac{\pi}{2}2.8 + 2 \cdot 1.4 = 10$ 哪个是对的

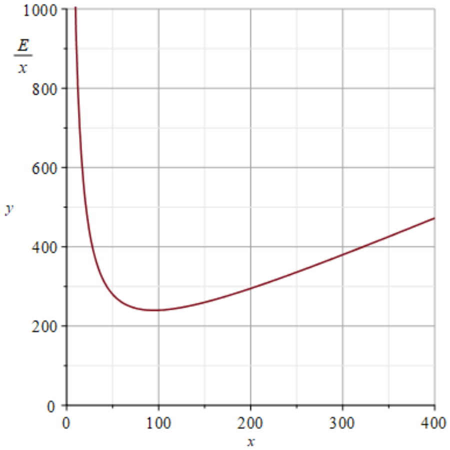
3B.003

$E = 9000 + 50x + x^2$ 为了 $1 \leq x \leq 400$

固定成本是 9000

可变成本是 $50x + x^2$

$\frac{E}{x} = \frac{9000+50x+x^2}{x}$ 在哪里 $1 \leq x \leq 400$



3B.004

$\frac{E}{x} = \frac{9000+50x+x^2}{x}$ 在哪里 $1 \leq x \leq 400$

每件商品的最低费用为

$\frac{dE}{dx} = \left(\frac{E}{x}\right)' = 0$ =>

$\frac{(50+2x)x-1(9000+50x+x^2)}{x^2} = 0$ ⇔

$50x + 2x^2 - 9000 - 50x - x^2 = 0$ ⇔

$x^2 = 9000$ ⇔

$x \approx 95$

$\frac{E}{x} = \frac{9000+50\cdot400+400^2}{400} \approx 473$ 磅

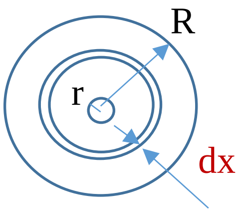
3B.005

$r_{中间} = \frac{400+40}{2} = 220$

$转弯数量 = \frac{400-40}{0.2} = 1800$

$圆周 = 2\pi \cdot r_{中间} \approx 1382$

$长度 \approx 1382 \cdot 1800 \approx 2.488 \cdot 10^6 mm \approx$ 2488 米



从 r 到 R 的可变半径称为 x =>

一圈/层的周长 $= 2\pi \cdot x$

所示环圈数 $= \frac{dx}{0.2}$

所示环中薄膜胶带的长度： $dL = 2\pi \cdot x \cdot \frac{dx}{0.2}$ =>

从 r 到 R 的影片总长度： $\int dL = \int_r^R 2\pi \cdot x \cdot \frac{dx}{0.2}$ ⇔

$L = \frac{2\pi}{0.2} \int_r^R x\, dx$ ⇔ $L = 10\pi \left[\frac{1}{2} x^2\right]_r^R$ ⇔

$L = 10\pi\, (\frac{1}{2}(R^2 - r^2))$ ⇔ $L = 5\pi(400^2 - 40^2)$ ⇔

$L \approx 2.488 \cdot 10^6 mm \approx$ 2488 米

遵守。

3B.006

$$A_{O型圈} = \frac{\pi}{4}\, d^2 = \frac{\pi}{4}\, 5.8^2 \approx 26.42\, mm$$

Guldin 2 的 O 形圈体积：

$$V_{O型圈} = A_{O型圈} \cdot 2\pi R = 26.42 \cdot 2\pi \cdot 60 \qquad \Leftrightarrow$$

$$V_{O型圈} = 9960\, mm^3 \qquad \text{这是 } 98\% \qquad =>$$

$$V_{槽} = \frac{100}{98} \cdot 9960 = 10163 \qquad \text{这是 } 100\%$$

Guldin 2 的凹槽体积：

$$V_{槽} = A_{槽} \cdot 2\pi R \qquad \Leftrightarrow$$

$$10163 = (6 \cdot h) \cdot 2\pi \cdot 60 \qquad \Leftrightarrow$$

$$h = \frac{10163}{6 \cdot 2\pi \cdot 60} \qquad \Leftrightarrow$$

$$h \approx 4.49\, mm$$

3B.007

$$V = 长 \cdot 宽 \cdot 高 \qquad =>$$

$$V = (450 - 2x) \cdot (300 - 2x) \cdot x \qquad \Leftrightarrow$$

$$V = (135\,000 - 900x - 600x + 4x^2)x \qquad \Leftrightarrow$$

$$V = 135\,000x - 1500x^2 + 4x^3 \qquad =>$$

$$V' = 135\,000 - 3000x + 12x^2$$

V 的最大值为 $V' = 0$ =>

$$12x^2 - 3000x + 135\,000 = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{3000 \pm \sqrt{3000^2 - 4 \cdot 12 \cdot 135000}}{2 \cdot 12} = \frac{3000 \pm 1587}{2 \cdot 12} \qquad \Leftrightarrow$$

$x \approx 58.9\ mm$ (和 191)

3B.008

由于体积以升为单位 = dm³（立方分米），因此所有长度均以 dm 为单位，所有面积均以 dm² 为单位

具有两个未知数的两个方程：

$V = A \cdot h = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h = 2 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{8}{\pi d^2}$ 插入：

$A = A_{圆柱} + A_{底部和盖子} = \pi d h + 2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2$ =>

$A = \pi d \frac{8}{\pi d^2} + \frac{\pi}{2} d^2 = \frac{8}{d} + \frac{\pi}{2} d^2$ =>

$A' = -\frac{8}{d^2} + \frac{\pi}{2} 2d$

A 的最小值为 A´= 0 =>

$\frac{8}{-d^2} + \pi d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8 - \pi d^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d^3 = \frac{8}{\pi} \quad \Leftrightarrow$

$d = \left(\frac{8}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1.37\ dm$ (CAS) => $h = \frac{8}{\pi \cdot 1.37^2} \approx 1.37\ dm$

以及该地区 $A = \frac{8}{d} + \frac{\pi}{2} d^2 = \frac{8}{1.37} + \frac{\pi}{2} 1.37^2 \approx 8.84\ dm^2$

3B.009

抛物线函数 $y = ax^2 + bx + c$

这里 为了 $x = 0 \ => \ y = c = 5$

和 为了 $y = 0 \ => \ 0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 5$ 方程*1*

以及对于 $y = 0 \quad => \quad 0 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 5$ 方程2

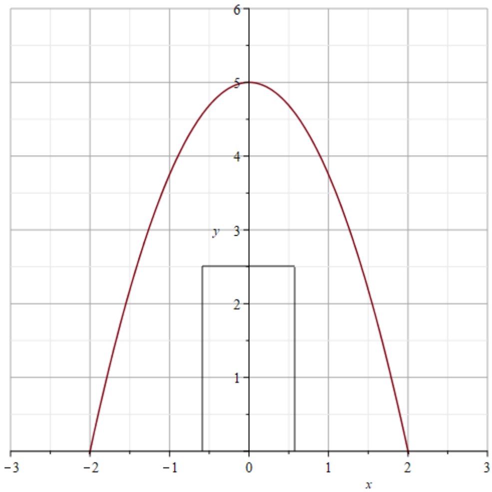
后两个方程给出：

$$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 5 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 5 \quad \Leftrightarrow$$

$$4a + 2b + 5 = 4a - 2b + 5 \quad \Leftrightarrow$$

$b = 0$ 在等式1中 $0 = a \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 5 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{-5}{4}$

所以，抛物线中心 $y = -1.25x^2 + 5$



体积公式 $V_y = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$

这里 $V_y = 2\pi \int_0^2 x(-1.25x^2 + 5)\, dx \quad \Leftrightarrow$

$$V_y = 2\pi \int_0^2 (-1.25x^3 + 5x)\, dx \quad \Leftrightarrow$$

$$V_y = 2\pi \left[\frac{-1.25x^4}{4} - \frac{5x^2}{2}\right]_0^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$V_y = 2\pi \left(\frac{-1.25 \cdot 16}{4} + \frac{5 \cdot 4}{2}\right) = 10\pi$$

和 $V_{孔} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 0.6^2 \cdot 2.5 \approx 2.83$

所以 $V_{轮毂} = 10\pi - 2.83 \approx 28.6\ dm^3$

质量 = 体积 · 密度 $= 0.0286\, m^3 \cdot 8800\, \frac{kg}{m^3} \approx 252\ kg$

3B.010

$\frac{dM}{dt} = k \cdot M$ $\Leftrightarrow$

$\frac{dM}{M} = k \cdot dt$ $\Leftrightarrow$ $\int \frac{1}{M} dM = k \int dt$ $\Leftrightarrow$

$ln\,|M| = kt + c$ => $M = e^{kt+c}$ 通用解

（为了与通常的符号进行比较，例如教科书中的符号，可以将这个表达式转换为：

$M = e^{kt+c}$ $\Leftrightarrow$ $M = e^{kt} \cdot e^{c}$ $\Leftrightarrow$ $M = c \cdot e^{kt}$

其中 e^c 是未知常数，为简单起见仍称为 c，k 可以写成负号。只要 k 未知，当常数已知时，符号 + 或 – 就会已知。）

为了 t = 0 和 M = 90 $90 = e^{c}$ $\Leftrightarrow$ $c = ln\,90 \approx 4.5$

为了 t = 60 和 M = 20:

$20 = e^{k \cdot 60 + 4.5}$ $\Leftrightarrow$ $ln\,20 = 60k + 4.5$ $\Leftrightarrow$

$3 - 4.5 = 60k$ $\Leftrightarrow$ $k = \frac{-1.5}{60} - 0.025$ $\Leftrightarrow$

$M \approx e^{-0.025t+4.5}$ 我们的具体解决方案

3B.011

$\frac{dM}{dt} = k \cdot M^2$ ⇔

$\frac{dM}{M^2} = k \cdot dt$ ⇔ $\int M^{-2} dM = k \int dt$ ⇔

$-M^{-1} = kt + c_1$ ⇔ $\frac{1}{M} = -kt + c$ ⇔

$M = \frac{1}{-kt+c}$ 通用解

为了 t = 0 和 M = 90 $90 = \frac{1}{c}$ ⇔ $c = \frac{1}{90}$

为了 t = 40 和 M = 20:

$20 = \frac{1}{-k \cdot 40 + \frac{1}{90}}$ ⇔ $-800k + \frac{2}{9} = 1$ ⇔

$k \approx -0.001$ =>

$M \approx \frac{1}{0.001t + 0.0111}$ 我们的具体解决方案

3B.012

$\frac{dM}{dt} = k \cdot M^3$ ⇔

$\frac{dM}{M^3} = k \cdot dt$ ⇔ $\int M^{-3} dM = k \int dt$ ⇔

$\frac{-M^{-2}}{2} = kt + c_1$ ⇔ $\frac{M^{-2}}{2} = -kt + c$ ⇔

$M = \left(\frac{1}{-2kt+c}\right)^{½}$ 通用解

为了 t = 0 和 M = 90 $90 = \left(\frac{1}{c}\right)^{½} \Leftrightarrow c = \frac{1}{8100}$

为了 t = 20 和 M = 20:

$$20 = \left(\frac{1}{-2k\cdot 20 + \frac{1}{8100}}\right)^{½} \Leftrightarrow \qquad 400 = \frac{1}{-40k + \frac{1}{8100}} \Leftrightarrow$$

$k \approx -0.0000282$

$M \approx \left(\frac{1}{-0.0011t + 0.0001235}\right)^{½}$ 我们的具体解决方案

3B.013

$\frac{dM}{dt} = -km$ 有解决方案 $M = c \cdot e^{-kt}$

在哪里 $M(0) = 1$ 和 $M(5730) = \frac{1}{2}$

寻找c $1 = c \cdot e^{-k\cdot 0} \Leftrightarrow c = 1$

寻找k $\frac{1}{2} = 1 \cdot e^{-k\cdot 5730} \Leftrightarrow$

$ln\frac{1}{2} = -k \cdot 5730 \Leftrightarrow$

$ln\,1 - ln\,2 = -\,5730k \Leftrightarrow$

$0 - ln\,2 = -\,5730k \Leftrightarrow$

$k = \frac{ln\,2}{5730} \approx 0.00012$

所以 $M = e^{-0.00012t}$

现在 $0.76 = e^{-0.00012t} \Leftrightarrow$

$ln\,0.76 = -0.00012t \Leftrightarrow$

$t \approx 2287$

格劳巴勒人于 2287 年前去世。

3B.014

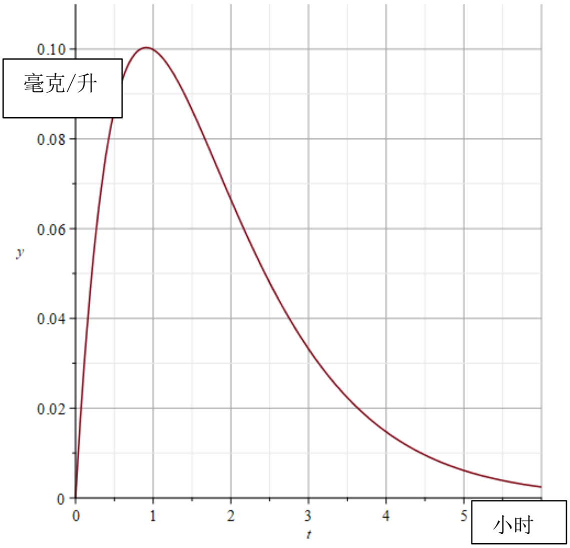
$\frac{dh}{dt} = 0.17 \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dh}{h} = 0.17 \cdot dt \quad \Leftrightarrow$

$\int_3^9 \frac{1}{h}\, dh = 0.17 \int dt \quad \Leftrightarrow \quad [\ln h]^9{}_3 = 0.17t \quad \Leftrightarrow$

$\frac{ln9 - ln3}{0.17} = t \quad \Leftrightarrow \quad t = 6.46$ 天

3B.015

$f(t) = 0.3 \cdot t \cdot e^{-1.1t}$



读数：约 0.9 小时后最大浓度约 0.10 $\frac{毫克}{升}$ 。

计算：

$$f(t) = 0.3 \cdot t \cdot e^{-1.1t} \quad =>$$

$$f'(t) = 0.3(1 \cdot e^{-1.1t} + t \cdot e^{-1.1t} \cdot (-1.1))$$

最大为 $0.3\left(1 \cdot e^{-1.1t} + t \cdot e^{-1.1t} \cdot (-1.1)\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$e^{-1.1t} - 1.1\, t \cdot e^{-1.1t} = 0 \quad \Leftrightarrow$

$e^{-1.1t}(1 - 1.1t) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$e^{-1.1t} = 0$ 或者 $(1 - 1.1t) = 0 \quad \Leftrightarrow$

无解或 $t \approx 0.909$ =>

已插入 $f(t) = 0.3 \cdot 0.909 \cdot e^{-1.1 \cdot 0.909} \quad \Leftrightarrow$

$f(t) \approx 0.1$

遵守。

3B.016

$$a_{平均的} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3101-0}{14-0} = 221.5\ \frac{m}{s^2}$$

$\frac{a_{平均的}}{g} = \frac{221.5}{9.81} \approx 22.6$ 比 g 大 22.6 倍或大约 $23\ g's$

不，宇航员拿的要少得多。

仅设备。

不，宇航员拿的要少得多。

仅设备。

3B.017

$$\frac{dM}{dx} = 0.000369 \cdot M(15.5 - M)$$

逻辑斯蒂微分方程，其解公式为：

$y = \frac{m}{1+ce^{-amx}}$

这里 $M = \frac{15.5}{1+ce^{-0.000369 \cdot 15.5 \cdot x}}$ =>

x = 400 和 M = 13.1 =>

$$13.1 = \frac{15.5}{1+ce^{-0.000369 \cdot 15.5 \cdot 400}} \quad \Leftrightarrow$$

$$13.1(1 + ce^{-2.29}) = 15.5 \quad \Leftrightarrow$$

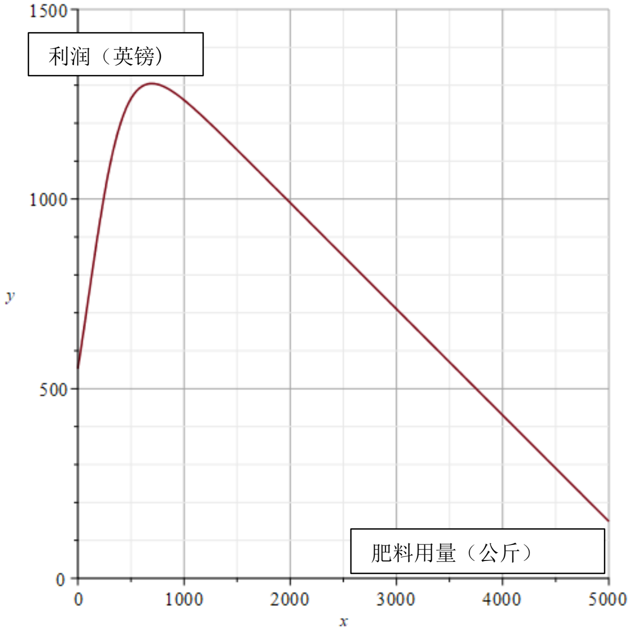
$$13.1 + 13.1 \cdot ce^{-2.29} = 15.5 \quad \Leftrightarrow$$

$$c = \frac{15.5-13.1}{13.1 \cdot e^{-2.29}} = 1.805 \quad =>$$

$$M = \frac{15.5}{1+1.805 \cdot e^{-0.00572 \cdot x}}$$

利润 = 销售额 - 成本 => 利润 $= M \cdot 100 - 0.28 \cdot x$

（M 在显示之前插入到 Profit 函数中，可以通过 CAS（如此处），或者更粗略地通过正常的坐标计算）。



使用约 700 公斤肥料时，利润最大约为 1300 磅。

3B.018

$$\frac{dL}{dt} = k(100 - L)$$

最大长度为： 100 cm

$$\frac{dL}{dt} = k(100 - L) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dL}{dt} = 100k - kL \quad \Leftrightarrow$$

$$L = 100 + ce^{-kt}$$

寻找c: L = 0.4 和 t = 0 插入 :

$$0.4 = 100 + ce^{-k \cdot 0} \quad \Leftrightarrow$$

$$0.4 = 100 + c \quad \Leftrightarrow$$

$$c = -99.6 \quad =>$$

$$L = 100 + (-99.6)e^{-kt}$$

寻找k: L = 11 和 t = 1 插入：

$$11 = 100 - 99.6 \cdot e^{-k \cdot 1} \qquad \Leftrightarrow$$

$$-89 = -99.6 \cdot e^{-k} \qquad \Leftrightarrow$$

$$e^{-k} = 0.89 \qquad \Leftrightarrow$$

$$-k = ln\, 0.89 = -0.1125 \qquad =>$$

$$L = 100 - 99.6 \cdot e^{-0.1125 \cdot t}$$

L = 40   =>

$$40 = 100 - 99.6 \cdot e^{-0.1125 \cdot t} \qquad \Leftrightarrow$$

$$-60 = -99.6 \cdot e^{-0.1125 \cdot t} \qquad \Leftrightarrow$$

$$0.6024 = e^{-0.1125 \cdot t} \qquad \Leftrightarrow$$

$$ln\, 0.6024 = -0.1125 \cdot t \qquad \Leftrightarrow$$

$t \approx 4.5$ 年

L = 60   =>

$$60 = 100 - 99.6 \cdot e^{-0.1125 \cdot t} \qquad \Leftrightarrow$$

$$0.4016 = e^{-0.1125 \cdot t} \qquad \Leftrightarrow$$

$t \approx 8.1$ 年

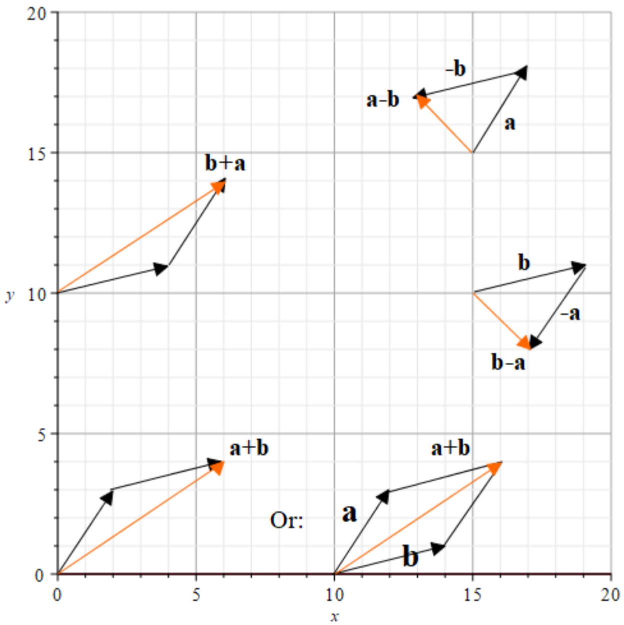
因此年龄区间为 [4.4 ; 8.1] 年.

第 4 部分。

A 部分 – 提议的解决方案

4A.001

$\boldsymbol{a} = \binom{2}{3} \quad \boldsymbol{b} = \binom{4}{1} \quad => \quad -\boldsymbol{a} = \binom{-2}{-3} \quad -\boldsymbol{b} = \binom{-4}{-1}$



$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \binom{2}{3} + \binom{4}{1} = \binom{6}{4} \qquad \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \binom{4}{1} + \binom{2}{3} = \binom{6}{4}$

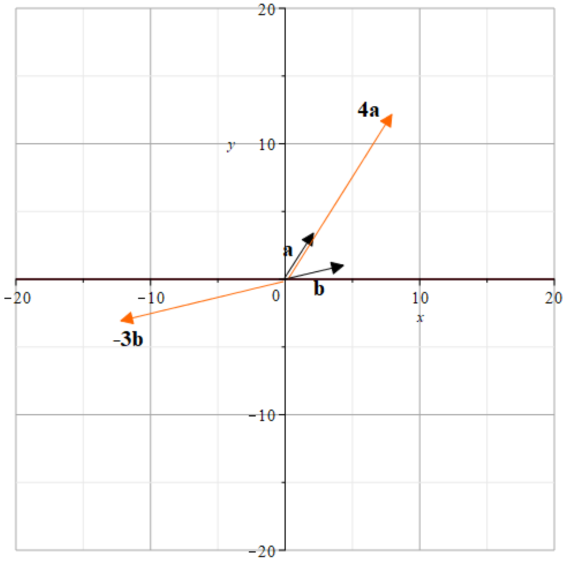
$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \binom{2}{3} - \binom{4}{1} = \binom{-2}{2} \qquad \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \binom{4}{1} - \binom{2}{3} = \binom{2}{-2}$

4A.002

$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} \quad => \quad |\boldsymbol{a}| = (2^2 + 3^2)^{½} = 13^{½} = \sqrt{13}$

$\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \quad => \quad |\boldsymbol{a}| = (4^2 + 1^2)^{½} = 17^{½} = \sqrt{17}$

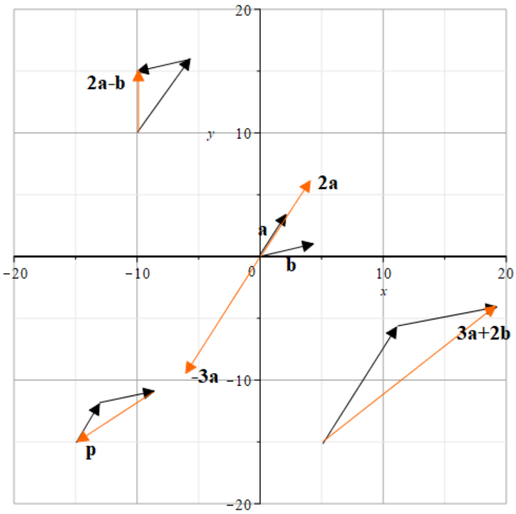
4A.003



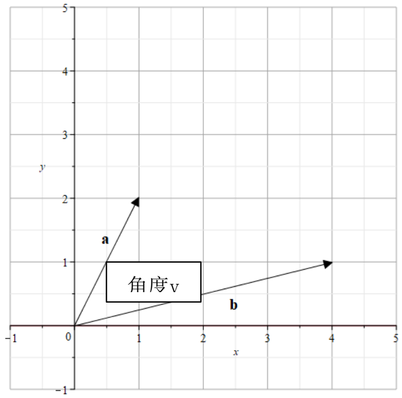
$$\boldsymbol{a} = \binom{2}{3} \quad => \quad 4\boldsymbol{a} = \binom{4 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \binom{8}{12}$$

$$\boldsymbol{b} = \binom{4}{1} \quad => \quad -3\boldsymbol{b} = \binom{(-3) \cdot 4}{(-3) \cdot 1} = \binom{-12}{-3}$$

4A.004



4A.005



$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \binom{2}{3} \cdot \binom{4}{1} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 11$

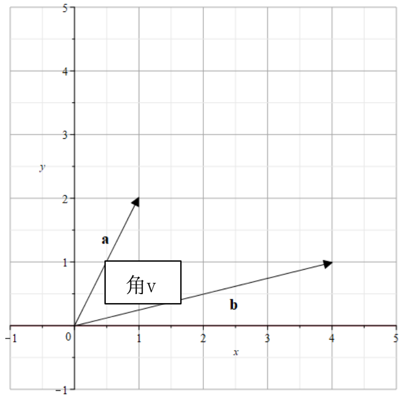
角度计算公式为 $\quad \cos v = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} \quad =>$

在这里，使用毕达哥拉斯来计算长度 $\quad \cos v = \frac{11}{(2^2+3^2)^{½} \cdot (4^2+1^2)^{½}} \quad \Leftrightarrow$

$v = cos^{-1} \frac{11}{221^{½}} \approx 42.3°$

4A.006

$\boldsymbol{a} = \binom{2}{3} \qquad \boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$



$$\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 12 = -10$$

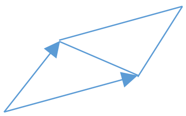
角度计算公式为 $\quad sin\, v = \frac{det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} \quad =>$

在这里，使用毕达哥拉斯来计算长度 $\quad sin\, v = \frac{-10}{13^{½} \cdot 17^{½}} \quad \Leftrightarrow$

$$v = sin^{-1} \frac{-10}{221^{½}} \approx 42.3°$$

4A.007

我们有两个向量 $\quad \boldsymbol{a} = \binom{2}{3} \quad \boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$



公式 $\quad A_{平行四边形} = |\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|$

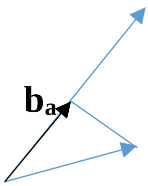
这里 $\quad |\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| = |\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}| = 10$

所以 $\quad A_{平行四边形} = 10$

和 $\quad A_{三角形} = 5$

4A.008

我们有两个向量 $\quad \boldsymbol{a} = \binom{4}{6} \quad \boldsymbol{b} = \binom{4}{1}$



公式 $\quad \boldsymbol{b_a} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2} \cdot \boldsymbol{a} \quad =>$

这里 $\quad \boldsymbol{b_a} = \frac{\binom{4}{6}\cdot\binom{4}{1}}{52} \cdot \binom{4}{6} \quad \Leftrightarrow$

$$\boldsymbol{b_a} = \frac{22}{52} \cdot \binom{4}{6} \approx \binom{1.69}{2.54}$$

以及长度公式 $|\boldsymbol{b_a}| = \frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$ =>

这里 $|\boldsymbol{b_a}| = \frac{22}{52^{½}} \approx 3.05$

4A.009

公式 $\binom{x}{y} = \binom{x_0}{y_0} + t\binom{r_1}{r_2}$

这里 $\binom{x}{y} = \binom{4}{7} + t\binom{1}{2}$

坡度为 $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{1} = 2$

y 轴相交为 $x = 0$ =>

$4 + t = 0$ ⇔

$t = -4$ =>

$y = 7 - 4 \cdot 2 = -1$ =>

交点 (0,-1)

4A.010

$\binom{x}{y} = \binom{4}{7} + t\binom{1}{2}$

传统形式：

坡 $= \frac{2}{1} = 2 = a$ => $y = 2(x - 4) + 7$ ⇔

$y = 2x - 8 + 7$ ⇔

$y = 2x - 1$

向量形式：

$\boldsymbol{r} = \binom{1}{2}$ => $\boldsymbol{n} = \binom{-2}{1}$ 并点 $(x_0,y_0) = (4,7)$ =>

$-2(x-4) + 1(y-7) = 0$ 和 $-2x + y + 1 = 0$

4A.011

$\boldsymbol{a} = \binom{-12}{-5}$ => $\boldsymbol{u} = \frac{\binom{-12}{-5}}{((-12)^2+(-5)^2)^{½}} = \frac{\binom{-12}{-5}}{13}$ ⇔

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{-12}{13} \\ \frac{-5}{13} \end{pmatrix}$$

交叉向量 u 在 + 方向上旋转 90° ：

$$\boldsymbol{u}_{叉} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{-12}{13} \end{pmatrix}$$

4A.012

A(-2,0) B(6,4) C(2,-3)

我们将通过毕达哥拉斯检查，因此，我们需要边长，即向量的长度 **AB AC BC**

$\boldsymbol{AB} = \binom{6-(-2)}{4-0} = \binom{8}{4}$ => $|\boldsymbol{AB}|^2 = 8^2 + 4^2 = 80$

$\boldsymbol{AC} = \binom{2-(-2)}{(-3)-0} = \binom{4}{-3}$ => $|\boldsymbol{AC}|^2 = 4^2 + (-3)^2 = 25$

$\boldsymbol{BC} = \binom{2-6}{(-3)-4} = \binom{-4}{-7}$ => $|\boldsymbol{BC}|^2 = (-4)^2 + (-7)^2 = 55$

毕达哥拉斯： $|\boldsymbol{AB}|^2 = |\boldsymbol{AC}|^2 + |\boldsymbol{BC}|^2$ =>

$80 = 25 + 55$ 这是真的 =>

三角形是直角的。

4A.013

A(3,1) B(1,-1) and C(-1,-2) =>

$\boldsymbol{AB} = \binom{-2}{-2}$ $\boldsymbol{AC} = \binom{-4}{-3}$ $\boldsymbol{BA} = \binom{2}{2}$ $\boldsymbol{BC} = \binom{-2}{-1}$

$\boldsymbol{CA} = \binom{4}{3}$ $\boldsymbol{CB} = \binom{2}{1}$

公式 $\cos v = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}$

这里 $\cos A = \frac{\boldsymbol{AB} \cdot \boldsymbol{AC}}{|\boldsymbol{AB}| \cdot |\boldsymbol{AC}|}$ => $\cos A = \frac{14}{8^{½} \cdot 25^{½}}$ ⇔

$A = cos^{-1} \frac{14}{8^{½} \cdot 25^{½}} \approx 8.13°$

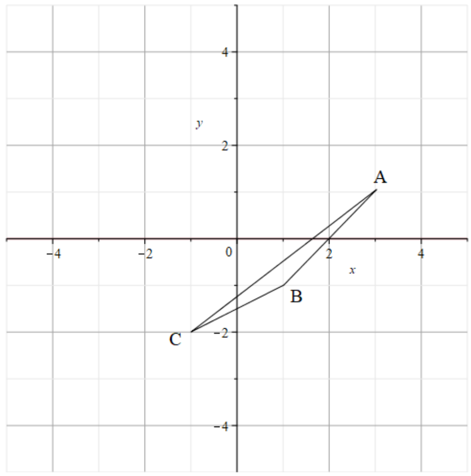
和 $\cos B = \frac{\boldsymbol{BA} \cdot \boldsymbol{BC}}{|\boldsymbol{BA}| \cdot |\boldsymbol{BC}|}$ => $\cos B = \frac{-6}{8^{½} \cdot 5^{½}}$ ⇔

$B = cos^{-1} \frac{-6}{8^{½} \cdot 5^{½}} \approx 161.57°$

和 $\cos C = \frac{\boldsymbol{CA} \cdot \boldsymbol{CB}}{|\boldsymbol{CA}| \cdot |\boldsymbol{CB}|}$ => $\cos C = \frac{11}{25^{½} \cdot 5^{½}}$ ⇔

$C = cos^{-1} \frac{11}{25^{½} \cdot 5^{½}} \approx 10.30°$

控制 $8.13 + 161.57 + 10.30 = 180°$ 好的。



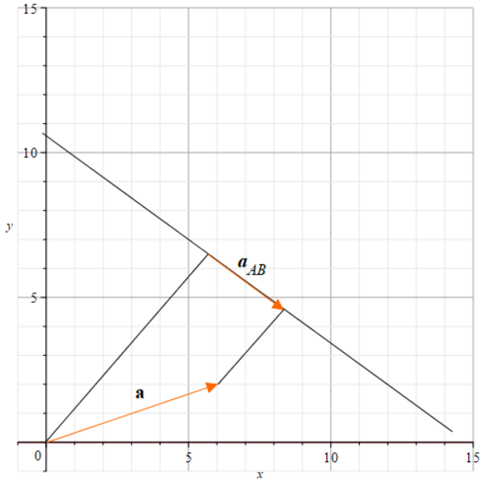
4A.014

$$\boldsymbol{AB} = \binom{7}{-5}$$

公式 $\boldsymbol{b_a} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\cdot\boldsymbol{a}$ =>

这里 $\boldsymbol{a}_{AB} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{AB}}{|\boldsymbol{AB}|^2}\cdot\boldsymbol{AB} = \frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{7}{-5}}{74}\cdot\binom{7}{-5}$ ⇔

$$\boldsymbol{a}_{AB} = \frac{32}{74}\cdot\binom{7}{-5} \approx \binom{3.03}{-2.16}$$



4A.015

(10,10) 和 $-2x + y + 1 = 0$

公式 $d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{(a^2+b^2)^{½}}$

这里 $d = \frac{|(-2)\cdot 10+1\cdot 10+1|}{((-2)^2+1^2)^{½}} = \frac{9}{5^{½}} \approx 4.02$

4A.016

(-12,-8) 和 $\binom{x}{y} = \binom{-4}{-4} + t\binom{2}{3}$ ⇔

传统形式的线条 $y = \frac{3}{2}\left(x - (-4)\right) - 4$ ⇔

$3x - 2y + 4 = 0$ =>

距离 $d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{(a^2+b^2)^{½}}$

$d = \frac{|3(-12)+(-2)(-8)+4|}{(3^2+(-2)^2)^{½}} = \frac{16}{13^{½}} \approx 4.44$

4A.017

$\boldsymbol{OP} = 5\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$

长度 $(5^2 + 5^2)^{½} = 50^{½}$

角度 $tan\ \theta = \frac{5}{5}$ => $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$

所以 $P(50^{½}, \frac{\pi}{4})$ or $P(\sqrt{50}, \frac{\pi}{4})$

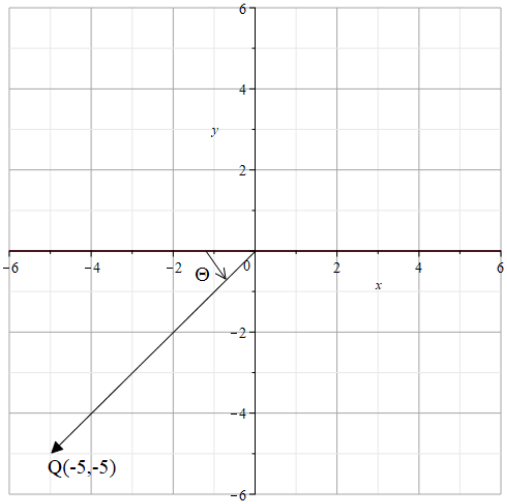
4A.018

$\boldsymbol{OQ = -5i - 5j}$

长度 $((-5)^2 + (-5)^2)^{½} = 50^{½}$

角度 $tan\ \theta = \frac{-5}{-5}$ => $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$ 第三象限角

之间的角度 +x 和 OQ 是 $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

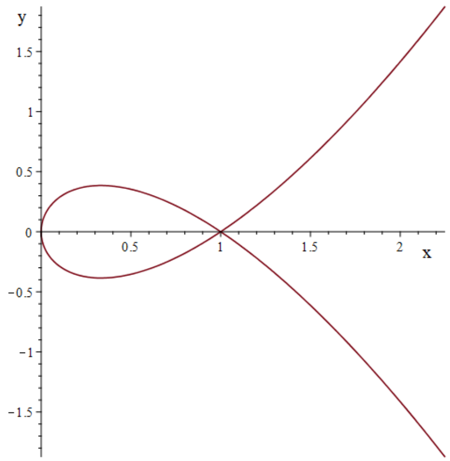


所以 $P(50^{½}, \frac{5\pi}{4})$ 或者 $P(\sqrt{50}, \frac{5\pi}{4})$

或者朝负方向 $P(50^{½}, -\frac{3\pi}{4})$

4A.019

$\boldsymbol{r}(t) = \binom{x}{y} = \binom{t^2}{t^3 - t}$



在双点中我们有 $x_1 = x_2$ => ${t_1}^2 = {t_2}^2$

和 $y_1 = y_2$ => ${t_1}^3 - t_1 = {t_2}^3 - t_2$

有两个未知数的两个方程。通过猜测我们显然有根

$t = 0$ 或者 $t = 1$ 或者 $t = -1$

但由于 t_1 和 t_2 不同，因此只有 $t_1 = -t_2$ 为真。因此 $t = 0$ 不是根。

所以，既然找到了 t，我们就可以继续从这里找到 (x, y)，但让我们也使用另一个方程来检查：

我们插入 $t_1 = -t_2$

${t_1}^3 - t_1 = {t_2}^3 - t_2$ =>

$(-t_2)^3 - (-t_2) = {t_2}^3 - t_2$ ⇔

$t_2 + t_2 = 2{t_2}^3$ ⇔

$t_2 = {t_2}^3$ =>

$t_2 = (0)$ 或者 -1 或者 1 => $t_1 = 1$ 或者 -1

所以， $t_2 = \pm 1$ 和 $t_1 = \pm 1$

$t = -1 \quad => \quad x = (-1)^2 = 1$ 和 $y = (-1)^3 - (-1) = 0$

$t = 1 \quad => \quad x = 1^2 = 1$ 和 $y = 1^3 - 1 = 0$

因此，一个双点： (1,0)

水平切线：

$\frac{dy}{dt} = 0 \quad => \quad 3t^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad t \approx \pm 0.577 \quad =>$

以点为单位的水平切线：

$(x_1, y_1) = (0.577^2\,;\, 0.577^3 - 0.577) \approx (0.333\,;\, -0.385)$

$(x_2, y_2) = ((-0.577)^2\,;\, (-0.577)^3 - (-0.577)) \approx$

$(0.333\,;\, 0.385)$

垂直切线：

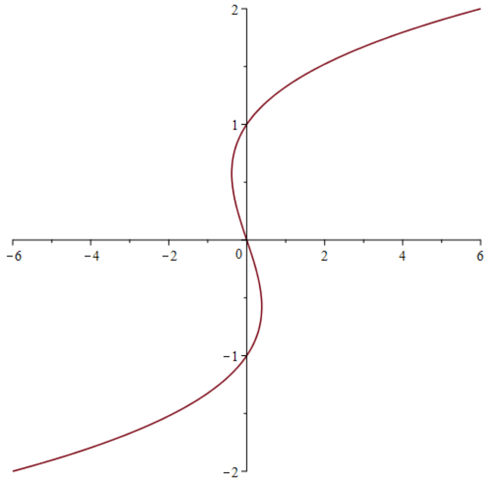
$\frac{dx}{dt} = 0 \quad => \quad 2t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{t} = 0 \quad =>$

点的垂直切线：

$(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (0^2\,;\, 0^3 - 0) = (0\,;\, 0)$

4A.020

$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ t \end{pmatrix}$



双倍积分 $x_1 = x_2 \quad => \quad {t_1}^3 - t_1 = {t_2}^3 - t_2$

和 $y_1 = y_2 \quad => \quad t_1 = t_2$

结合起来我们有 $t_1 = t_2$ 这不是两个不同的参数，因此：
没有双点。

水平切线：

$\frac{dy}{dt} = 0 \quad => \quad 1 = 0$ 这是错误的，因此：没有水平切线。

垂直切线：

$\frac{dx}{dt} = 0 \quad => \quad 3t^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad t \approx \pm 0.577 \quad =>$

以点为单位的垂直切线：

$t = 0.707 \quad => \quad (x_1, y_1) \approx (-0.385\,;\ 0.577)$

$t = -0.707 \quad => \quad (x_2, y_2) \approx (0.385\,;\ -0.577)$

在以下 3D 几何问题的解决方案中，最好展示图表。然而，如果没有计算机辅助设计程序，这就不那么容易了，这超出了本书的范围。因此，解决方案的呈现没有图表/图形。然而，手工制作的原理草图可能会有所帮助。

4A.021

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ =>

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{pmatrix}$

$t \cdot \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} t \cdot a_1 \\ t \cdot a_2 \\ t \cdot a_3 \end{pmatrix}$ $|\boldsymbol{a}| = (a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2)^{½}$

4A.022

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ =>

$|\boldsymbol{a}| = (2^2 + 3^2 + 4^2)^{½} = 29^{½}$

$|\boldsymbol{b}| = (1^2 + 4^2 + (-2)^2)^{½} = 21^{½}$

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 3+4 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = (3^2 + 7^2 + 2^2)^{½} = 62^{½}$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2-1\\3-4\\4+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\6\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=(1^2+(-1)^2+6^2)^{½}=38^{½}$$

$$2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\cdot1\quad-2\\2\cdot4\quad-3\\2\cdot(-2)-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5\\-8\end{pmatrix}$$

$$|2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=(0^2+5^2+(-8)^2)^{½}=89^{½}$$

4A.023

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix}\qquad\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-10\\2\\26\end{pmatrix}\qquad=>$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4(-10)+(-6)\cdot2+2\cdot26=0\quad=>$$ 是的

4A.024

$\begin{pmatrix}6\\4\\-3\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{OP}=6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$

4A.025

$\begin{pmatrix}6\\4\\-3\end{pmatrix}$ 具有相反的坐标 $\begin{pmatrix}-6\\-4\\3\end{pmatrix}$

我们通过以下方式检查： $\begin{pmatrix}6\\4\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\-4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

4A.026

$$-2\boldsymbol{a} = -2\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\-6\\-4\end{pmatrix}$$

4A.027

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}t\\t\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} = 0 \quad => \quad t + 2t - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$$

4A.028

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}t\\-2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t\\-1\\t\end{pmatrix} = 0 \quad => \quad t^2 + 2 + 3t = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1} \quad \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{-3\pm1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$t = -1 \quad or \quad -2$$

4A.029

$$\boldsymbol{a} = 9\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

4A.030

$$\boldsymbol{PQ} = \begin{pmatrix}-3-2\\6-4\\4-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\2\\5\end{pmatrix} \quad =>$$

$|\boldsymbol{PQ}| = ((-5)^2 + 2^2 + 3^2)^{½} = 54^{½}$

$\boldsymbol{PR} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ -2-4 \\ -3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ =>

$|\boldsymbol{PR}| = (1^2 + (-6)^2 + (-2)^2)^{½} = 41^{½}$

$\boldsymbol{QR} = \begin{pmatrix} 3-(-3) \\ -2-6 \\ -3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}$ =>

$|\boldsymbol{QR}| = (6^2 + (-8)^2 + (-7)^2)^{½} = 149^{½}$

$cos\ P = \frac{\boldsymbol{PQ}\cdot\boldsymbol{PR}}{|\boldsymbol{PQ}|\cdot|\boldsymbol{PR}|} = \frac{-5-12-10}{54^{½}\cdot 41^{½}} \approx -0.57$ => $P \approx 125°$

$cos\ Q = \frac{\boldsymbol{QR}\cdot\boldsymbol{QP}}{|\boldsymbol{QR}|\cdot|\boldsymbol{QP}|} = \frac{30+16+35}{149^{½}\cdot 54^{½}} \approx 0.90$ => $Q \approx 25{,}4°$

$cos\ R = \frac{\boldsymbol{RP}\cdot\boldsymbol{RQ}}{|\boldsymbol{RP}|\cdot|\boldsymbol{RQ}|} = \frac{6+48+14}{41^{½}\cdot 149^{½}} \approx 0.87$ => $R \approx 29.5°$

4A.031

P(3, 4, -1) Q(-2, 6, 4) R(4, -2, -3)

$|\boldsymbol{PQ}| = ((-2-3)^2 + (6-4)^2 + (4-(-1))^2)^{½} = 54^{½}$

$|\boldsymbol{PR}| = ((4-3)^2 + (-2-4)^2 + (-3-(-1))^2)^{½} = 41^{½}$

$|\boldsymbol{QR}| = ((4-(-2))^2 + (-2-6)^2 + (-3-4)^2)^{½} = 149^{½}$

PQ 的中点： $\left(\frac{3-2}{2}, \frac{4+6}{2}, \frac{-1+4}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 5, \frac{3}{2}\right)$

PR 的中点： $\left(\frac{3+4}{2}, \frac{4-2}{2}, \frac{-3-1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 1, -2\right)$

QR 的中点： $\left(\frac{-2+4}{2},\frac{6-2}{2},\frac{4-3}{2}\right)=\left(1,2,\frac{1}{2}\right)$

4A.032

P(2, -1, 4) 和 Q(-3 , 4, 7) =>

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{PQ}=\begin{pmatrix}2-(-3)\\-1-4\\4-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-8\\-3\end{pmatrix}$$ 也可能是QP =>

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\-5\\3\end{pmatrix}$$ 插入 P - 也可能是 Q

4A.033

x 轴相交为 y = 0 和 z = 0:

$y=0$ => $0=-1+t(-5)$ ⇔ $t=-\frac{1}{5}$

$z=0$ => $0=4+t\cdot 3$ ⇔ $t=-\frac{4}{3}$

不同的t => 无交叉点

y 轴相交 x = 0 和 z = 0:

$x=0$ => $0=2+5t$ ⇔ $t=-\frac{2}{5}$

$z=0$ => $0=4+t\cdot 3$ ⇔ $t=-\frac{4}{3}$

不同的t => 无交叉点

z 轴相交 for x = 0 和 y = 0:

$x = 0 \quad => \quad t = -\frac{2}{5}$

$y = 0 \quad => \quad t = -\frac{1}{5}$

不同的t => 无交叉点

4A.034

在线插入点：

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad =>$$

$x\colon\ 3 = -1 - 2t \quad \Leftrightarrow \quad t = -2 \qquad y\colon\ -1 = 2 - t \quad \Leftrightarrow \quad t = 3$

$z\colon\ 7 = -3 - 4t \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{5}{2}$

不同 t => 否

4A.035

在线插入点：

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad =>$$

$x\colon\ -3 = -1 - 2t \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 \qquad y\colon\ 1 = 2 - t \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$

$z\colon\ -7 = -3 - 4t \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$

相同 t => 是

4A.036

仅当 s 和 t 在所有三个方向上的该点都相同时，这些线才能相交。我们通过 x 和 y 找到 s 和 t，并通过 z 进行测试：

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 26 \\ -11 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix}$ =>

$x = -6 - 4s$ 和 $x = -30 + 12t$

$y = 14 + 12s$ 和 $y = 26 - 6t$

求 s 和 t：

$-6 - 4s = -30 + 12t$ 和 $14 + 12s = 26 - 6t$ =>

$s = 0$ 和 $t = 2$

插入z => $z_1 = 17$ 和 $z_2 = 17$ 相同的值 =>

s = 0 和 t = 2 点的交点 =>

交点 (-6, 14, 17)

4A.037

仅当 s 和 t 在所有三个方向上的该点都相同时，这些线才能相交。我们通过 x 和 y 找到 s 和 t，并通过 z 进行测试：

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ =>

$x = 2 - 2s$ 和 $x = 2t$

$y = 1 + s$ 和 $y = 0$

寻找 s 和 t:

$2-2s=2t$ 和 $1+s=0$ =>

$s=-1$ 和 $t=2$

插入于z => $z_1=2$ 和 $z_2=7$ 不同的值 =>

$z_1 \neq z_2$ => 无交叉点

4A.038

当AB ⊥ n（AB 与 n 正交）（平面的法向量）时，直线与平面平行 =>

$$\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad => \quad \begin{pmatrix}4\\t-3\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=4+2t-6+12=0 \quad \Leftrightarrow$$

$t=-5$

4A.039

α: $4x-8y+6z=2$ β: $-5x-10y-10z=2$

$$\boldsymbol{n}_\alpha=\begin{pmatrix}4\\-8\\6\end{pmatrix} \text{ 不成正比 } \boldsymbol{n}_\beta=\begin{pmatrix}-5\\-10\\-10\end{pmatrix} => \text{不平行}$$

x 和 y 在 z 轴上为零 => α 相交于

$0-0-6z=2 \Leftrightarrow z=\frac{1}{3}$ => $(0,0,\frac{1}{3})$

x 和 y 在 z 轴上为零 => β 相交于

$0-0-10z=2 \quad \Leftrightarrow \quad z=-\frac{1}{5} \quad => \quad (0,0,-\frac{1}{5})$

4A.040

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

α: $1(x-2)+2(y-2)+3(z-3)=0$ =>

$x-2+2y-4+3z-9=0$ ⇔

$x+2y+3z-15=0$

β: $-(x+2)-2(y+2)-3(z+3)=0$ =>

$-x-2-2y-4-3z-9=0$ ⇔

$x+2y+3z+15=0$

γ: $2(x-6)+0(y-1)-4(z+2)=0$ =>

$2x-12+0-4z-8=0$ ⇔

$x-2z-10=0$

4A.041

$$\boldsymbol{n}_\alpha=\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$$

点插入 α $2\cdot1-5\cdot1+4\cdot1=1$ ⇔

$1=1$ 真的 => 是的，(1,1,1) 在 α 上

$$\boldsymbol{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 不成比例 \qquad =>$$

不是一个正常人。

通过点积检查并行性：

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 5 + 4 = 1 \neq 0 \quad => \quad 不平行。$$

4A.042

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ t \end{pmatrix} = 0 \quad => \quad 2t^2 + 1 + 3t = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} \qquad \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{-3 \pm 1}{4} \qquad \Leftrightarrow$$

$$t = -1 \quad 或者 \quad -\frac{1}{2}$$

4A.043

A(1, -1, 2) B(0, 2, 0) C(4, 2, 1)

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ 在哪里：

我们在平面上形成两个向量：

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 2 - (-1) \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 2 - (-1) \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

叉积给出法向量：

$$\boldsymbol{n}_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \mathrm{x} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{n}_\alpha$ 和 **B** 已插入: $3(x-0)-7(y-2)-12(z-0)=0 \Leftrightarrow$

$$3x-7y-12z+14=0$$

计算叉积的一个聪明方法是“重复下面的 x 值”，然后将行列式相乘，从中间开始，然后是低位，最后是顶部：

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \mathrm{x} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{中间:} \quad 3\cdot(-1)-(-2)\cdot 3 \\ \text{低的:} \quad (-2)\cdot 3-(-1)\cdot(-1) \\ \text{顶部:} \ (-1)\cdot 3-3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -12 \end{pmatrix}$$

-1 3

4A.044

D(-1, 1, -2) E(0, -2, 0) F(-4, -2, -1)

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ 在哪里：

我们在平面上形成两个向量：

$$\boldsymbol{DE} = \begin{pmatrix} 0-(-1) \\ -2-1 \\ 0-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{DF} = \begin{pmatrix} -4-(-1) \\ -2-1) \\ -1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

叉积给出法向量：

$$\boldsymbol{n}_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{n}_\beta$ 和 **E** 已插入: $3(x-0)-7(y+2)-12(z-0)=0 \Leftrightarrow$

$$3x - 7y - 14 - 12z = 0$$

插入 (0, -2, 0) : $3 \cdot 0 - 7(-2) - 14 - 12 \cdot 0 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$14 - 14 = 0$ 真 => 是

4A.045

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ =>

$A_{平行四边形} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}| = (3^2 + (-6)^2 + 5^2)^{½} \quad \Leftrightarrow$

$A_{平行四边形} = \sqrt{70} \approx 8.37$ =>

（关于叉积的计算技术，参见问题4A.043的解答）。

$A_{三角形} = \frac{1}{2} \cdot A_{平行四边形} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{70} \approx 4.18$

4A.046

A(1, 1, 1) B(1, 2, 3) C(3, 1, 2) =>

$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ => $\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ =>

$A_{三角形} = \frac{1}{2} \cdot (1^2 + 4^2 + (-2)^2)^{½} = \frac{1}{2}\sqrt{21} \approx 2.29$

4A.047

平面之间的角度等于其法线向量之间的角度：

$$\boldsymbol{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{n}_1| = \sqrt{19} \quad 和 \quad |\boldsymbol{n}_2| = \sqrt{29}$$

公式 $\quad cos\ v = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|}$

这里 $\quad cos\ v = \frac{19}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{29}} \quad \Rightarrow \quad v = cos^{-1}\left(\frac{19}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{29}}\right) \approx 36°$

4A.048

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad 和 \quad 3x + 3y - z + 4 = 0$$

x、y 和 z 来自插入平面中的线：

$3(1 + 2t) + 3(2 + t) - (3 + 5t) + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$3 + 6t + 6 + 3t - 3 - 5t + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$t = \frac{5}{2}$ 插入到该行中 ½ =>

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{9}{2} \\ \frac{31}{2} \end{pmatrix}$$ 这是位置向量 =>

观点 $(6, \frac{9}{2}, \frac{31}{2})$

4A.049

P(1, 2, 3) 和 Q(4, 5, 6) => $\boldsymbol{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ =>

插入 P 和 PQ 的线 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$4x - y + 2z - 6 = 0$ => $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

线方向向量与平面法向量之间的角度为:

$$cos\ v = \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{r}| \cdot |\boldsymbol{n}|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{(3^2+3^2+3^2)^{½} \cdot (4^2+(-1)^2+2^2)^{½}} \quad ⇔$$

$$cos\ v = \frac{15}{\sqrt{27} \cdot \sqrt{21}} \quad => \quad v = cos^{-1}\left(\frac{15}{\sqrt{27} \cdot \sqrt{21}}\right) \approx 51°$$

与平面本身的角度: 90 – 51 = 39°

4A.050

平面 β 与平面 α 有相同的法线向量 =>

$\boldsymbol{n}_\beta = \boldsymbol{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ 和点 (5, 3, 1) =>

$1(x-5) + 3(y-3) - 1(z-1) = 0$ ⇔

$\beta\colon\ x + 3y - z - 13 = 0$

4A.051

P(6, 0, 2) 和 $\alpha\colon\ 6x + 3y + 2z - 5 = 0$ =>

公式 距离$(P, \alpha) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{(a^2+b^2+c^2)^{½}}$ =>

这里 距离$(P,\alpha) = \frac{|6\cdot6+3\cdot0+2\cdot2-5|}{(36+9+4)^{½}} = 5$

4A.052

平面之间的角度等于其法线向量之间的角度：

$$\boldsymbol{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{n}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad => \quad |\boldsymbol{n}_1| = \sqrt{14} \ \text{和} \ |\boldsymbol{n}_2| = \sqrt{21}$$

公式 $\cos v = \frac{\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{n}_\beta}{|\boldsymbol{n}_\alpha| \cdot |\boldsymbol{n}_\beta|}$

这里 $\cos v = \frac{-3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}}$ => $v \approx 100°$ 钝角

和 $u \approx 180 - 100 \approx 80°$ 锐角

4A.053

$3x - 3 + 2y + 10 - 2z + 4 = 0$ 和点 (3, 7, 2) =>

距离 $= \frac{|3\cdot3+2\cdot7+(-2)\cdot2+11|}{(9+4+4)^{½}} = \frac{30}{\sqrt{17}} \approx 7.28$

4A.054

控制方式：距离 = 半径 =>

(-9, 9, -11) 与 r = 12 和 $2x + y + 2z = 5$ =>

距离 $= \frac{|2\cdot(-9)+1\cdot9+2\cdot(-11)-5|}{(4+1+4)^{½}} = \frac{36}{3} = 12$ => 是的

将接触点放置在一条直线上，其方向向量等于平面的法向量，并穿过球体的中心：

$\boldsymbol{r}_{line} = \boldsymbol{n}_{plane} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 和 (-9, 9, -11) =>

线 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

代入平面方程：

$2(-9 + 2t) + 1(9 + t) + 2(-11 + 2t) = 5$ ⇔

$-18 + 4t + 9 + t - 22 + 4t - 5 = 0$ ⇔

$t = 4$

代入直线方程：

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ -3 \end{pmatrix}$ 这是位置向量 =>

点 (-1, 13,-3)

4A.055

通过 (2, 1, 2) 和 (3, 3, 3) 的直线具有方向向量：

$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 3-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

我们从直线上的点 $P_0(2, 1, 2)$ 到点 P(1, 1, 1) 形成一个向量 $\mathbf{P_0P}$

$\boldsymbol{P_0P} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

公式 $d = \frac{|\boldsymbol{r}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P_0P}|}{|\boldsymbol{r}|}$

这里 $d = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \boldsymbol{x} \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\right|}{(1+4+1)^{½}} = \frac{(4+0+4)^{½}}{(1+4+1)^{½}} = \frac{8^{½}}{6^{½}} \approx 1.15$

（关于叉积的计算技术，参见问题 4A.043 的解答）。

4A.056

公式 $d = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P_1P_2}|}{|\boldsymbol{n}|}$ P_2是m上的点，P_1是l上的点

在哪里 $\boldsymbol{P_1P_2} = \begin{pmatrix}2-0\\4-(-5)\\-2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\9\\-3\end{pmatrix}$

和 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_l \times \boldsymbol{r}_m = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \boldsymbol{x} \begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ =>

$|\boldsymbol{n}| = 14^{½} = \sqrt{14}$

和 $|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P_1P_2}| = 6 + 9 + 6 = 21$

所以 $d = \frac{21}{\sqrt{14}} \approx 5.6$

4A.057

α: $x + 3y - z - 5 = 0$ β: $x + 3y - z - 10 = 0$

我们在 α 上选择一个点并找到它到 β 的距离

α: 选择 x = 0 和 y = 0 => z = -5 => (0 ,0 -5) =>

公式　　距离$(P,\alpha) = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{(a^2+b^2+c^2)^{½}}$ =>

这里　　距离$(P,\alpha) = \frac{|1\cdot0+3\cdot0+(-1)\cdot(-5)-10|}{(1^2+3^2+(-1)^2)^{½}} = \frac{|-5|}{11^{½}} = \frac{5}{11^{½}} \approx 1.51$

4A.058

通过 P(1, 2, 3) 和 Q(4, 6, 8) 的线具有方向向量

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{PQ} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 6-2 \\ 8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ => $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

PQ 与 $\boldsymbol{n}_{飞机}$ 之间的角度为

$cos\ u = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{21}} = \frac{18}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{21}} \approx 0.555$ => u = 56.3° =>

v = 90 – u ≈ 33,7°

4A.059

x = 0　和　y = 0　=>　z = 6　=>　C(0, 0, 6)

x = 0　和　z = 0　=>　y = 3　=>　B(0, 3, 0)

y = 0　和　z = 0　=>　x = 2　=>　A(2, 0, 0)

我们形成两个向量　$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ =>

区域 $= \frac{1}{2}|\boldsymbol{AB}\ x\ \boldsymbol{AC}|$　在哪里 $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$ =>

$$区域 = \frac{1}{2}|\boldsymbol{AB} \ x \ \boldsymbol{AC}| = \frac{1}{2}(18^2 + 12^2 + 6^2)^{½} = \frac{504^{½}}{2} \approx 11.2$$

Origo 在 α 上的投影沿着穿过（0, 0, 0）的线，其方向向量等于平面 α 的法向量：

$$3x + 2y + z = 6 \quad => \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad => \quad l\!: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

直线与平面的交点，因此我们在 α 中插入 l：

$$3(3t) + 2(2t) + t = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 9t + 4t + t = 6 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{3}{7}$$

插入l: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$

这是点的位置向量：$(\frac{9}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7})$

4A.060

我们确定交线上的一个点，选择 z = 0 =>

$\alpha\!: \ x + y = 0 \qquad \beta\!: \ 2x + 3y = 3$ =>

$\alpha\!: \ x = -y$ => $\beta\!: \ -2y + 3y = 3 \ => \ y = 3$ =>

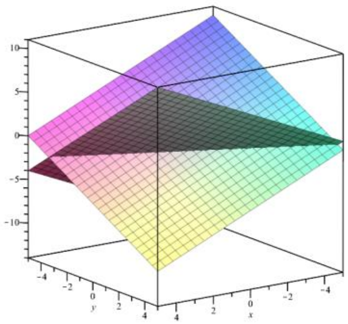
$y = 3$ 和 $x = -3$

所以，交线上的点是 (-3, 3, 0)

线的方向向量与两个平面法向量正交：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}_\alpha \; x \; \boldsymbol{n}_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$ =>

交叉线 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$



控制：选择 t = 1 => 线上的点： $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ =>

α: -8 + 7 + 1 = 0 β: -16 + 21 -2 = 3 两者都是真的 =>

重点也在 α 和 β 上。

4A.061

α: $3x + 12y - 4z = -6$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 + 10z = -24$

领域 $x^2 + y^2 + (z + 5)^2 = -24 + 25$ =>

C(0, 0, -5) 和 r = 1

$$距离(C,\alpha) = \frac{|3\cdot 0+12\cdot 0+(-4)\cdot(-5)+6|}{(9+144+16)^{½}} = 2$$

$\mathbf{n}_\alpha$ 等于 $\mathbf{r}_l$ => $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$

l 等于 α => l 插入 α 的交集 =>

$3(3t) + 12(12t) - 4(-5 - 4t) + 6 = 0$ ⇔

$9t + 144t + 20 + 16t + 6 = 0$ ⇔

$169t + 26 = 0$ ⇔

$t = \frac{-26}{169}$ 插入 l 产生交点/投影点:

$\left(\frac{-78}{169}, \frac{-312}{169}, \frac{99}{169}\right) \approx (-0.46, -1.85,\ 0.586)$

4A.062

$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 4z - 3 = 0$ ⇔

$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9 + 9 + 4 + 3 = 25$ =>

C(3, 3, 2) 和 r = 5

线 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 插入球体:

$(6 + t - 3)^2 + (0 - t - 3)^2 + (2 + t - 2)^2 = 25$ ⇔

$(3 + t)^2 + (-3 - t)^2 + t^2 = 25$ ⇔

$3t^2 + 12t - 7 = 0$ ⇔

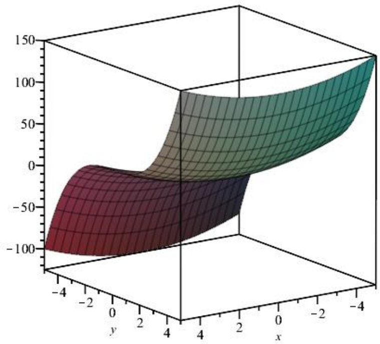
$t = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 3 \cdot (-7)}}{2 \cdot 3} \approx \frac{-12 \pm 15.1}{6}$ ⇔

$t_1 \approx 0.517$ 和 $t_1 \approx -4.52$ 代入 1 给出：

Q$_1$(6.517 ; -0.517 ; 2.517) 和 Q$_2$(1.48 ; 4.52 ; -2.52)

4A.063

$z = x^2 + y^3$



平面的公式 $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

我们需要一个点和一个法向量：

给出点 (0, 5, 125)

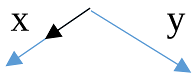
法向量是通过两个切向量的叉积找到的。通过导数（斜率）找到切向量：

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$

就我们而言：$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 2 \cdot 0 = 0$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 = 3 \cdot 5^2 = 75$

它有两个方向向量：

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ {\color{purple}0} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ {\color{purple}75} \end{pmatrix}$ =>



$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -75 \\ 1 \end{pmatrix}$ 这是我们的法向量。

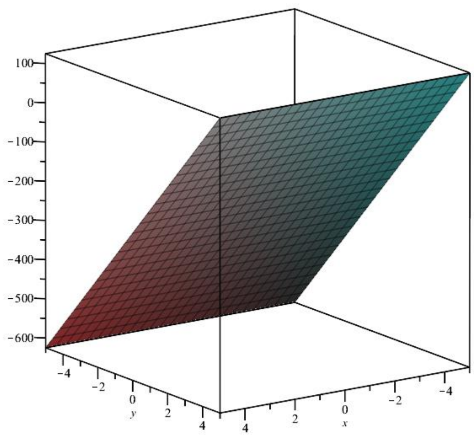
点和法向量代入平面公式：

$$0(x-0)-75(y-5)+1(z-125)=0 \qquad \Leftrightarrow$$

$${\color{red}-75y+375+z-125=0} \qquad {\color{red}\Leftrightarrow}$$

或者求解 z (= f(x,y))，如果我们画一个草图，这会更容易：

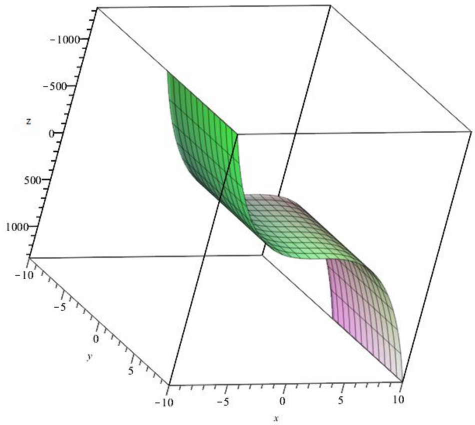
$${\color{red}z=75y-250}$$



我们观察到与函数图的对应关系。

4A.064

$z=\frac{4}{3}x^3+y-x-y^{½}$ 和 $y \geq 0$



平面的公式 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

我们需要一个点和一个法向量：

给出点 (9, 4, 965)

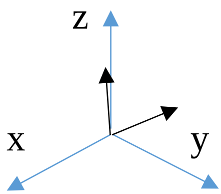
法向量是通过两个切向量的叉积找到的。通过导数（斜率）找到切向量：

就我们而言：$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^2-1=4\cdot 9^2-1=323$

和 $\frac{\partial z}{\partial y}=1-\frac{1}{2}y^{-½}=1-\frac{1}{2}\cdot 4^{-½}=\frac{3}{4}$

它有两个方向向量：

$\begin{pmatrix}1\\0\\323\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ =>



$\begin{pmatrix}1\\0\\323\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-323\\-\frac{3}{4}\\1\end{pmatrix}$ 这是我们的法向量。

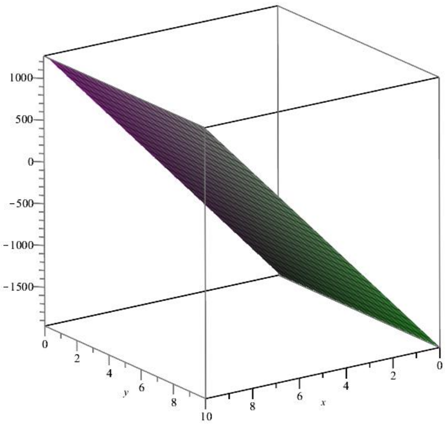
点和法向量代入平面公式：

$$-323(x-9)-\frac{3}{4}(y-4)+1(z-965)=0$$

可能会减少。然而，通过这种方式，我们可以读取实际的点和所使用的法线向量。

或者求解 z (= f(x,y))，如果我们画一个草图，这会更容易：

$$z=-1945+323x+\frac{3y}{4}$$

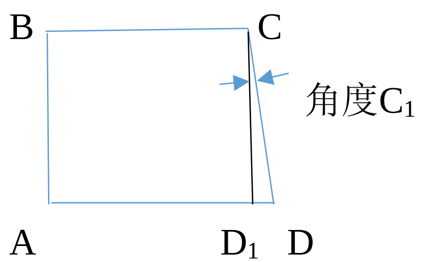


我们观察到与函数图的对应关系。

第 4 部分。

B 部分 – 提议的解决方案

4B.01



毕达哥拉斯：

$$14^2 + |DD_1|^2 = 14.1^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$|DD_1| = (198.81 - 196)^{½} \quad \Leftrightarrow$$

$$|AD| = 14 + 1.676 \approx 15.68\ m$$

$$tan\ C_1 = \frac{1.676}{14} \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = 6.83° \quad \Leftrightarrow \quad C = 90° + 6.83° \approx 96.83°$$

$$tan\ D = \frac{14}{1.676} \quad \Leftrightarrow \quad D \approx 83.17°$$

查看：A + B + C + D = 90 + 90 + 96.83 + 83.17 = 360° 好的。

4B.02

公式 $\cos v = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}$

这里分子 $\binom{0}{4000} \cdot \binom{800}{5} = 0 + 20\,000 = 20\,000$

这里的分母 $(0^2 + 4000^2)^{½} \cdot (800^2 + 5^2)^{½} =$

$3\,200\,062$

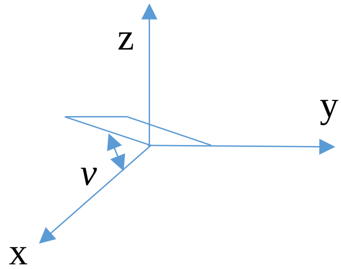
组合 $\cos v = \frac{20\,000}{3\,200\,062} \quad => \quad v \approx 89.64°$

4B.03

矩形是一种特殊的平行四边形，因此：

$$\text{区域} = \left|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}\right| = \left(4^2+0^2+(-4)^2\right)^{½} \quad \Leftrightarrow$$

区域 $\approx 5.66\ m^2$



公式 $$\sin v = \frac{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$$

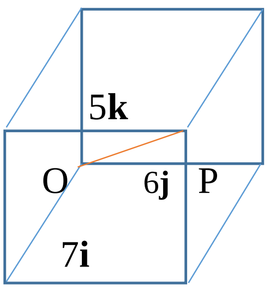
这里a是水平x方向的基向量i，b是楼梯方向。

分子 $$\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}\right| = \left((-4)^2\right)^{½} = 4$$

分母 $$(1^2)^{½} \cdot (4^2+4^2)^{½} = 32^{½}$$

组合 $$\sin v = \frac{4}{32^{½}} \quad => \quad v = 45°$$

4B.04



对角线 = **OP**

角度 α 位于 7i 和 OP 之间

角度 β 位于 6j 和 OP 之间

角度 γ 位于 5k 和 OP 之间

$$\boldsymbol{OP} = \begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix} \quad => \quad |\boldsymbol{OP}| = (7^2+6^2+5^2)^{½} \approx 10.5$$

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad =>$$

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{OP}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{OP}|\cdot|\boldsymbol{i}|} = \frac{7}{10.5} \quad => \quad \alpha \approx 48.2°$$

$$\cos\beta = \frac{\boldsymbol{OP}\cdot\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{OP}|\cdot|\boldsymbol{j}|} = \frac{6}{10.5} \quad => \quad \beta \approx 55.2°$$

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{OP}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{OP}|\cdot|\boldsymbol{k}|} = \frac{5}{10.5} \quad => \quad \gamma \approx 61.6°$$

4B.05

方程式铁路 $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}90\\90\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$$

方程路 $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}60\\70\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\4\\0.1\end{pmatrix}$$

在路口 $$\begin{pmatrix}90\\90\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}60\\70\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\4\\0.1\end{pmatrix} \qquad =>$$

x 和 y $$90 + 3s = 60 - 2t \quad 和 \quad 90 + 3s = 70 + 4t \quad =>$$

$$t = -\frac{30}{2} - \frac{3}{2}s \qquad 和 \quad t = \frac{20}{4} + \frac{3}{4}s \qquad =>$$

$$-\frac{30}{2} - \frac{3}{2}s = \frac{20}{4} + \frac{3}{4}s \qquad \Leftrightarrow$$

$$s = -\frac{80}{9} \quad => \quad t = -\frac{5}{3}$$

插入查找 x 和 y 坐标：

铁路 $$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}90\\90\end{pmatrix} - \frac{80}{9}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{190}{3}\\\frac{190}{3}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}63.3\\63.3\end{pmatrix}$$

或道路 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} - \frac{5}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{190}{3} \\ \frac{190}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 63.3 \\ 63.3 \end{pmatrix}$ 遵守

铁路和公路将在 (x, y) ≈ (63.3 ; 63.3)

距离（铁路、公路) $= \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P_1P_2}|}{|\boldsymbol{n}|}$

其中 P_1 是铁路上的点，P_2 是公路上的点，n 是铁路和公路的法向量。

$$\boldsymbol{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 60-90 \\ 70-90 \\ 3-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -20 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_1 \, x \, \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ -0.3 \\ 18 \end{pmatrix} \quad =>$$

距离（铁路、公路) $= \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P_1P_2}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0.3 \\ -0.3 \\ 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ -20 \\ -5 \end{pmatrix}\right|}{(0.3^2+(-0.3)^2+18^2)^{½}} = \frac{|-9+6-90|}{18}$ =>

距离（铁路、公路) ≈ $5.17 \; m$

4B.06

方程式铁路 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 90 \\ h \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

方程路 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0.1 \end{pmatrix}$

在路口 $\begin{pmatrix} 90 \\ 90 \\ h \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0.1 \end{pmatrix}$ =>

x 和 y $\quad 90+3s=60-2t$ 和 $90+3s=70+4t$ =>

$$t=-\frac{30}{2}-\frac{3}{2}s \quad \text{和} \quad t=\frac{20}{4}+\frac{3}{4}s \qquad =>$$

$$-\frac{30}{2}-\frac{3}{2}s=\frac{20}{4}+\frac{3}{4}s \qquad \Leftrightarrow$$

$$s=-\frac{80}{9} \quad => \quad t=-\frac{5}{3}$$

插入查找 x 和 y 坐标：

铁路 $\quad \binom{x}{y}=\binom{90}{90}-\frac{80}{9}\binom{3}{3}=\begin{pmatrix}\frac{190}{3}\\ \frac{190}{3}\end{pmatrix}\approx\binom{63.3}{63.3}$

或道路 $\quad \binom{x}{y}=\binom{60}{70}-\frac{5}{3}\binom{-2}{4}=\begin{pmatrix}\frac{190}{3}\\ \frac{190}{3}\end{pmatrix}\approx\binom{63.3}{63.3}$ 遵守

铁路和公路将在 (x, y) ≈ (63.3 ; 63.3)

距离（铁路、公路) $=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P_1P_2}|}{|\boldsymbol{n}|}$

其中 P_1 是铁路上的点，P_2 是公路上的点，n 是铁路和公路的法向量。

$$\boldsymbol{P_1P_2}=\begin{pmatrix}60-90\\70-90\\3-h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-30\\-20\\3-h\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_1\, x\, \boldsymbol{r}_2=\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}-2\\4\\0.1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.3\\-0.3\\18\end{pmatrix} \qquad =>$$

距离（铁路、公路) $=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P_1P_2}|}{|\boldsymbol{n}|}=5.5$ =>

$$\frac{\left|\begin{pmatrix}0.3\\-0.3\\18\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-30\\-20\\3-h\end{pmatrix}\right|}{(0.3^2+(-0.3)^2+18^2)^{½}}=\frac{|-9+6+54-18h|}{18}=\frac{|51-18h|}{18}=5.5 \qquad \Leftrightarrow$$

$|51 - 18h| = 99$ $\Leftrightarrow$

$(h = \frac{99-51}{-18} \approx -2.67)$ 或者 $h = \frac{99+51}{18} \approx 8.33$

由于铁路跨越公路，h 为 8.33

4B.07

飞机 $x + 0 \cdot y - \frac{3}{4}z = 0$ => $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

线 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ => $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

在相交处，将线插入平面中：

$2 - \frac{3}{4}(1 + t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1 + t) = (-2)(-\frac{4}{3}) \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{5}{3}$

t 插入行中 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$

因此，交点 $(2, 5, \frac{8}{3})$

直线与平面的夹角 $\cos u = \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{r}| \cdot |\boldsymbol{n}|}$

其中水平面的法向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ =>

$\cos u = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{|\boldsymbol{r}| \cdot |\boldsymbol{n}|} = 0$ $\Leftrightarrow$ u = 90°

两个平面之间的角度 $\cos v = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|}$

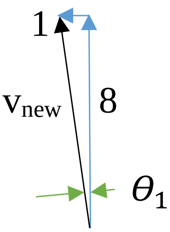
这里 $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}_{\text{屋顶}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

水平面的法向量是 $\boldsymbol{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

所以 $\cos v = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{(1^2+(-\frac{3}{4})^2)^{½} \cdot (1^2)^{½}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow$

$v = cos^{-1}(\frac{3}{5}) \approx 53°$

4B.08



使用速度矢量。

毕达哥拉斯： $v = (8^2 + 1^2)^{½} \approx 8.06 \frac{m}{s}$

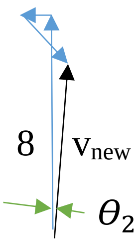
方向： $tan\ \theta_1 = \frac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad \theta_1 \approx 7.13°$

船航向向西偏离 $7.13°$ ，新速度为 $8.06 \frac{m}{s}$

风发生： $\binom{0}{8} + \binom{-1}{0} + \binom{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} \approx \binom{0.41}{6.59}$

速度=矢量长度

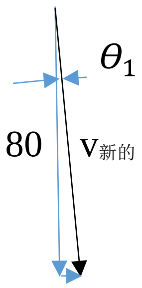
$v = (0.41^2 + 6.59^2)^{½} \approx 6.6 \frac{m}{s}$



方向 $\cos\theta_2 = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \frac{\binom{0}{8}\cdot\binom{0.41}{6.59}}{8\cdot 6.6} = \frac{52.72}{52.8} \Leftrightarrow \theta_2 = 3.15°$

船航向向东偏离 3.15°，新速度为 $6.6\frac{m}{s}$

4B.09



使用速度矢量。

毕达哥拉斯：$v = (80^2 + 4^2)^{½} \approx 80.1\frac{m}{s}$

方向： $\tan\theta_1 = \frac{4}{80} \Leftrightarrow \theta_1 \approx 2.86°$

飞机方向向东偏离 2.86°，新速度为 $80.1\frac{m}{s}$

Wind changes:

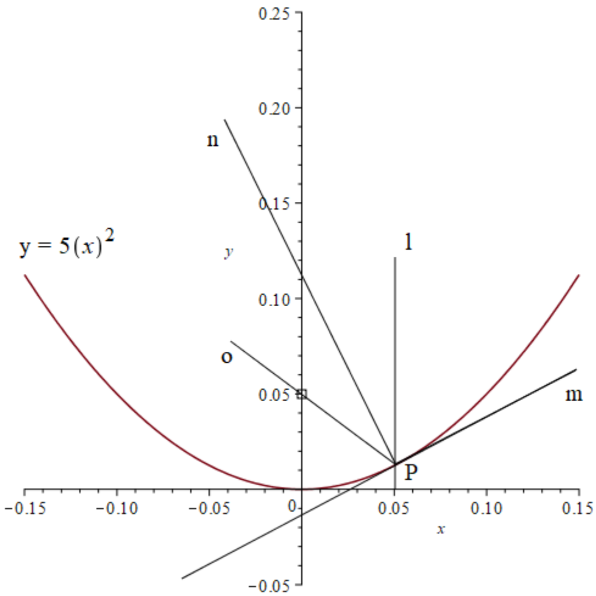
Horizontally the plane will still be deviated 2.86° to the east, - and upwards:

毕达哥拉斯 $v = (80.1^2 + 1^2)^{½} \approx 80.11\frac{m}{s}$

方向: $\tan\theta_{up} = \frac{1}{80.11} \Leftrightarrow \theta_{up} \approx 0.72°$

$60\,s\cdot 1\frac{m}{s} =$ 60 米 (m)

4B.10



抛物线 $y = 5x^2$

选择 $x = 0.05$ => $y = 0.0125$ => $P(0.05 ; 0.0125)$

该点 P 在抛物线上，也在直线 l 上： $x = 0.05$

此时抛物线的正切为：

$y = ax + b$ 在哪里 $a = \frac{dy}{dx} = 10x = 10 \cdot 0.05 = 0.5$ =>

$0.0125 = 0.5 \cdot 0.05 + b$ ⇔ $b = -0.0125$ =>

$y = 0.5x - 0.0125$ 称为切线 m

m 和 l 之间的角度：

m 具有方向向量 $\binom{1}{0.5}$ 和 l: $\binom{0}{1}$ =>

角度 $\cos v = \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{m}| \cdot |\boldsymbol{l}|} = \frac{\binom{1}{0.5} \cdot \binom{0}{1}}{1.25^{½} \cdot 1^{½}} = \frac{0.5}{1.25^{½}}$ ⇔ $v \approx 63.4°$

因此，法线 n 与光束的入射角线 l 成 $90 - 63.4 \approx 26.6°$ 的角度。因此线 n 和线 o 之间的角度也是 26.6° =>

线 o 与 x 轴之间的角度变为

$90 - 26.6 - 26.6 \approx 36.8°$ =>
$Slope\ of\ line\ o = -\tan 36.8° \approx -0.748$ =>

线 o 的方程 $y = ax + b$

这里 $0.0125 = -0.748 \cdot 0.05 + b$ =>

$b = 0.05$ =>

由于 b 是线 o 与 y 轴相交点的 y 值，因此它也是抛物线的焦点 (0 , 0.05)

第 5 部分。

建议的解决方案

5.01

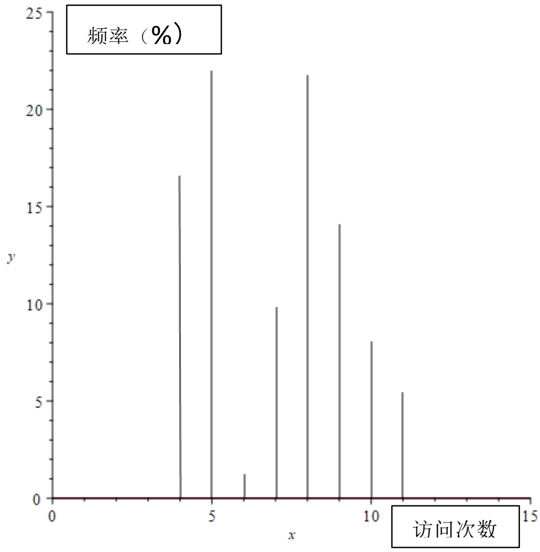
最大的观察 = 6　　　　最小观察值 = 1

1. 四分位数 = 3　　2. 四分位数 = 4　　3. 四分位数 = 5

中位数 = 2. 四分位数 = 4

5.02

观察。 访问次数	人数	频率，f 满分	频率 满分 100，即 %	累积频率（%） 频率总结
4	12	0.167	16.7	16.7
5	16	0.222	22.2	38.8
6	1	0.014	1.4	40.2
7	7	0.097	9.7	49.9
8	16	0.222	22.2	72.1
9	10	0.139	13.9	86
10	6	0.083	8.3	94.3
11	4	0.056	5.6	100
全部的：	*72*	*1*	*100 %*	*1*



$$\text{平均值} = \frac{4\cdot12+5\cdot16+6\cdot1+7\cdot7+8\cdot16+9\cdot10+10\cdot6+11\cdot4}{72} \approx 7.03$$

公式　　变化 $= \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \mu)^2$

这里　　变化 =

$0.167(4-7.03)^2 + 0.222(5-7.03)^2$

$+0.014(6-7.03)^2 + 0.097(7-7.03)^2$

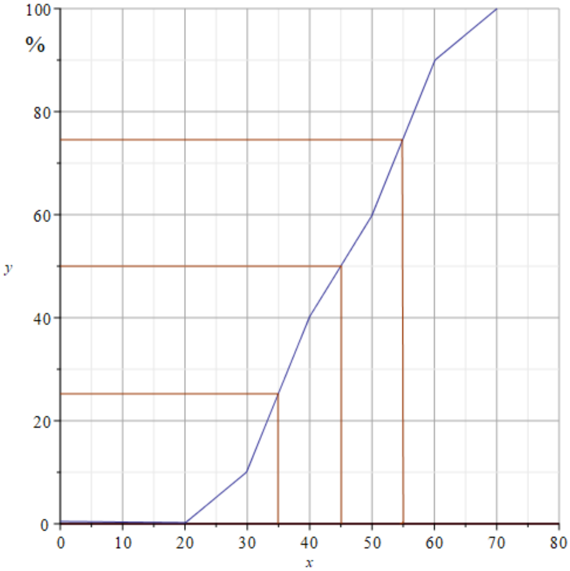
$+0.222(8-7.03)^2 + 0.139(9-7.03)^2$

$+0.083(10-7.03)^2 + 0.056(11-7.03)^2 \approx$

4.8 =>

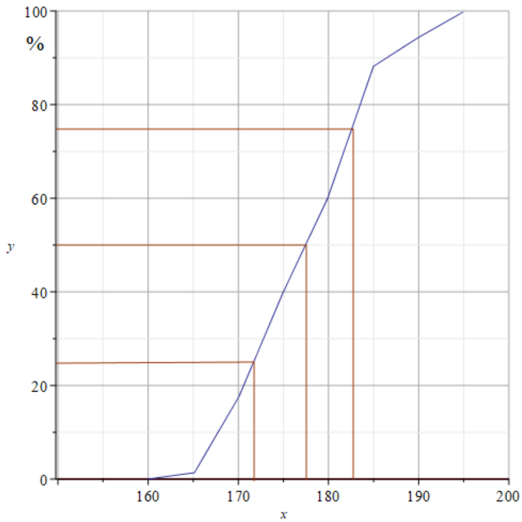
标准差：$\sigma = \sqrt{\text{变化}} = \sqrt{4.8} \approx 2.2$

5.03



四分位数集： [35 ; 45 ; 55]

5.04



四分位数集： [172 ; 178 ; 183]

90% 四分位数大约是。 187 厘米，也就是说 90% 的男生身高都在 187 厘米以下。

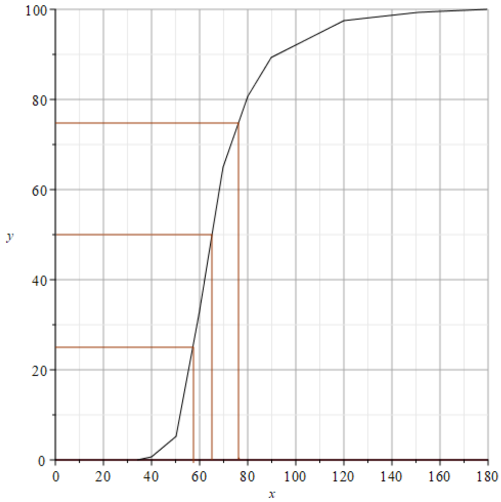
175 厘米读数为 40%， 180 厘米读数为 60% =>

6 人就是 20% =>

100% 是 30 人。

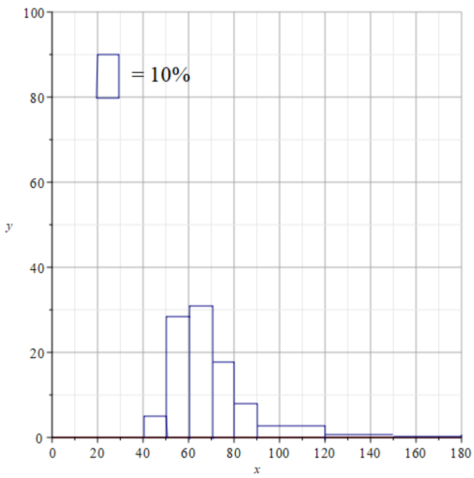
5.05

观察。 时间以分钟为单位	完成人数。 （累计）	累积频率（%） 频率总结	频率（%）
35-40	7	0.14	0.14
40-50	276	5.52	5.38
50-60	1669	33.38	27.86
60-70	3210	64.2	30.82
70-80	4093	81.86	17.66
80-90	4492	89.84	7.98
90-120	4896	97.92	8.08
120-150	4974	99.48	1.56
150-180	5000	100	0.52

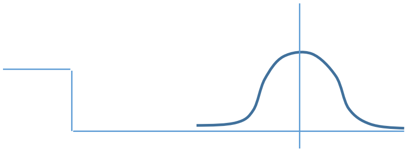


四分位数集： [58 ; 65 ; 76]

直方图：

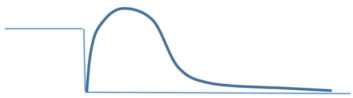


5.06



Q_1 将呈正态分布

Q_2 不会呈正态分布，因为在 x = 0 的墙上有一个“截止”值，但对于较大的 x 值则不然。



5.07

频率 $= \frac{15}{120} = 0.125 = 12.5\%$

概率为 120 中的 15 =>

可能性 $= \frac{15}{120} = 0.125 = 12.5\%$

由于两个答案是独立/不相关的，因此每个答案的概率均为 0.125。

综合： $0.125 \cdot 0.125 = 0.0156 = 1.56\%$

5.08

$2 \cdot 3 \cdot 4 =$ 24 组合

5.09

CAS：年份 [=“year]” 的数据输入从0到100。浓度 [=“conc”] 的相应数据。被输入。我们要求指数回归，例如：指数回归（年份、浓度）[= ExpReg(year, conc.)] 进入

和产量例如： $y = 365.12 \cdot 1.0064^{x}$

在我们的例子中这意味着： $浓度 = 365.12 \cdot 1.0064^{年份}$

其中 x = 年位于区间内 [0;100]

在作者使用的程序中，可靠性因子给出为：R^2 = 0.99766，这很好。因此指数函数的估计是好的。

5.10

情况是“两者，并且”，即乘法： $6 \cdot 6 \cdot 6$ = 216 可能性

$$可能性 = \frac{有利结果的数量}{可能结果的数量} = \frac{1}{6}$$

情况是“两者，并且”，即乘法：

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216} \approx 2.78\%$$

5.11

每个骰子有六个面，分别有 1、2、3、4、5、6 只眼睛。

情况是“要么，要么”，即加：$6 + 6 + 6 = 18$ 只眼睛

$$一掷中的概率 = \frac{1}{6}$$

这种情况是“要么，要么”，即加上： $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \approx 50\%$

5.12

案例/选择是任意顺序，不重复，其中 n = 6 且 r = 3

$$P = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1} = \frac{6\cdot5\cdot4}{1} = 120 \text{ 可能性}$$

Liz、Peter 和 Ann 是一种可能性（有利的结果），即：

$$\text{可能性} = \frac{\text{有利结果的数量}}{\text{可能结果的数量}} = \frac{1}{120} \approx 0.83\%$$

5.13

案例/选择没有顺序，没有重复，其中 n = 6 且 r = 3

$$K = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3} = \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} = 20 \text{ 可能性}$$

Liz/Peter/Ann 或其他命令是一种可能，即：

$$\text{可能性} = \frac{\text{有利结果的数量}}{\text{可能结果的数量}} = \frac{1}{20} \approx 5\%$$

5.14

这种情况是任何顺序，重复，即“两者，并且” =>
$24\cdot24\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10 = 24^2\cdot10^5 = 57\,600\,000$ 可能性

AB 12 345 是唯一有利的结果 = =>

$$\text{可能性} = \frac{\text{有利结果的数量}}{\text{可能结果的数量}} = \frac{1}{57\,600\,000}$$

5.15

案例无先后顺序，有重复 =>

$$\frac{(n-1+r)!}{r!\cdot(n-1)!} = \frac{(6-1+3)!}{3!\cdot(6-1)!} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = 56 \text{ 可能性}$$

我们为汽车命名 A1, A2, A3, B, C, D.

A1, A2, A3, B 可以通过 4 种方式组合。

A1, A2, A3, C 可以通过 4 种方式组合。

A1, A2, A3, D 可以通过 4 种方式组合。

有利结果的分子数的情况是“要么，要么”，即加法：

$$\text{可能性} = \frac{\text{有利结果的数量}}{\text{可能结果的数量}} = \frac{4+4+4}{56} = \frac{12}{56} \approx 21.4\%$$

5.16

顺序并不重要，因此案例是无顺序的，没有重复。

我们必须计算 $\text{可能性} = \frac{\text{有利结果的数量}}{\text{可能结果的数量}}$

分子显示了我们可以得到 5 个 A 中的 3 个的方法： =>

分子 $K = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = \frac{120}{6\cdot 2} = 10$ 有利的结果

总而言之，即分母：

分母 $K = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = \frac{12!}{3!\cdot(12-3)!} = \frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{6\cdot 9!} =$

总共 220 种可能的结果

分数 $\text{可能性} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22} \approx 4.55\%$

5.17 (5.16 继续)

顺序并不重要，因此案例是无顺序的，没有重复。

左边是 A、A、A、A、B、B、C、C、C，即 9。 =>

分母 $K = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = \frac{9!}{2!\cdot(9-2)!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 7!} = 36$ 可能的结果

B 的分子 $K_B = \frac{2!}{1!\cdot(2-1)!} = \frac{2}{1\cdot 1} = 2$

C 的分子 $K_C = \frac{3!}{1!\cdot(3-1)!} = \frac{6}{1\cdot 2} = 3$

这些必须组合为“两者，并且”，即乘法 =>

分数 可能性 $= \frac{\text{有利结果的数量}}{\text{可能结果的数量}} = \frac{K_B\cdot K_C}{K} = \frac{2\cdot 3}{36} = \frac{1}{6} \approx 16.7\%$

5.18

该案例是二项分布样本。 =>

$$\left[p^* - 2\sqrt{\frac{p^*\cdot(1-p^*)}{n}}\ ;\ p^* + 2\sqrt{\frac{p^*\cdot(1-p^*)}{n}}\ \right]$$

这里 n = 1017 和点估计 $p* = \frac{408}{1017} \approx 0.401$ =>

$$\left[0.401 - 2\sqrt{\frac{0.401\cdot(1-0.401)}{1017}}\ ;\ 0.401 + 2\sqrt{\frac{0.401\cdot(1-0.401)}{1017}}\right] = [0.37\,;0.43]$$

因此，37% 到 43% 的选民将投票给该特定政党的可能性为 95%。

5.19

该案例是二项分布样本。我们计算大约 99% 的置信区间：

$$\left[p^* - 3\sqrt{\frac{p^*\cdot(1-p^*)}{n}}\ ;\ p^* + 3\sqrt{\frac{p^*\cdot(1-p^*)}{n}}\ \right]$$

这里 n = 1500 和点估计 $p* = \frac{51}{1500} \approx 0.034$ =>

$$\left[0.034 - 3\sqrt{\frac{0.034\cdot(1-0.034)}{1500}}\ ;\ 0.034 + 3\sqrt{\frac{0.034\cdot(1-0.034)}{1500}}\right] = [0.02\,;0.048]$$

因此，在 30 000 名 10 岁以上的人中，有 95% 的可能性有 2% 到 4.8% 的人愿意骑行。人数为：

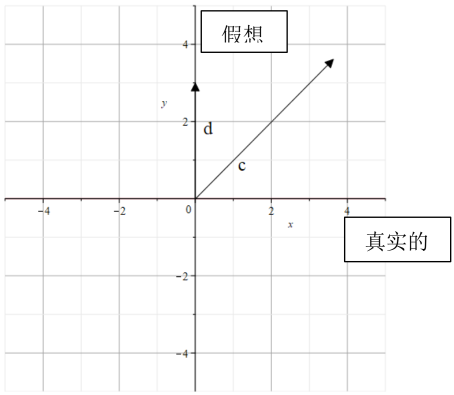
0.02 • 30 000 = 600 人和 0.048 • 30 000 = 1440 名骑手

25% 渲染：150 到 360 人之间，其中 99% 的可能性将参加新的马术学校。

复数

5.20

$c = \left(5, \frac{\pi}{4}\right)$ 和 $d = (3, \frac{\pi}{2})$ =>



极性

$c \cdot d = 5 \cdot 3_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}} = 15_{\frac{3\pi}{4}}$ $\qquad \frac{c}{d} = \left(\frac{5}{3}\right)_{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{5}{3}\right)_{-\frac{\pi}{4}}$

矩形（作为矢量）

d $\qquad d = 3I$

和c $5^2 = x^2 + y^2$ 角度 = 45° => x = y =>

$5^2 = 2x^2$ =>

$x \approx 3.56$ =>

$c \approx 3.56 + 3.56 \cdot I$

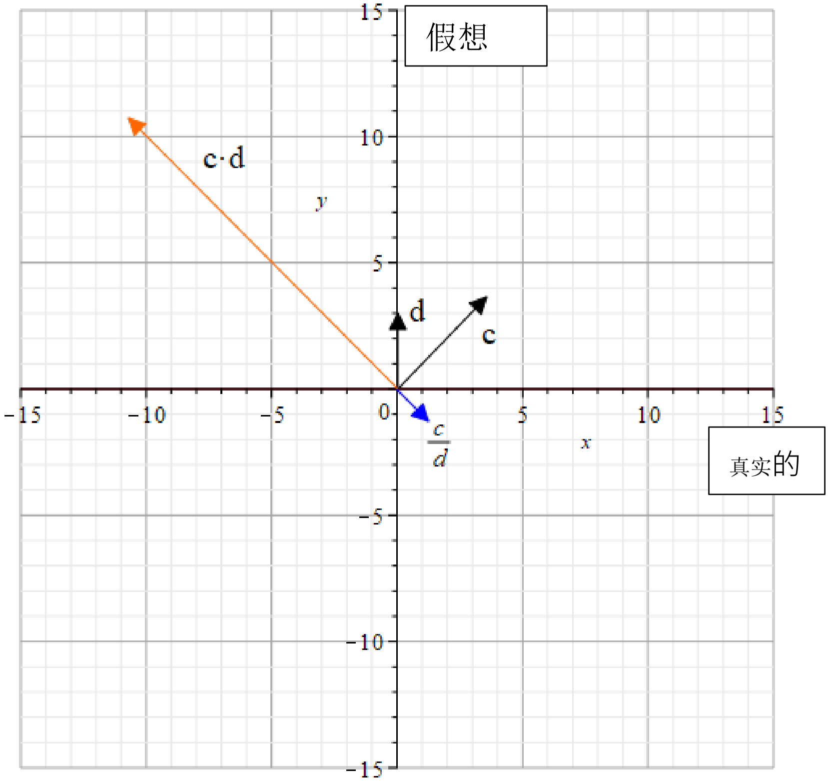
$c \cdot d = (3.56 + 3.56I) \cdot (3I)$ ⇔

$c \cdot d = 10.7I + 10.7I^2$ ⇔

$c \cdot d \approx -10.7 + 10.7I$

$\frac{c}{d} = \frac{3.56+3.56I}{3I} = \frac{(3.56+3.56I)(3I)}{3I(3I)} = \frac{10.7I+10.7I^2}{9I^2} = \frac{10.7I-10.7}{-9}$ ⇔

$\frac{c}{d} \approx 1.19 - 1.19I$



5.21

矩形（作为矢量）

$a = 3 + 4I$ 和 $b = -2 + 5I$ =>

$a \cdot b = (3 + 4I) \cdot (-2 + 5I)$ ⇔

$a \cdot b = -6 + 15I - 8I + 20I^2$ ⇔

$a \cdot b = -6 + 7I - 20$ ⇔

$a \cdot b \approx -26 + 7I$

$\frac{a}{b} = \frac{3+4I}{-2+5I} = \frac{(3+4I)(-2-5I)}{(-2+5I)(-2-5I)} = \frac{-6-15I-8I-20I^2}{4-(25\cdot(-1))} = \frac{-6-23I+20}{29}$ ⇔

$\frac{a}{b} \approx 0.483 - 0.793I$

极性

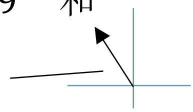
$模数_a = (3^2 + 4^2)^{½} = 5$ 和

$争论_a = tan^{-1}\frac{4}{3} \approx 53.1°$ =>

$a = (5\,;53.1°)$ 或者 $5_{53.1°}$

$模数_b = ((-2)^2 + 5^2)^{½} = 29^{½} \approx 5.39$ 和

$角度与 - x = tan^{-1}\frac{5}{-2} \approx -68.2°$



$争论_b(角度与\ + x) = 180° - 68.2° = 111.8°$ =>

$b = (5.39\,;111.8°)$ 或者 $5.39_{111.8°}$

所以

$a \cdot b = (5 \cdot 5.39)_{53.1+111.8} \approx 26.9_{164.9°}$

$\frac{a}{b} = \left(\frac{5}{5.39}\right)_{53.1-111.8} \approx 0.929_{-58.8°}$

5.22

矩形（作为矢量）

$a = 3 + I$ 和 $b = -2 - 2I$ =>

$a \cdot b = (3 + I) \cdot (-2 - 2I)$ ⇔

$a \cdot b = -6 - 6I - 2I - 2I^2$ ⇔

$a \cdot b \approx -4 - 8I$

$\frac{a}{b} = \frac{3+I}{-2-2I} = \frac{(3+I)(-2+2I)}{(-2-2I)(-2+2I)} = \frac{-6+6I-2I-2I^2}{4-4I+4I-4I^2} = \frac{-8+4I}{8} \quad \Leftrightarrow$

$\frac{a}{b} \approx -1 + \frac{1}{2}I$

极性

模数$_a = (3^2 + 1^2)^{½} = 10^{½} \approx 3.16$ 和

争论$_a = tan^{-1}\frac{1}{3} \approx 18.4°$ =>

$a \approx 3.16 \angle 18.4°$

模数$_b = ((-2)^2 + (-2)^2)^{½} = 8^{½} \approx 2.83$ 和

角度与 $-x = tan^{-1}\frac{5}{-2} \approx -68.2°$

争论$_b = 180° + tan\frac{2}{2} = 225°$ =>

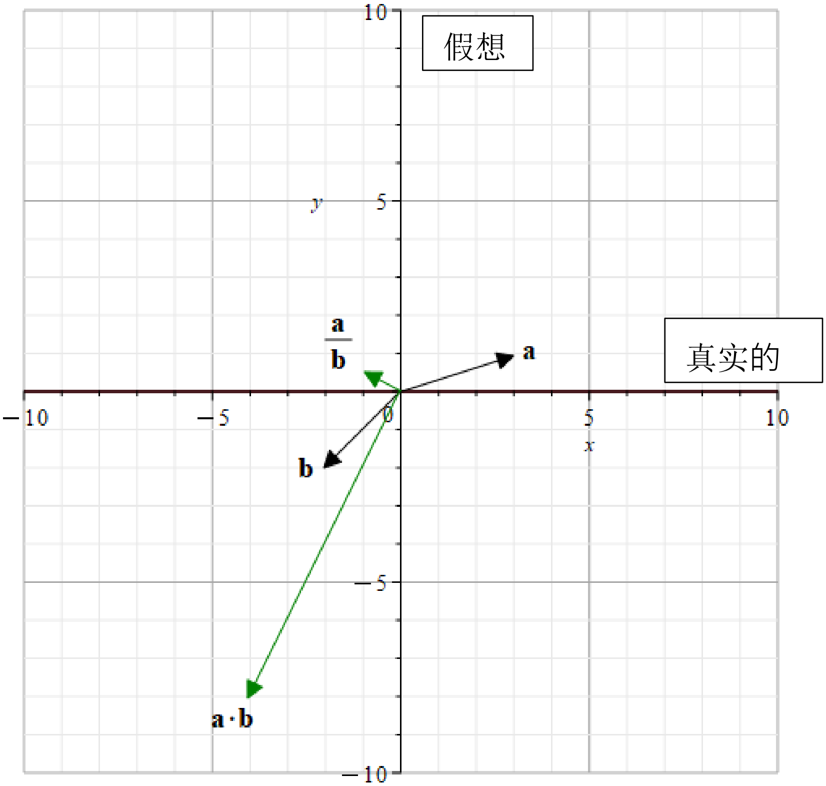
$b = 2.83 \angle 225°$

所以

$a \cdot b = (3.16 \cdot 2.83) \angle (18.4 + 225) \approx 8.95 \angle 243.4°$

$\frac{a}{b} = \left(\frac{3.16}{2.83}\right) \angle 18.4 - 225 \approx 1.12 \angle -206.6°$

或者用正角度: $1.12 \angle 153.4°$



5.23

$z \;=\; 2\,(\cos\frac{\pi}{3} + I\cdot\sin\frac{\pi}{3}) \quad => \quad z = 2\cdot e^{I\cdot\frac{\pi}{3}}$

$z^3 = (2\cdot e^{I\cdot\frac{\pi}{3}})\,(2\cdot e^{I\cdot\frac{\pi}{3}})\,(2\cdot e^{I\cdot\frac{\pi}{3}}) \;=\; 8\cdot e^{I\cdot\frac{\pi}{3}+I\cdot\frac{\pi}{3}+I\cdot\frac{\pi}{3}} \;=\; 8\cdot e^{I\cdot\pi}$

其中模数为 8，参数为 π – 可以写成

$z^3 \;=\; 8\,(\cos\pi + I\cdot\sin\pi) = 8(-1 + I\cdot 0) = -8 \qquad \Leftrightarrow$

$z^3 \;=\; -8$ 这是矩形.